Übungen zur "Algebraische Zahlentheorie"
SS20   Blatt 9

Ausgabe: 13.7.2020, **Abgabe:** 20.7.2020

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss20/algzt/index.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen. Bei Aufgaben, die als *mit SAGE* deklariert sind, erklären Sie, wie Sie vorgegangen sind, d.h. dokumentieren Sie, was Sie SAGE haben rechnen lassen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 9.1: (ohne SAGE; 5 Punkte) Bestimmen Sie die Klassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-67})$.

Aufgabe 9.2: (ohne SAGE; 10 Punkte) Bestimmen Sie die Klassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-14})$.

Aufgabe 9.3: (ohne SAGE; 10 Punkte)
Sei $p \geq 7$ eine Primzahl. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- -5 ist ein Quadrat im Körper $\mathbb{F}_p$.
- Es gilt $p = x^2 + 5y^2$ für geeignete $x, y \in \mathbb{Z}$ oder $p = \frac{a^2+5b^2}{2}$ für geeignete $a, b \in \mathbb{Z}$.

Wir folgen den Schritten:

1. Bestimmen Sie den Ganzheitsring und die Klassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.
2. Bestimmen Sie die verzweigten Primzahlen.
3. Zeigen Sie, dass $(2) = \mathfrak{p}^2$ für ein geeignetes Primideal $\mathfrak{p}$. Welche Klasse repräsentiert $\mathfrak{p}$ in der Klassengruppe?
4. Adaptieren Sie die Methode aus den *NormEq*-Videos für den Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.
   (Tipp: Wenn Sie auf ein Nicht-Hauptideal $\mathfrak{q}$ stoßen, lohnt es sich vielleicht, stattdessen mit $\mathfrak{pq}$ zu arbeiten)

Aufgabe 9.4: (ohne SAGE; 15 Punkte) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung

$$x^3 = y^2 + 58 \tag{1}$$

mit $x, y \in \mathbb{Z}$. Wir folgen den Schritten:

1. Wir arbeiten im Zahlkörper $F := \mathbb{Q}(\sqrt{-58})$ und schreiben

   $$x^3 = \left(y + \sqrt{-58}\right)\left(y - \sqrt{-58}\right). \tag{2}$$

   Sei $\mathfrak{a} := (y+\sqrt{-58}, y-\sqrt{-58})$ der größte gemeinsame Teiler beider Faktoren.

2. Geben Sie den Ganzheitsring $\mathcal{O}_F$ an.

3. Sei $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}$ Primfaktor mit $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}=(p)$ und p ungerade Primzahl. Folgern Sie, dass $p = 29$. Folgern Sie, dass $29 \mid y$. Nutzen Sie Gleichung (1), um einen Widerspruch herzuleiten.[1]

4. Sei $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}$ Primfaktor mit $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}=(2)$. Folgern Sie, dass dann $\mathfrak{p} = (2, \sqrt{-58})$ gelten muss. Folgern Sie, dass $\mathfrak{p} \mid \sqrt{-58}$. Folgern Sie mit Gleichung (2), dass $\mathfrak{p} \mid y$ und dann, dass $2 \mid y$.

5. Folgern Sie, dass die Faktorisierung in Gleichung (2) teilerfremd ist. Nutzen Sie nun Corollary 5.4 aus dem Skript.

6. Folgern Sie, dass $\left(y \pm \sqrt{-58}\right) = \mathfrak{j}_\pm^3$ für geeignete Ideale $\mathfrak{j}_\pm$.

7. Bestimmen Sie die Klassengruppe und folgern Sie, dass $\mathfrak{j}_\pm$ Hauptideale sind.

8. Folgen Sie der Methode aus dem *MordellEq16*-Video.

[1] evtl. müssen Sie mehrfach "durch die Gleichung springen", um höhere Teilbarkeiten zu folgern, ähnlich wie in *MordellEq16_Part2*.