"Lineare Algebra"
WS 2018/19 — Übungsblatt 9

Ausgabe: 02.07.2019, **Abgabe:** 09.07.2019

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws18/la.html

Sie erhalten zusätzlich 2 Punkte für das Ausfüllen des Online-Tests. Diese sind Teil der Pflichtwertung. Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 9.1: Sei $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die quadratische Form

$$q(x, y, z) = x^2 - y^2 + 4xy + 6xz - 4yz.$$

Berechnen Sie die darstellende Matrix der eindeutig durch q bestimmten symmetrischen Bilinearform $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. **(2P)**

Aufgabe 9.2: Seien V, W, U Vektorräume über einem Körper k. Sei $\mathrm{Bilin}_k(V, W; U) \subset \mathrm{Abb}(V \times W, U)$ die Menge der bilinearen Abbildungen.

1. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Bilin}_k(V, W; U) \subset \mathrm{Abb}(V \times W, U)$ ein Untervektorraum ist.

2. Geben Sie ein Beispiel (mit Beweis) von k, V, W, U und einer bilinearen Abbildung $s\colon V \times W \to U$, so dass das Bild von s kein Untervektorraum von U ist. **(6P)**

Aufgabe 9.3: Sei $M \in \mathrm{M}_3(\mathbb{F}_3)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis für die symmetrische Bilinearform $s(x, y) = x^t M y$ af $\mathbb{F}_3^3$. **(6P)**

Aufgabe 9.4: Eine Bilinearform $s\colon V \times V \to k$ heißt *schiefsymmetrisch* (oder *antisymmetrisch*), wenn $s(v_1, v_2) = -s(v_2, v_1)$ gilt für alle $v_1, v_2 \in V$.

1. Zeigen Sie, dass s schiefsymmetrisch ist genau dann, wenn die darstellende Matrix A von s schiefsymmetrisch ist, d.h. $A = -A^t$.

2. Sei $2 \neq 0$ in k. Zeigen Sie, dass jede Bilinearform $s\colon V \times V \to k$ eine Zerlegung

$$s = s_1 + s_2$$

hat, wobei $s_1\colon V \times V \to k$ eine symmetrische Bilinearform und $s_2\colon V \times V \to k$ eine schiefsymmetrische Bilinearform ist. **(4P)**