Übungen zur "Algebraische Zahlentheorie" SS20 Blatt 3

Ausgabe: 1.6.2020, **Abgabe:** 8.6.2020

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ss20/algzt/index.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen. Bei Aufgaben, die als *mit SAGE* deklariert sind, erklären Sie, wie Sie vorgegangen sind, d.h. dokumentieren Sie, was Sie SAGE haben rechnen lassen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 3.1: (mit SAGE; 10 Punkte) Jemand behauptet, dass in einem Zahlkörper F für ein gewisses Element α der Multiplikationsoperator M_α durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

gegeben sei. Leider kennen wir weder F, noch α, noch wissen wir bezüglich welcher Basis diese Matrix aufgeschrieben wurde. Analysieren Sie diese Behauptung.

Aufgabe 3.2: (mit SAGE; 10 Punkte) Sei d die Anzahl der Buchstaben in Ihrem Vornamen. Die Zahl

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

wird als *goldener Schnitt* bezeichnet. Die Potenzen x^n wachsen offensichtlich für $n \to +\infty$ exponentiell.

1. Berechnen Sie x^{100d}. Geben Sie die Zahl in Dezimalbruchdarstellung mit mindestens 10 Nachkommastellen an.[1]

2. Berechnen Sie die Spur von x^{100d} als Element des Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

3. Beweisen Sie, dass der Abstand von x^n zur nächsten ganzen Zahl exponentiell abfällt, aber nie null ist; d.h. es existieren $c_0 \geq 0$ und $0 < c_1 < 1$, so dass für alle $n \geq 1$ die Ungleichung

$$0 < \inf_{y \in \mathbb{Z}} \left(|x^n - y| \right) < c_0 \cdot c_1^n \tag{1}$$

gilt.

[1] Der Befehl `RR(x).str(no_sci=2)` gibt eine Zahl x als klassischen Dezimalbruch an. Ersetzt man `RR` durch `RealField(`*Präzision*`)` kann man die reellen Zahlen mit beliebiger Präzision rechnen lassen.

4. Beweisen Sie, dass das Polynom $T^4 - T^3 - 1$ eine reelle Lösung x besitzt, die ebenfalls eine Abschätzung der Form (1) erfüllt für geeignete c_0, c_1. Hierbei dürfen Sie die Nullstellen numerisch mit SAGE bestimmen und im Beweis benutzen.

Aufgabe 3.3: (ohne SAGE; 20(+5) Punkte) Welche Quadratzahlen sind genau um 7 kleiner als irgendeine Zweierpotenz? Äquivalent ausgedrückt wollen wir die Lösungen der Gleichung

$$x^2 = 2^n - 7$$

mit $x, n \in \mathbb{Z}$ bestimmen. Wir gehen wie folgt vor:

1. Bestimmen Sie alle Lösungen mit $n \leq 3$ direkt.
2. Sei nun $n \geq 4$ und n gerade. Nutzen Sie die Faktorisierung

$$\left(2^{\frac{n}{2}} - x\right)\left(2^{\frac{n}{2}} + x\right) = 7$$

   im Ring $\mathbb{Z}$.
3. Es genügt nun, den Fall $n \geq 4$ und n ungerade zu betrachten; und wir können ebenso $x > 0$ annehmen. Zeigen Sie, dass für solche Lösungen (x, n) der Term $x^2 + 7$ durch 4 teilbar sein muss.
4. Wir arbeiten im Zahlkörper $F := \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$. Geben Sie den Ganzheitsring $\mathcal{O}_F$ an (Sie können die Vorlesungsvideos oder das Skript zitieren). Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_F$ Euklidisch ist.
5. Bestimmen Sie die Faktorisierung von 2 in irreduzible Elemente in $\mathcal{O}_F$.
6. Folgern Sie

$$\left(\frac{x+\sqrt{-7}}{2}\right)\left(\frac{x-\sqrt{-7}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)^N \left(\frac{1-\sqrt{-7}}{2}\right)^N$$

   für $N := n - 2$.
7. Bestimmen Sie die Einheiten $\mathcal{O}_F^\times$ und folgern Sie

$$\frac{x \pm \sqrt{-7}}{2} = \pm\left(\frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}\right)^N$$

   für geeignete Vorzeichen $\pm$.
8. Folgern Sie

$$\pm\sqrt{-7} = \underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\right)}_{\alpha}^N - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{-7}}{2}\right)}_{\beta}^N = \alpha^N - \beta^N.$$

9. Zeigen Sie, dass die Gleichung aus (8) nur für das negative Vorzeichen überhaupt eine Lösung besitzen kann. Betrachten Sie dazu zunächst den Ausdruck
$$(\alpha+\beta)^2$$
"von jedem Blickwinkel" (z.B. faktorisieren Sie 2 wie in Aufgabenteil 5) und folgern Sie, dass in dem Quotientenring $\mathcal{O}_F/(\beta^2)$ die Identität $\alpha^2 \equiv 1$ gilt. Betrachten Sie nun die Gleichung
$$\alpha-\beta=\alpha^N-\beta^N$$
in $\mathcal{O}_F/(\beta^2)$ und nutzen Sie, dass N ungerade ist.

10. Wenden Sie die Binomialformel auf den Ausdruck in (8) an und folgern Sie, dass
$$-2^{N-1}=\binom{N}{1}-\binom{N}{3}7+\cdots\pm\binom{N}{N}7^{\frac{1}{2}(N-1)}.$$

11. Betrachten Sie diese Gleichung modulo 7. Berechnen Sie 2^6 und $7\cdot 9$. Folgern Sie, dass $N\equiv 3,5,13$ modulo 42. Auch wenn das Problem damit nicht gelöst ist, ist damit eine sehr starke Einschränkung an die möglichen verbleibenden n bewiesen.

12. (Nicht unbedingt empfehlenswerte, knifflige und arbeitsintensive Bonusaufgabe; +5 Punkte) Folgern Sie mit einer präziseren Analyse der Binomialkoeffizienten, dass $N=3$ oder $N=5$ oder $N=13$. Damit können alle Lösungen bestimmt werden.