Das kannst du schon

- Das Geo-Dreieck zum Zeichnen und Messen von Strecken und Winkeln nutzen
- Figuren zeichnen und an Achsen und Punkten spiegeln
- Symmetrische Figuren erkennen

Dreiecke suchen Winkel, Kreise brauchen Abstand . . .

Die zwei Parallelen

Es gingen zwei Parallelen
ins Endlose hinaus,
zwei kerzengerade Seelen
und aus solidem Haus.

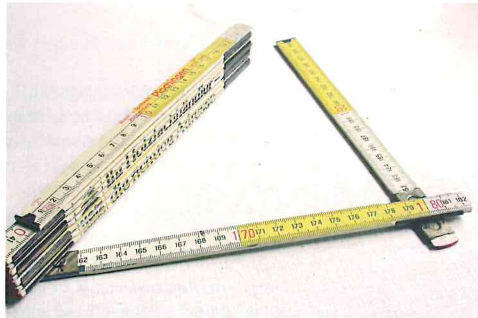
Sie wollten sich nicht schneiden
bis in ihr seliges Grab:
das war nun einmal der beiden
geheimer Stolz und Stab.

Doch als sie zehn Lichtjahre
gewandert neben sich hin,
da ward's dem einsamen Paare
nicht irdisch mehr zu Sinn.

War'n sie noch Parallelen?
Sie wußten's selber nicht,
sie flossen nur wie zwei Seelen
zusammen durch ewiges Licht.

Das ewige Licht durchdrang sie,
da wurden sie eins in ihm;
die Ewigkeit verschlang sie,
als wie zwei Seraphim.

Christian Morgenstern



Wenn man einen aufgeklappten Meterstab zufällig an zwei Stellen knickt, kann man ihn manchmal zu einem Dreieck legen. Dabei gibt es aber immer nur besondere Dreiecke.

Das kannst du bald

- Abstände mit Loten bestimmen
- Eigenschaften von Dreiecken erkennen und nutzen
- Konstruktionen ausführen und beschreiben
- Eigenschaften von Figuren begründen
- Probleme des Alltags mit geometrischen Konstruktionen lösen

1 Abstände

Beim Boule-Spiel und beim „Schnippen an die Wand" müssen Abstände bestimmt werden, um den Sieger zu ermitteln.

In den folgenden Abbildungen werden Abstände verwendet.

Abstand Punkt–Punkt (Fig. 1):
Die Strecke $\overline{AB}$ ist 3 cm lang. Man sagt, die Punkte A und B haben den Abstand 3 cm.

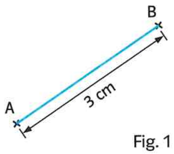


Fig. 1

Abstand Punkt–Gerade (Fig. 2):
Die Strecke $\overline{PQ}$ ist senkrecht zur Geraden g. Von allen Punkten auf g hat der Punkt Q zum Punkt P den kleinsten Abstand. Man nennt ihn **Abstand von P zu g**. Die zugehörige Strecke $\overline{PQ}$ heißt **Lot von P auf g**.

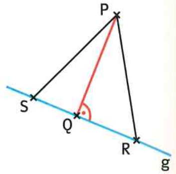


Fig. 2

Abstand paralleler Geraden (Fig. 3):
Die Geraden g und h sind parallel. Deshalb haben alle Punkte auf g den gleichen Abstand zu h und alle Punkte auf h den gleichen Abstand zu g. Diesen Abstand nennt man den Abstand von g zu h.

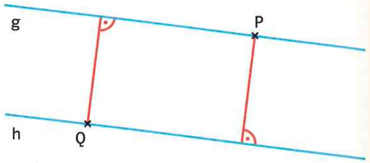


Fig. 3

Der **Abstand eines Punktes zu einer Geraden** ist die Länge seines Lotes.
Der **Abstand paralleler Geraden** ist der Abstand eines Punktes auf einer Geraden zur anderen Geraden.

Den Flächeninhalt eines Dreiecks (Fig. 4) oder eines Parallelogramms (Fig. 5) kann man jeweils mithilfe der Grundseite und der zugehörigen Höhe berechnen. Jedes Dreieck hat drei Höhen. Das Lot vom Eckpunkt eines Dreiecks zur Geraden durch die beiden anderen Punkte ist eine Höhe im Dreieck. Jedes Parallelogramm hat zwei Höhen. Der Abstand der beiden parallelen Geraden durch zwei gegenüberliegende Seiten ist eine Höhe im Parallelogramm.

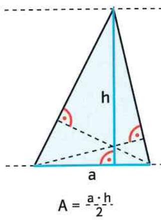


Fig. 4

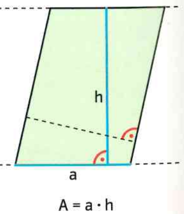


Fig. 5

Beispiel
a) Zeichne ein Rechteck ABCD mit $\overline{AB} = 2{,}5\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 3\,\text{cm}$. Miss die Länge einer Diagonalen und den Abstand des Punktes B zur Geraden g durch die Punkte A und C.
b) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABC auf zwei Arten. Warum kann es dabei unterschiedliche Ergebnisse geben?
Lösung:
a) Eine Diagonale ist 3,9 cm lang. B hat zu g den Abstand $\overline{BE} = 1{,}9\,\text{cm}$.
b) Mit der Höhe $\overline{BC}$ von C zu $\overline{AB}$ gilt $A = (2{,}5 \cdot 3) : 2 = 3{,}75\ (\text{cm}^2)$.
Mit der Höhe $\overline{BE}$ von B zu $\overline{AC}$ gilt $A = (3{,}9 \cdot 1{,}9) : 2 = 3{,}7\ (\text{cm}^2)$.
Die Messung der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BE}$ ist ungenau. Das erste Ergebnis ist genau.

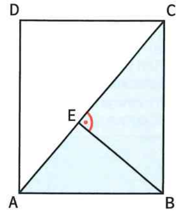


Fig. 1

Aufgaben

1 a) Miss die Abstände der Punkte A(1|1); B(4|5); C(−1|8) im Koordinatensystem.
b) Zeichne eine Gerade durch die Punkte A und B und dazu eine parallele Gerade, die durch den Punkt C geht. Bestimme den Abstand der beiden Geraden mit einem Lot.
c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

In Aufgabe 1c) kannst du den Flächeninhalt auf mehrere Arten berechnen. Warum müssen dabei die Ergebnisse nicht genau übereinstimmen?

2 Zeichne ein Rechteck ABCD mit den Seitenlängen $\overline{AB} = 9{,}6\,\text{cm}$ und $\overline{BC} = 5{,}7\,\text{cm}$.
a) Bestimme den Abstand des Punktes B zur Geraden AC.
b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC auf zwei Arten.

3 Zeichne das Dreieck in einem Koordinatensystem. Ergänze das Dreieck zu einem Parallelogramm ABCD. Bestimme den Flächeninhalt des Parallelogramms.
a) A(−3|−2); B(4|−2); D(0|4) b) A(4|−3); B(4|2); C(−2|4)

Tipp zu Aufgabe 3: Nutze das Koordinatensystem. Man kann einige Abstände angeben ohne zu messen.

4 a) Übertrage die Figuren in Fig. 2 mit den gegebenen Maßen unter Verwendung der Gitterlinien in dein Heft. Bestimme den Flächeninhalt der Figuren mit möglichst wenig Rechnungen.
b) Eine Strecke $\overline{AB}$ ist 6 cm lang. Zeichnet drei verschiedene Dreiecke mit der Seite $\overline{AB}$ und dem Flächeninhalt 18 cm².

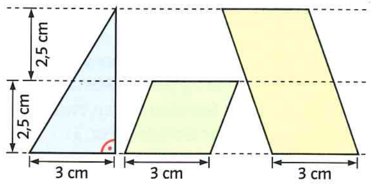


Fig. 2

5 a) Begründe: Zu einem Parallelogramm kann man ohne zu messen ein Rechteck mit einer gemeinsamen Seite und dem gleichen Flächeninhalt zeichnen.
b) Zeichne einen 43° großen Winkel α mit dem Scheitel A. Bestimme auf den Schenkeln von α die Punkte B und C so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC 12 cm² groß ist.

Die Aufgabe 5 a) hat genau eine Lösung. Die Aufgabe 5 b) hat viele Lösungen.

Kannst du das noch?

6 Ein Fußballplatz hat bisher eine 45 m breite und 86 m lange Rasenfläche. Das Spielfeld wird an allen Seiten um 5 m verbreitert. Für die Zuschauer soll rundum ein 10 m breiter Streifen angelegt werden. Zeichne in einem geeigneten Maßstab.
a) Wie lang sind die Diagonalen des bisherigen Spielfeldes und des neuen Spielfeldes?
b) Um wie viel Prozent ist das neue Spielfeld größer als das alte Spielfeld?
c) Wie groß ist der Flächenanteil des Zuschauerbereichs an der Gesamtfläche?

2 Abstände von Punkten und Geraden – Ortslinien

Wo liegen alle Punkte, die von einem gegebenen Punkt den gleichen Abstand haben? Wo liegen alle Punkte, die von einer gegebenen Geraden den gleichen Abstand haben?
Solche und ähnliche Fragen werden in dieser Lerneinheit behandelt.

Gleicher Abstand von einem Punkt
Alle Punkte mit dem gleichen Abstand von einem gegebenen Punkt bilden einen Kreis.

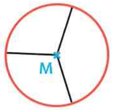


Fig. 1

Die Mittelsenkrechte einer Strecke $\overline{AB}$ ist Symmetrieachse dieser Strecke.

Gleiche Abstände von zwei Punkten
Alle Punkte mit gleichem Abstand von zwei gegebenen Punkten A und B liegen auf einer Gerade m. Die Gerade m ist senkrecht zur Strecke $\overline{AB}$ und geht durch die Mitte von $\overline{AB}$. Deshalb heißt m **Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$** (Fig. 2).

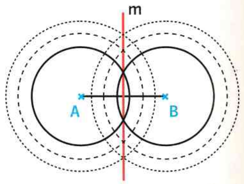


Fig. 2

Gleicher Abstand von einer Geraden
Alle Punkte mit dem gleichen Abstand von einer gegebenen Geraden bilden zwei Parallelen zu dieser Geraden (Fig. 3).

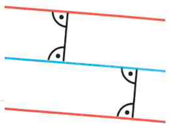


Fig. 3

Die Mittelparallele zweier paralleler Geraden ist eine Symmetrieachse der beiden Parallelen.

Gleicher Abstand von zwei Parallelen
Alle Punkte mit dem gleichen Abstand von zwei gegebenen Parallelen g und h bilden eine dritte Parallele m. Diese liegt in der Mitte der beiden gegebenen Parallelen. Deshalb heißt sie **Mittelparallele** (Fig. 4).

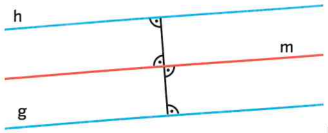


Fig. 4

Die Winkelhalbierende eines Winkels ist eine Symmetrieachse dieses Winkels.

Gleiche Abstände von zwei sich schneidenden Geraden
Alle Punkte mit gleichem Abstand von zwei sich schneidenden Geraden g und h bilden zwei Geraden w_1 und w_2. Die Geraden w_1 und w_2 halbieren die Winkel α und β zwischen den Geraden g und h. Deshalb heißen w_1 und w_2 **Winkelhalbierende von α bzw. von β** (Fig. 5).

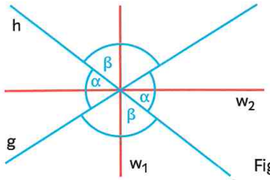


Fig. 5

Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist die Ortslinie der Punkte, die von den Endpunkten der Strecke gleichen Abstand haben.
Die Winkelhalbierende eines Winkels ist die Ortslinie der Punkte, die von den Schenkeln des Winkels gleichen Abstand haben.

Wenn man die Punkte einer Figur – wie z.B. bei einer Mittelsenkrechten oder Winkelhalbierenden – durch eine Eigenschaft bestimmen kann, nennt man die Figur auch zugehörige ***Ortslinie****.*

Beispiel 1
Zeichne in einem Koordinatensystem die Punkte A(4|0), B(3,5|2) und C(1,5|1). Bestimme alle Punkte, die gleich weit von A und B entfernt sind und von C den Abstand 1,5 cm besitzen.
Lösung:
Zeichnung s. Fig. 1. Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind, liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$. Punkte, die 1,5 cm vom Punkt C entfernt sind, liegen auf dem Kreis um C mit dem Radius 1,5 cm. Die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Mittelsenkrechten mit dem Kreis lösen die Aufgabe. Abgelesene Koordinaten sind $S_1(0,3|0,1)$ und $S_2(3|0,8)$.

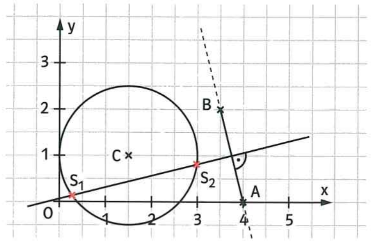


Fig. 1

Beispiel 2
In Fig. 2 sind zwei Geraden g und h gezeichnet, die sich unter einem Winkel von 40° schneiden. Dann sind zu g zwei Parallelen im Abstand 1 cm gezeichnet. Zuletzt sind noch die Winkelhalbierenden der Geraden g und h gezeichnet.
Formuliere eine Aufgabe, deren Lösung die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Parallelen sind.
Lösung:
Gegeben sind zwei Geraden g und h mit einem Schnittwinkel von 40°. Gesucht sind alle Punkte, die 1 cm von g und gleich weit von h entfernt sind.

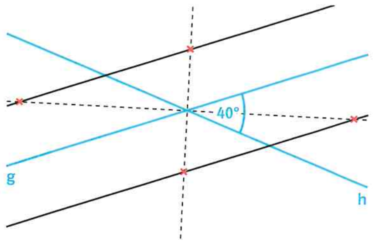


Fig. 2

Aufgaben

1 Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$ = 6 cm, einen Kreis um A mit dem Radius 4 cm und einen Kreis um B mit dem Radius 3 cm.
a) Wie groß ist der Abstand der beiden Schnittpunkte der Kreise zu den Punkten A und B?
b) Welchen Abstand haben die beiden Schnittpunkte zueinander?
c) Beschrifte alle Kreispunkte, die auf der Geraden durch die beiden Mittelpunkte der Kreise liegen und schreibe ihre gegenseitigen Abstände auf.
d) Gibt es auf den beiden Kreisen zwei Punkte mit einem größtmöglichen Abstand?

2 Zeichne die Punkte A(0|−6), B(6|−3), C(5|−1) und D(−1|0) in einem Koordinatensystem.
a) Bestimme alle Punkte, die gleichweit von A und B entfernt sind und von der Geraden durch C und D den Abstand 3 cm haben. Beschrifte die Punkte und schreibe ihre Koordinaten auf.
b) Welche Punkte haben jeweils den gleichen Abstand zu den beiden Geraden AB und CD und sind vom Schnittpunkt der Geraden 3 cm entfernt? Gib die Koordinaten der Punkte an.

3 Hier ist mehr als ein Punkt möglich

Gegeben sind die Punkte A(1|2); B(8|1) und C(6|5). Zeichne für jede Teilaufgabe ein neues Koordinatensystem.

a) Welche Abstände haben die Punkte von A, welche 4 cm von B und 3 cm von C entfernt sind?

b) Gib die Koordinaten derjenigen Punkte an, die von A und C gleich weit entfernt sind und von B den Abstand 4 cm haben.

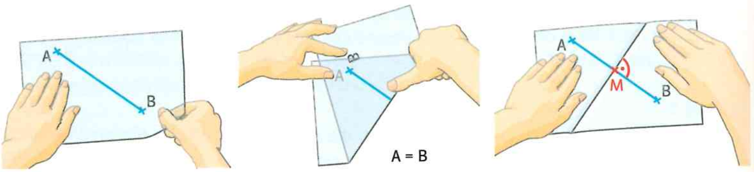
Hinweis: In Teil c) gibt es insgesamt vier Punkte.

c) Bestimme die Koordinaten aller Punkte, welche von der Geraden durch A und B den Abstand 2 cm haben und von der Geraden durch B und C den Abstand 1 cm.

d) Wo liegen alle Punkte, welche von den beiden Geraden durch die Punkte A und B sowie durch B und C jeweils den gleichen Abstand haben?

Wenn man kein durchscheinendes Papier hat, kann man auch die Zirkelspitze oder eine Stecknadel dazu benutzen, einzelne Punkte duchzustechen. Überlege, wie man dabei vorgeht.

4 a) Die nachfolgend gezeigte Bildserie beschreibt, wie man mit einem durchscheinenden Papierbogen zu einer gezeichneten Strecke eine Mittelsenkrechte falten kann. Falte nach der Anleitung. Begründe, warum dabei die gewünschte Mittelsenkrechte entsteht.



b) Zeige, dass man mit durchscheinenden Papierbögen auch Parallelen zu Geraden, eine Mittelparallele und eine Winkelhalbierende falten kann. Gib jeweils eine Begründung.

Bist du sicher?

1 Die Abbildung zeigt eine Figur, bei der die Punkte der gestrichelten Linie(n) eine Ortslinie sind. Schreibe die zugehörige Eigenschaft auf und begründe deine Antwort.

a) b) c) d)

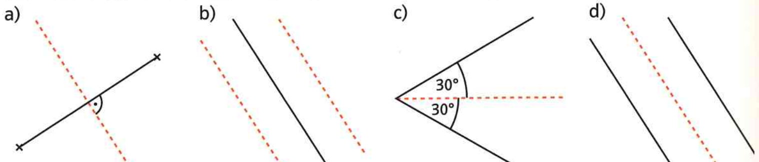
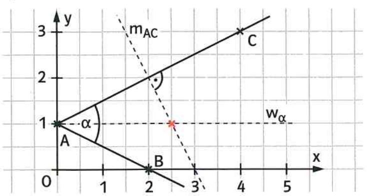


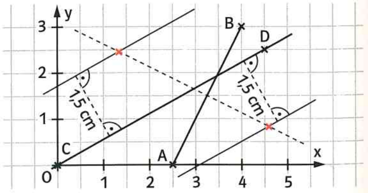
Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

2 Die folgenden Abbildungen zeigen Situationen, die zu einer Aufgabe über Abstände gehören. Formuliere eine passende Aufgabe.

a)



b)



5 Begründe den Lösungsweg

a) Zeichne eine 5 cm lange Strecke $\overline{AB}$. Zeichne einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 4 cm, der durch die Punkte A und B geht. Wie kann man diejenigen Punkte des Kreises zeichnen, die von M und A gleich weit entfernt sind?

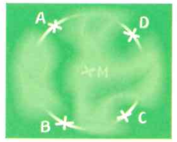
b) Zeichne eine Gerade g und zwei Punkte P und Q auf verschiedenen Seiten von g. Zeichne einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf g liegt, der durch P und Q geht. Prüfe, ob deine Lösung auch dann richtig ist, wenn P und Q auf einer Seite der Geraden g liegen.

c) Zeichne zwei Geraden g und h so, dass bei ihrem Schnittpunkt S ein Winkel von 40° entsteht. Bestimme einen Punkt P auf g, der 5 cm von S entfernt ist. Konstruiere alle Punkte, die gleich weit von S und P entfernt sind und zu den Geraden g und h jeweils den gleichen Abstand haben.

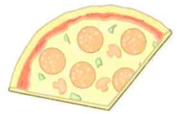
6 Wer hat Recht?

a) Irma behauptet: „Wenn jemand an der Tafel einen Kreis zeichnet, vier Punkte auf dem Kreis beschriftet und danach bis auf die vier Punkte alles wegwischt, dann kann ich den Mittelpunkt wieder finden und den Kreis mit dem Zirkel neu zeichnen."

b) Peter behauptet: „Mir genügen schon drei Punkte auf dem Kreis."



7 Fabian und Florian wollen beschreiben, wie das übrig gebliebene Pizzastück möglichst gerecht zu teilen ist. Florian schlägt vor, eine Winkelhalbierende zu verwenden. Fabian glaubt, dass eine Mittelsenkrechte besser ist. Welcher Idee schließt du dich an? Beschreibe dein Verfahren und wende es an einer Zeichnung an.



Probleme lösen mit Zeichnungen

8 Peter, Paul und Petra wohnen im gleichen Dorf. Die Wohnungen von Peter und Paul liegen in 500 Meter Entfernung voneinander an der gerade verlaufenden Hauptstraße. Petra sieht von ihrem Zimmer aus die Wohnung von Paul in 300 Meter Entfernung und die Wohnung von Peter in 400 Meter Entfernung. Wie weit ist Petras Zimmer von der Hauptstraße entfernt? Zeichne im geeigneten Maßstab.

9 In einer Stadt gibt es mehrere Schulen. Damit die Schüler einen möglichst kurzen Schulweg haben, ist die Stadt in einzelne Schuleinzugsgebiete eingeteilt. Die Grenzen zwischen den Schuleinzugsgebieten können in einem Stadtplan eingezeichnet werden.

a) Begründe in dem Plan in Fig. 1, warum die rote Grenze das Schuleinzugsgebiet von Schule 1 festlegt.

b) In Fig. 2 ist ein unvollständiger Schuleinzugsplan abgebildet. Übertrage in dein Heft. Vervollständige den Plan mithilfe eines Geodreiecks.

c) Besorgt euch den Schuleinzugsplan einer Gemeinde mit mehreren Schulen und überprüft, ob bei der Einteilung solche geometrischen Überlegungen gemacht wurden.

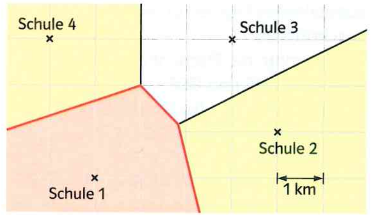


Fig. 1

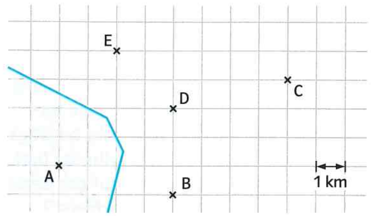


Fig. 2

Muster erzeugen und erklären

10 Erkläre, wie die beiden Muster entstanden sind. Zeichne je ein entsprechendes Muster in dein Heft.
a)

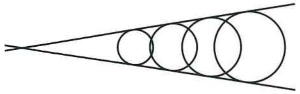


Fig. 1

b)

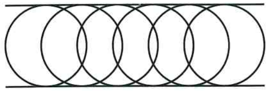


Fig. 2

a)
b)
c)

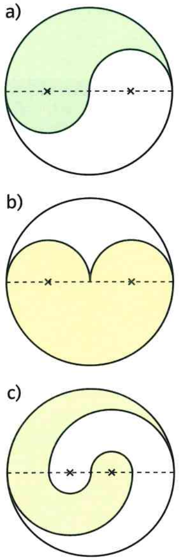


Fig. 3

11 Die verkleinerten „Kreisfiguren" am Rand haben im Original einen äußeren Kreis mit dem Radius 8 cm. Zeichne die Figuren möglichst genau in dein Heft. Schreibe in kurzen Sätzen auf, wie du dabei vorgehst.

12 Welche geometrischen Figuren und Linien kannst du bei der abgebildeten Lampe erkennen? Beschreibe ihre Funktion für die Lampe. Welche Figuren verändern sich, wenn man die Lampe „auszieht" bzw. „einfährt"?

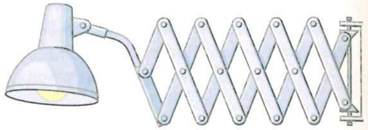


Fig. 4

Parallelen mit gleichen Abständen

13 Fertige eine Zeichnung an und begründe die Antwort auf die Frage.
a) Miriam behauptet: „Eine Mittelparallele zu zwei parallelen Geraden g und h halbiert jede Verbindungsstrecke zwischen den Geraden g und h." Denkt sie richtig?
b) Jörg sagt: „Wenn drei Geraden so liegen, dass nebeneinander liegende Geraden jeweils parallel sind und den selben Abstand haben, dann schneiden die drei Geraden aus jeder quer dazu verlaufenden Geraden gleich lange Strecken aus." Hat er Recht?

14 In Fig. 5 sind die gezeichneten Geraden zueinander parallel. Zeichne die abgebildeten Figuren in dein Heft und beschrifte sie.
a) Bestimme die Flächeninhalte der Dreiecke ABC, ABE und BCE.
b) Begründe, dass die Strecke $\overline{ED}$ halb so lang ist wie die Strecke $\overline{AB}$.

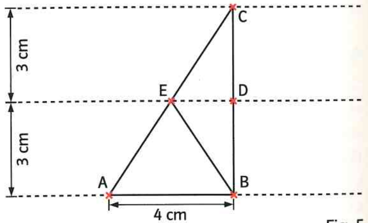


Fig. 5

15 In Fig. 6 sind nebeneinander liegende Geraden parallel mit gleichem Abstand.
a) Zeichne die Figur mit selbstgewählten Größen in dein Heft. Gib die Anteile der Flächeninhalte der Dreiecke ABE, BDE und EDC im Vergleich zum Dreieck ABC an.
b) Begründe, warum man zur Bestimmung der Anteile in der Teilaufgabe a) die tatsächlichen Größen der Figur nicht benötigt.
c) Ändern sich die Flächeninhalte der Dreiecke, wenn man den Punkt C auf der Geraden g nach links oder rechts „schiebt"?

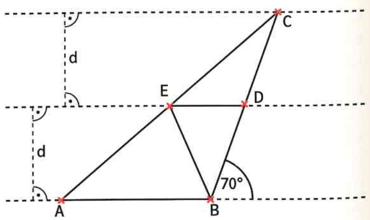
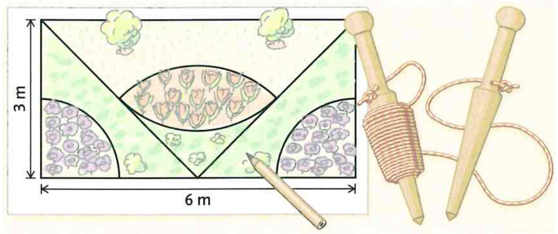


Fig. 6

3 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Theo ist Hobbygärtner. Er hat eine Skizze für die Gestaltung des rechteckigen Beetes in seinem Vorgarten gezeichnet. Bei der Arbeit im Freien will er den Entwurf möglichst genau umsetzen. Dabei verwendet er als einzige Werkzeuge Schnur und Pflöcke.



Viele geometrische Figuren kann man nur mit Zirkel und Lineal zeichnen. Man spricht hierbei von **Konstruktionen mit Zirkel und Lineal**. Aus einer Zeichnung kann man die Reihenfolge der Zeichenschritte einer Konstruktion nicht erkennen. Deshalb schreibt man die Zeichenschritte in einer **Konstruktionsbeschreibung** auf.

Konstruktion der Mittelsenkrechten einer Strecke $\overline{AB}$
Konstruktionsbeschreibung:
1) Zeichne um die Punkte A und B zwei sich schneidende Kreise mit gleichem Radius.
2) Zeichne die Gerade m durch die beiden Schnittpunkte der Kreise.
Die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$ ist die Gerade m.

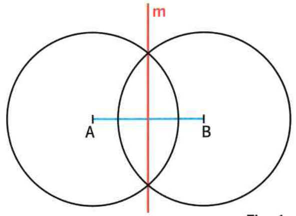


Fig. 1

Da die beiden Kreise den gleichen Radius haben, sind ihre Schnittpunkte gleich weit von A und B entfernt.

Konstruktion der Senkrechten zu einer Geraden g durch einen Punkt P
Konstruktionsbeschreibung:
1) Zeichne um P einen Kreis, der die Gerade g in den Punkten A und B schneidet.
2) Konstruiere die Mittelsenkrechte h der Strecke $\overline{AB}$.
Die Gerade h ist senkrecht zu g und geht durch P. Sie heißt auch **Lotgerade**.

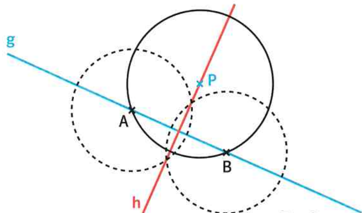


Fig. 2

Der Schritt 2) dieser Konstruktionsbeschreibung kürzt die ausführliche Angabe der Konstruktionsschritte mit Zirkel und Lineal ab.

Konstruktion der Winkelhalbierenden eines Winkels α
Konstruktionsbeschreibung:
1) Zeichne um den Scheitel von α einen Kreis, der die beiden Schenkel in den Punkten A und B schneidet.
2) Konstruiere die Mittelsenkrechte w der Strecke $\overline{AB}$.
Die Winkelhalbierende von α ist die Gerade w.

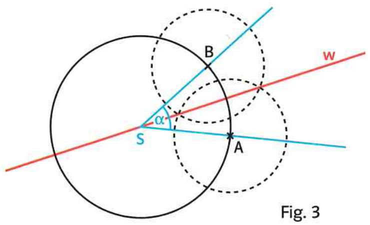


Fig. 3

Mit Zirkel und Lineal können Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende und Lotgerade konstruiert werden.
Eine Konstruktionsbeschreibung gibt die Reihenfolge der Zeichenschritte an.

Beispiel 1 Verdoppeln eines Winkels
Zeichne einen Winkel α der Größe 70°.
Konstruiere einen Winkel der Größe 140°.
Beschreibe die Konstruktion.
Lösung:
Konstruktionsbeschreibung:
1. Zeichne einen Winkel α der Größe 70° mit dem Scheitel S.
2. Zeichne um S einen Kreis k, der die Schenkel von α in A und B schneidet.
3. Der Kreis um B mit Radius $\overline{BA}$ schneidet den Kreis k in A und D. Der Winkel $\beta = \sphericalangle ASD$ ist doppelt so groß wie α.

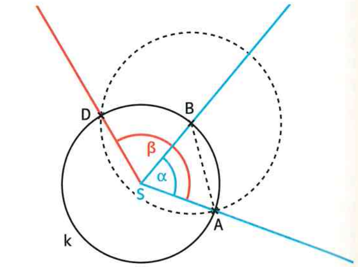


Fig. 1

Beispiel 2 Konstruktion eines Dreiecks
Konstruiere ein Dreieck ABC mit
$\overline{AB} = 5\,cm$; $\alpha = 30°$ und $\overline{BC} = 3\,cm$.
Lösung:
1. Zeichne die Strecke $\overline{AB}$.
2. Zeichne den Winkel α in A an $\overline{AB}$.
3. Der Kreis um B mit Radius 3 cm schneidet α in den Punkten C und D.
Als Lösung kann das Dreieck ABC oder das Dreieck ABD genommen werden.

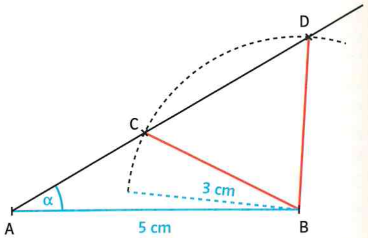


Fig. 2

Aufgaben

Verwende nur Zirkel und Lineal – Begründe deine Lösung

1 a) Halbiere eine Strecke der Länge 11,7 cm.
b) Teile eine Strecke der Länge 17 cm in vier gleichlange Teilstrecken.

2 a) Zeichne eine Gerade g. Konstruiere die beiden Parallelen zu g im Abstand 2 cm.
b) Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$ der Länge 6 cm. Konstruiere die Mittelpunkte zweier Kreise mit dem gleichen Radius 4 cm, die durch die Punkte A und B gehen.

3 a) Zeichne einen Winkel α der Größe 57°. Konstruiere einen Winkel β der Größe 114°.
b) Zeichne einen Winkel der Größe 110°. Konstruiere einen Winkel γ der Größe 27,5°.
c) Wie kann man ohne Winkelmesser einen Winkel von 45° konstruieren?

4 Zeichne das Dreieck ABC mit $A(-2|-2)$; $B(4|0)$ und $C(4|4)$. Konstruiere die Mittelpunkte der drei Seiten. Prüfe, ob die jeweiligen Verbindungsstrecken der Eckpunkte zu den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seite auch Winkelhalbierende sind.

5 Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P der auf g liegt. Wie geht man vor, um mit Zirkel und Lineal die Lotgerade von P auf g zu zeichnen?

6 Übertrage die Zeichnungen gemäß der Skizze in Fig. 1 ins Heft. Bestimme die Abstände des Schnittpunkts der beiden Winkelhalbierenden der Winkel α und β zu P und g.

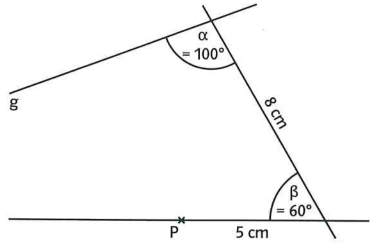


Fig. 1

Bist du sicher?

1 Die Abbildungen zeigen unvollständige Konstruktionen von Grundaufgaben, bei denen die Kreise nur angedeutet sind. Welche Aufgabe ist dargestellt? Erstelle eine ausführliche Zeichnung mit einer Konstruktionsbeschreibung.

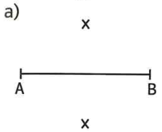
a)


Fig. 2

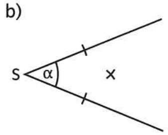
b)


Fig. 3

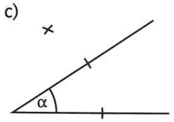
c)


Fig. 4

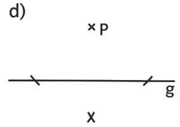
d)


Fig. 5

2 Zeichne den Winkel $\alpha = 70°$ und die Strecke $\overline{AB} = 10\,cm$.
Konstruiere mit Zirkel und Lineal (und gib eine ausführliche Konstruktionsbeschreibung)
a) den Winkel $\beta = 35°$
b) die Strecke $\overline{AM} = 5\,cm$
c) den Winkel $\gamma = 280°$
d) die Strecke $\overline{BE} = 7{,}5\,cm$

7 Die Punkte $A(-2|-1)$; $B(5|1)$ und $C(8|6)$ bilden ein Dreieck.
Konstruiere die Höhen im Dreieck. Bestimme durch Messen die Längen der Seiten und der zugehörigen Höhen. Berechne damit den Flächeninhalt des Dreiecks auf drei Arten.

8 Die siebten Klassen haben für ihren Stand zum Schulfest einen Eckplatz im Schulhof erhalten. Nach dem nebenstehenden Entwurf soll die Bodenfläche farbig gestaltet werden. Der Entwurf soll direkt auf dem Schulhof gezeichnet werden.
a) Schreibt auf, wie man dabei vorgeht.
b) Erstellt zusammen ein eigenes großes Muster und übertragt es im Freien.

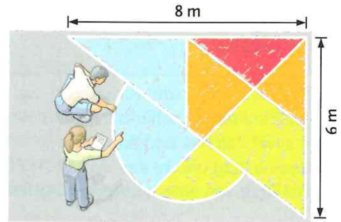


Fig. 6

9 Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 10\,cm$ und $b = 6\,cm$. Prüfe die Aussage mithilfe von Grundkonstruktionen.
a) Die Winkelhalbierenden im Rechteck stimmen mit den Diagonalen überein.
b) Der Lotfußpunkt eines Eckpunkts auf eine Diagonale trifft den Schnittpunkt der beiden Diagonalen.
c) Der Abstand eines Eckpunkts zu einer Diagonalen ist etwa halb so groß wie eine Rechteckseite.

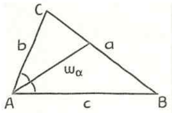
Welche der Aussagen von Aufgabe 9 sind richtig, wenn die Figur ein Quadrat ist?

*Eine **Planfigur** ist eine Skizze, in der man die gegebenen Größen färbt. An einer Planfigur kann man die Schritte einer Konstruktion gut planen.*

10 Zeichne ein Quadrat mit 10 cm Seitenlänge. Bearbeite jede Teilaufgabe mit einer eigenen Zeichnung.
a) Bestimme alle Punkte des Quadrates, die zum Diagonalenschnittpunkt den Abstand 6 cm haben. Miss die Abstände dieser Punkte zu den Diagonalen mithilfe von Loten.
b) Konstruiere alle Punkte im Inneren des Quadrates, die vom Diagonalenschnittpunkt und von mindestens einer Quadratseite den gleichen Abstand 4 cm haben.
c) Auf einem Kreis um den Diagonalenschnittpunkt sollen genau vier Punkte so liegen, dass ihr Abstand zu einer Quadratseite genau das Doppelte der Radienlänge beträgt.

11 Erstelle eine Planfigur. Gibt es ein Dreieck mit den gegebenen Größen? Wenn ja, gib eine Konstruktion mit einer Konstruktionsbeschreibung an. Falls nein, begründe.
a) $a = 4{,}5\,cm$; $b = 5\,cm$; $c = 3\,cm$
b) $\overline{AB} = 7\,cm$; $\overline{BC} = 4\,cm$; $\overline{AC} = 2{,}5\,cm$
c) $\alpha = 27°$; $a = 5\,cm$; $b = 3\,cm$
d) $\alpha = 54°$; $b = 5\,cm$; $a = 2\,cm$
e) $\alpha = 37°$; $\beta = 45°$; $c = 6\,cm$
f) $\overline{AB} = 8\,cm$; $\overline{BC} = 3\,cm$; $\alpha = 30°$

In einem Dreieck ABC kann man die Seiten wie abgebildet auch mit kleinen Buchstaben bezeichnen.



12 Konstruiere das Dreieck ABC aus einer Seite, einem Winkel und der Länge einer Winkelhalbierenden. Erstelle zuerst eine Planfigur wie nebenstehend beschrieben.
a) $c = 6\,cm$; $\alpha = 70°$; $w_\alpha = 5\,cm$
b) $a = 7\,cm$; $\beta = 50°$; $w_\beta = 4{,}5\,cm$
c) $c = 4\,cm$, $\alpha = 110°$; $w_\beta = 5\,cm$
d) $a = 6\,cm$; $\gamma = 82°$; $w_\gamma = 7\,cm$

13 Gut gedacht?
a) Alex vermutet: „Wenn ich im Dreieck an einer Ecke den Winkel halbiere, teilt die Winkelhalbierende auch die gegenüberliegende Seite zu gleichen Teilen. Was meinst du dazu?
b) Schreibe eine entsprechende Aussage für ein Quadrat. Ist sie richtig? Begründe.

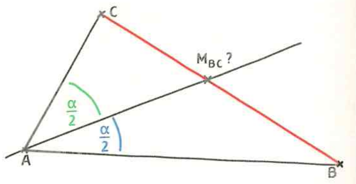


Fig. 1

14 Besondere Kreise
Zeichne eine Gerade g und zwei Punkte P und Q, die nicht auf g liegen.
a) Gibt es einen Kreis mit dem Mittelpunkt auf g, der durch die Punkte P und Q geht?
b) Ist deine Konstruktion falsch, wenn P auf g liegt oder P und Q auf g liegen?

Punkte in Gebieten

15 a) Welche Punkte sind von $A(1|2)$ weiter entfernt als von $B(3|8)$? Zeichne und färbe.
b) Gibt es Punkte, die näher bei $P(4|1)$ liegen als bei $Q(6|2)$ und mindestens 2 cm von Q entfernt sind? Zeichne und färbe.
c) Zeichne nach a) und b) das Viereck ABPQ. Welche Punkte der Vierecksfläche sind höchstens 2 cm von einem Eckpunkt entfernt? Zeichne und färbe.

16 Die nebenstehende „Zweikreisfigur" teilt die Ebene in vier Gebiete ein, deren Punkte man durch die Abstände zu den Mittelpunkten beschreiben kann. Die Punkte im dunkelblauen Gebiet sind z. B. mehr als 2 cm von A und höchstens 1,5 cm von B entfernt. Beschreibe ebenso die Lage der Punkte in den anderen Gebieten.

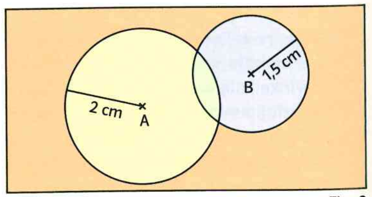
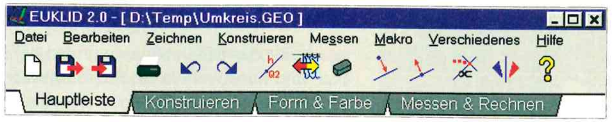


Fig. 2

Info

Verwendung eines Geometrieprogramms



Als Beispiel für ein Geometrieprogrammm ist hier ein Ausschnitt von DynaGeo angezeigt.

Mit einem Geometrieprogramm können Konstruktionen am Computer durchgeführt und Strecken und Winkel gemessen werden. Gegenüber einer Handzeichnung hat man dabei den Vorteil, dass man die Anordnung der Punkte nachträglich verändern kann. Dazu muss man die Planung der Zeichnung gewissenhaft vornehmen.

Wie bei einem Textprogramm gibt es eine Menüleiste, mit der häufig vorkommende Anweisungen mit der Maus ausgeführt werden können.

Werden zum Beispiel die folgenden Aufträge mit einem Geometrieprogramm ausgeführt, entsteht eine Zeichnung wie in Fig. 1.

1. Zeichne ein Dreieck aus drei Punkten.
2. Beschrifte die Ecken mit A, B und C.
3. Zeichne die Kreise um A und B durch C.
4. Zeichne die Gerade durch A und B.
5. Beschrifte sie mit g.
6. Zeichne die Lotgerade von C zu g.

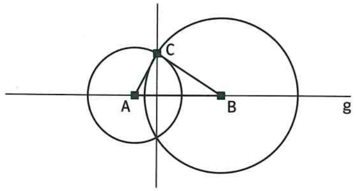


Fig. 1

Punkte und Linien können beschriftet werden.

Nun kann z. B. die Lage des Punktes C verändert werden. Die beiden nachfolgenden Zeichnungen sind so aus Fig. 1 entstanden. Sie zeigen spezielle Lagen des Punktes C.

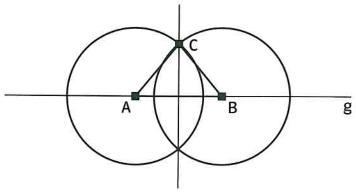


Fig. 2

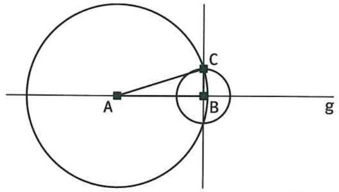


Fig. 3

Zur Übersichtlichkeit kann man einzelne Punkte und Linien auch verbergen.

17 Geo Zeichne das Dreieck ABC mit den gegebenen Größen. Beschrifte die Figur.
a) $c = 6\,cm$; $a = 4\,cm$; $\alpha = 37°$
b) $\overline{AB} = 6\,cm$; $w_\alpha = 4\,cm$; $\alpha = 50°$

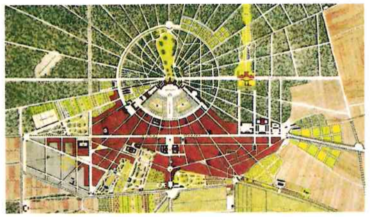
Die Aufgaben 17 bis 19 sind Übungen zum Kennenlernen eines Geometrieprogramms.

18 Geo a) Konstruiere ein Rechteck mit den Seitenlängen $a = 5\,cm$ und $b = 8\,cm$. Konstruiere die Winkelhalbierenden.
b) Konstruiere ein Quadrat, dessen Seitenlänge verändert werden kann.

19 Geo Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$ der Länge 8 cm. Zeichne zwei Punkte P und Q mit den Kreisen um A mit Radius $\overline{AP}$ und um B mit Radius $\overline{BQ}$. Bestimme die Streckenlängen $\overline{AP}$ und $\overline{BQ}$. Verändere die Lage der Punkte P und Q so, dass die beiden Kreise keinen, einen oder zwei Schnittpunkte haben. Schreibe die zugehörigen Streckenlängen $\overline{AB}$, $\overline{AP}$ und $\overline{BQ}$ in einer Tabelle auf. Versuche, möglichst viele Fälle zu beschreiben. Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Schnittpunkte und den drei genannten Streckenlängen?

Das Symbol Geo nach der Aufgabennummer kennzeichnet zukünftig Aufgaben, für deren Bearbeitung ein Geometrieprogramm vorteilhaft ist.

4 Zusammenhänge bei symmetrischen Figuren



Für das Schönheitsempfinden bei Bau- und Kunstwerken spielt die Symmetrie oft eine wesentliche Rolle. Der Ausschnitt eines Plans der Stadt Karlsruhe, der von dem Architekten Friedrich Weinbrenner 1822 erstellt worden ist, zeigt solche Besonderheiten.

Achsensymmetrische Figuren
Sind bei einem Dreieck zwei Seiten gleich lang, dann nennt man diese Seiten **Schenkel** des Dreiecks und das Dreieck **gleichschenkliges Dreieck**. Die Seite $\overline{AB}$ heißt Basis des Dreiecks und die Winkel α und β nennt man Basiswinkel.
Bei einem gleichschenkligen Dreieck ist die Mittelsenkrechte der Basis Symmetrieachse des Dreiecks. Daher gilt:

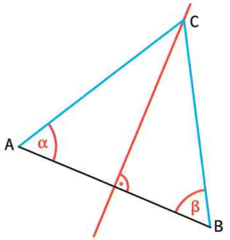


Fig. 1

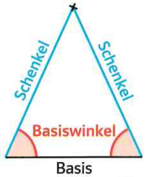


Fig. 2

Basiswinkelsatz
Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann sind die Basiswinkel gleich groß.

Umgekehrt gilt auch: Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich groß sind, dann ist das Dreieck gleichschenklig.

Sind bei einem Dreieck alle drei Seiten gleich lang, dann nennt man das Dreieck **gleichseitiges** Dreieck. Ein gleichseitiges Dreieck hat drei Symmetrieachsen.
In einem gleichseitigen Dreieck sind daher alle drei Winkel gleich groß. Umgekehrt gilt: Wenn in einem Dreieck alle drei Winkel gleich groß sind, dann ist das Dreieck gleichseitig.

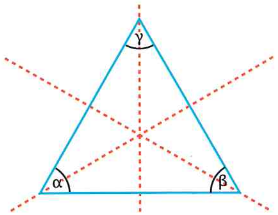


Fig. 3

Punktsymmetrische Figuren
Bei sich schneidenden Geraden nennt man sich gegenüber liegende Winkel **Scheitelwinkel** und nebeneinander liegende Winkel **Nebenwinkel**.
Zwei sich schneidende Geraden bilden eine punktsymmetrische Figur (Fig. 4). Deshalb sind Scheitelwinkel gleich groß. Außerdem beträgt die Summe zweier Nebenwinkel 180°.

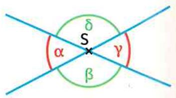


Fig. 4

Werden zwei Parallelen g und h wie in Fig. 1 von einer dritten Geraden k geschnitten, so heißen Winkel, die zueinander liegen wie α und β, **Stufenwinkel**.
Winkel, die zueinander liegen wie α und γ, heißen **Wechselwinkel**.

Die drei Geraden g, h und k in Fig. 1 bilden eine punktsymmetrische Figur mit dem Zentrum M. Deshalb gilt:
Wechselwinkel sind gleich groß. Außerdem sind auch Stufenwinkel gleich groß.

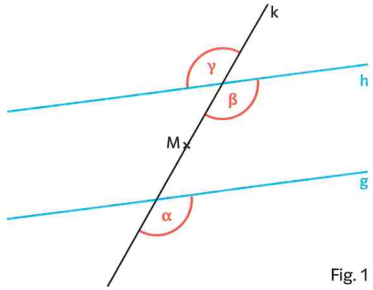


Fig. 1

An parallelen Geraden sind Wechselwinkel und Stufenwinkel jeweils gleich groß.

Umgekehrt gilt auch: Wenn bei den Schnittpunkten der Geraden g und h mit der Geraden k zwei sich entsprechende Stufen- oder Wechselwinkel gleich groß sind, dann sind die Geraden g und h parallel.

Beispiel 1 Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks
Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis 4 cm und dem Basiswinkel 35°.
Lösung:
Konstruktionsbeschreibung:
1. Zeichne die Basis $\overline{AB}$ = 4 cm.
2. Zeichne den Winkel $\alpha = 35°$.
3. Zeichne den Winkel $\beta = 35°$.
4. Bezeichne den Schnittpunkt von α und β mit C.

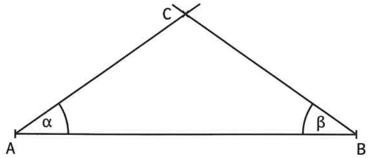


Fig. 3

Planfigur:

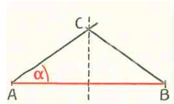


Fig. 2

Wenn man die Symmetrieachse des Dreiecks benutzt, erhält man einen anderen Lösungsweg.

Beispiel 2 Scheitel- und Wechselwinkel erkennen
In Fig. 4 werden zwei zueinander parallele Geraden von einer dritten Geraden geschnitten.
Schreibe alle vorkommenden Paare von Stufen- und Wechselwinkeln mit ihrer Größe auf.
Lösung:
Stufenwinkel: $\alpha_1 = \beta_2 = 70°$;
$\alpha_2 = \beta_3 = 110°$; $\alpha_3 = \beta_4 = 70°$
und $\alpha_4 = \beta_1 = 110°$.
Wechselwinkel: $\alpha_1 = \beta_4 = 70°$;
$\alpha_2 = \beta_1 = 110°$; $\alpha_3 = \beta_2 = 70°$
und $\alpha_4 = \beta_3 = 110°$.

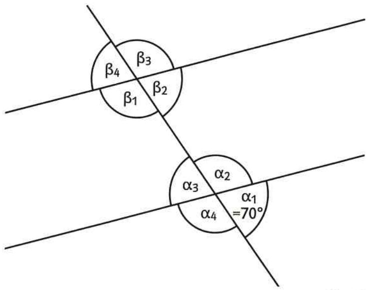


Fig. 4

Aufgaben

1 Zeichne das gleichschenklige Dreieck ABC. Gib die übrigen Größen an.
a) Die Grundseite $\overline{AC}$ ist 6,5 cm lang, ein Schenkel misst 5,2 cm.
b) Der Basiswinkel α misst 35°, die Basis ist 10 cm lang.
c) Ein Schenkel ist 12 cm groß, der Winkel an der Spitze misst 51°.

2 Zeichne zwei verschiedene gleichschenklige Dreiecke mit der gegebenen Eigenschaft.
a) Die Basis ist 7 cm lang. b) Ein Basiswinkel misst 55°.
c) Ein Winkel ist 30° groß d) Zwei Winkel sind gleich groß.

3 Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC nach den Angaben. Bestimme die übrigen Größen durch Messen oder Überlegen. Gibt es verschiedene Lösungen?
a) $\overline{AB} = 5\,cm$; $\alpha = 65°$ b) $\overline{AC} = 4\,cm$; $\gamma = 100°$
c) $\overline{AB} = 6\,cm$; $\overline{BC} = 5\,cm$ d) $\overline{AB} = 7\,cm$; es gilt $\alpha = \beta = \gamma$.

4 Übertrage die Abbildung ins Heft. Gib die Winkelgrößen aller Winkel an.

a)

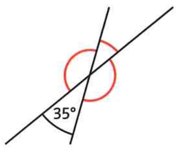


Fig. 1

b)

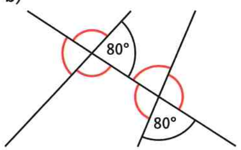


Fig. 2

c)

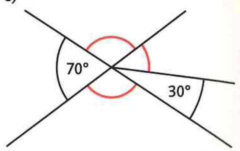


Fig. 3

5 In der Figur ist g || h. Bestimme alle fehlenden Winkelgrößen.

a)

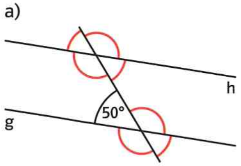


Fig. 4

b)

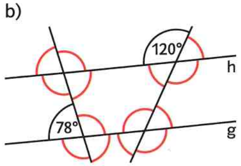


Fig. 5

c)

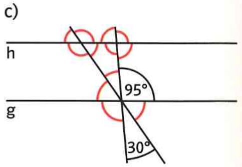


Fig. 6

6 Zeichne, wenn möglich, ein Dreieck mit der geforderten Eigenschaft.
a) Das Dreieck hat zwei gleich lange Seiten mit 3 cm und eine Seite der Länge 8 cm.
b) Das Dreieck hat zwei Winkel der Größe 40° und zwei gleich lange Seiten.
c) Das Dreieck hat zwei gleich lange Seiten und einen rechten Winkel.

7 Die vordere Seite eines Steildachzeltes hat eine Breite von 2 m und eine Höhe von 1,5 m.
a) Zeichne in einem geeigneten Maßstab die Vorderfront. Bestimme alle Winkel und die Längen der Seiten.
b) Gib den Materialbedarf in m^2 für den zugehörigen Zeltstoff an, wenn man 15 % Überschuss zur Fläche hinzurechnet.

8 **Wer hat Recht?**
Marion sagt: „Ich habe ein achsensymmetrisches Dreieck mit drei verschieden großen Winkeln gezeichnet."
Jörg sagt: „Jedes Dreieck mit zwei Symmetrieachsen ist ein gleichseitiges Dreieck."

9 Löse das Problem mit einer Überlegung. Zeichne zur Kontrolle.
a) Zwei sich schneidende Geraden haben gleich große Scheitel- und Nebenwinkel.
b) Ein Winkel ist um 15° größer als sein Nebenwinkel.
c) Der Nebenwinkel eines Winkels α misst den vierten Teil von α.
d) Der Scheitelwinkel eines Winkels misst ein Drittel eines zugehörigen Nebenwinkels.

Bist du sicher?

1 Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis 3 cm und dem Basiswinkel 70°. Beschreibe die Konstruktion. Bestimme diejenigen Punkte auf den Dreieckseiten, die von der Spitze den Abstand 5 cm haben, und diejenigen Punkte, die 2 cm von der Basis entfernt sind.

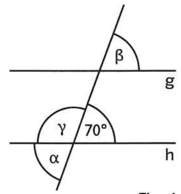


Fig. 1

2 In Fig. 1 ist g parallel zu h. Übertrage die Figur in dein Heft. Die vorkommenden Beziehungen zwischen den Winkeln können mit Gleichungen beschrieben werden.
a) Begründe z. B. die Gleichungen $\alpha = \beta$ und $\alpha = 180° - \gamma$.
b) Beschrifte die übrigen Winkel, stelle weitere Gleichungen auf und begründe diese.
c) Kann man die Größen aller Winkel bestimmen?

3 Übertrage die Abbildung in Fig. 2 ins Heft. Fritz behauptet, dass er zu jedem vorkommenden Winkel die Größe eintragen kann und die Begründung allein mit den Sätzen über Scheitel-, Neben-, Stufen- und Wechselwinkel geben kann. Hat Fritz Recht?

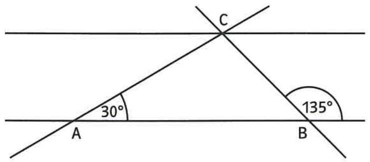


Fig. 2

10 Zeichne die Figur.
a) Entscheide, ob die Geraden g und h in Fig. 3 parallel sind.
Was lässt sich über die Lage der beiden anderen Geraden sagen?
b) Entscheide, ob die Geraden g und h in Fig. 4 parallel sind.

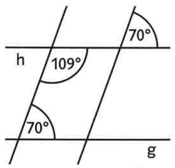


Fig. 3

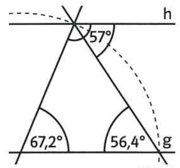


Fig. 4

11 Zeichne und beschrifte Figuren wie in Aufgabe 10 a) und b) und stelle dazu Fragen.
Du kannst auch Fig. 3 und Fig. 4 kombinieren.

12 Ein Angler fischt an einer Kaimauer. Er hält seine Angel im Winkel von 30° zum Weg. Als er einen Biss vermutet, zieht er die Angel um weitere 20° an. Bestimme die Größe des Winkels β vor und nach der Angelbewegung
a) mithilfe einer geeigneten Konstruktion und einer Winkelmessung
b) mithilfe von Gleichungen für die beiden Winkel α und β und zugehörigen Überlegungen.
Tipp: Verwende die Gerade h parallel zur Wasserlinie durch A (bzw. h' durch A').

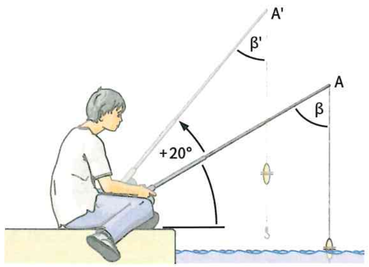
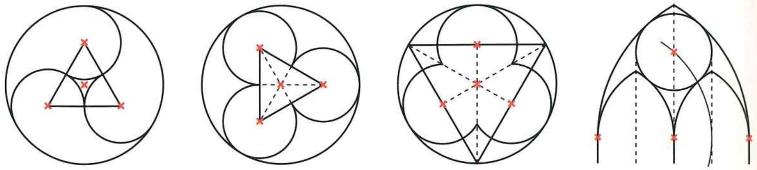
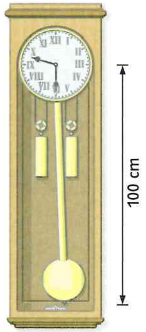


Fig. 5

13 Hier muss man genau lesen
Zeichne zwei sich schneidende Geraden und bezeichne einen Winkel mit α. Welche der folgenden Aussagen ist richtig, welche falsch? Begründe deine Antwort.
a) Die Winkelhalbierende von α halbiert den Scheitelwinkel von α.
b) Die Winkelhalbierenden der beiden Nebenwinkel von α bilden einen Winkel von 90°.
c) Die Winkelhalbierende eines Nebenwinkels zu α bildet mit der Winkelhalbierenden von α einen rechten Winkel.

14 Die Abbildungen stellen Muster dar. Gib eine Konstruktion an und führe sie aus.





15 Geo Das Pendel einer Standuhr ist bis zum Mittelpunkt der Gewichtsscheibe 100 cm lang. Die Gewichtsscheibe hat einen Radius von 5 cm.
a) Wie breit muss der Pendelkasten mindestens sein, damit das Pendel am Aufhängepunkt bis zu 5° ausschlagen kann?
b) Der Pendelkasten ist 30 cm breit. Wie groß kann der Ausschlagwinkel am Aufhängepunkt maximal sein?

16 Geo Ein Gartenbauingenieur soll eine gerade verlaufende Straße zu einer Allee umgestalten. Er muss dabei Folgendes berücksichtigen: Die Straße ist 8 m breit und 150 m lang. Die Bäume sollen 50 cm vom Straßenrand entfernt gepflanzt werden. Jeder Baum beansprucht eine kreisförmige Ausbreitungsfläche mit 5 m Radius. Der Abstand zweier Ausbreitungsflächen soll 1 m betragen. Ein Baum wird 80 € kosten. Die Bäume sollen dicht stehen.
a) Erstelle zu den Bedingungen eine maßstabsgetreue Zeichnung für einen Abschnitt der Straße. Konstruiere die Pflanzpunkte für einige Bäume mit den Ausbreitungsflächen.
b) Wie viele Bäume werden für die Allee etwa benötigt? Wie hoch sind die voraussichtlichen Kosten, wenn die Arbeitszeit für das Pflanzen eines Baumes mit 60 € veranschlagt wird?

Kannst du das noch?

17 Geo Zeichne einen Kreis k mit Mittelpunkt M. Wähle zwei Punkte P und Q auf k.
a) Erstelle einen Graphen der Zuordnung $\alpha = \sphericalangle PMQ \rightarrow$ *Länge der Strecke* $\overline{PQ}$.
b) Beschreibe Besonderheiten, die auftreten, wenn der Punkt Q fortlaufend gegen den Uhrzeigersinn auf dem Kreis bewegt wird.

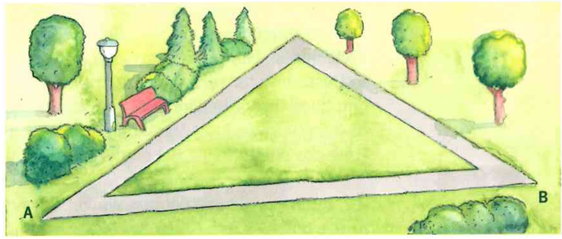
18 Vereinfache. Gib für jede Umformung das verwendete Rechengesetz an.

a) $x \cdot 2 + 5 + 3x$	b) $n - 5 + n \cdot (-2) + 3$	c) $13v - (5 + 3v)$	d) $5 - (5d - 7) - d \cdot 2$
e) $(5 + 3c) - (c - 8)$	f) $0{,}3a + 0{,}8 - a \cdot 0{,}2$	g) $y \cdot 4 - (y - 3) + 2y$	h) $3 - (4x + 3) - x \cdot 3$

19 Peter zieht nur Socken in roter oder grüner Farbe an. Sie liegen immer einzeln in einer Schachtel im Kleiderschrank. An einem Morgen zieht er zwei Socken im Dunkeln an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er an beiden Füßen die gleiche Farbe trägt, wenn fünf Paar rote und drei Paar grüne Socken einzeln in der Kiste lagen?

5 Winkelsummen

In einem Park gibt es einen Weg in Form eines Dreiecks. Beim Rundgang von A aus in Richtung von B, drehst du dich an jeder Ecke, um in die neue Richtung zu kommen. Wenn du wieder bei A bist und in Richtung von B schaust, hast du dich genau um 360° gedreht. Wenn du die Winkel des Dreiecks hinzunimmst, kannst du mit einfachen Überlegungen ihre Winkelsumme bestimmen.



Durch Winkelmessungen bei Dreiecken kann man vermuten, dass die Summe der drei Winkel 180° ergibt. Diese Eigenschaft soll nun für alle Dreiecke begründet werden.

In Fig. 1 ist ein Dreieck ABC durch eine zur Strecke $\overline{AB}$ parallele Gerade ergänzt.
Die Winkel α und ε sind Wechselwinkel an parallelen Geraden, also gilt $\alpha = \varepsilon$.
Die Winkel β und δ sind ebenfalls Wechselwinkel, also gilt $\beta = \delta$.
Da δ, γ und ε zusammen einen gestreckten Winkel bilden, gilt $\varepsilon + \gamma + \delta = 180°$.
Somit gilt auch $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

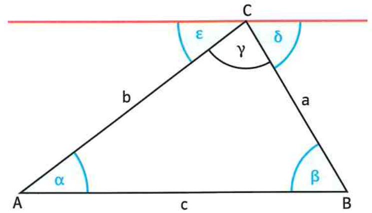
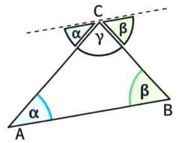


Fig. 1

In Fig. 1 ist die parallele Gerade zur Strecke c durch den Punkt C wichtig für die Begründung der Winkelsummeneigenschaft im Dreieck.

Winkelsumme im Dreieck
In jedem Dreieck beträgt die Summe der Winkelweiten 180°.
Speziell gilt: Im gleichseitigen Dreieck misst jeder Winkel 60°.



Vgl. dazu Aufgabe 4, S. 134

Beispiel 1
Bestimme die fehlenden Winkelgrößen zu den in Fig. 2 und Fig. 3 abgebildeten Dreiecken.
Lösung:
Fig. 2: Mit $\alpha = 87°$ und $\beta = 28°$ gilt nach dem Winkelsummensatz
$87° + 28° + \gamma = 180°$.
Also gilt $\gamma = 180° - 115° = 65°$.
Fig. 3: Das Dreieck ist gleichschenklig mit den Basiswinkeln $\alpha = \beta = 52°$.
Deshalb gilt $52° + 52° + \gamma = 180°$.
Somit ist $\gamma = 76°$.

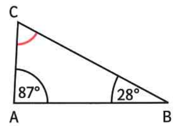


Fig. 2

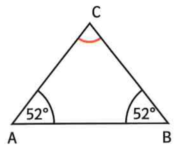


Fig. 3

Beispiel 2
Warum kann in einem Dreieck höchstens ein Winkel größer als 90° sein?
Lösung:
Wenn in einem Dreieck zwei Winkel größer als 90° wären, dann wäre die Summe dieser beiden Winkel größer als 180°. Dies kann nach dem Winkelsummensatz nicht sein.

Aufgaben

1 Geo **Experimente zur Winkelsumme im Dreieck**
Zeichne einen Kreis mit dem Radius 5 cm und ein Dreieck ABC, dessen Eckpunkte auf dem Kreis liegen. Führe die folgenden Aufträge aus.
a) Bestimme für verschiedene Dreiecke die Längen der Seiten und die Größe der Winkel und bilde ihre jeweilige Summe. Erfasse die Beispiele und Ergebnisse in einer Tabelle.
b) Gehe vor wie in a). Verändere die Lage des Dreiecks auf dem Kreis so, dass spezielle Dreiecke entstehen, z. B. ein gleichschenkliges, gleichseitiges oder rechtwinkliges Dreieck.

2 Berechne den fehlenden Winkel. Zeichne ein zugehöriges Dreieck ABC.
a) $\alpha = 54°$; $\beta = 37°$ b) $\beta = 76°$; $\gamma = 24°$ c) $\alpha = 11°$; $\gamma = 22°$ d) $\alpha = 55°$; $\beta = 35°$

3 Ein Dreieck mit den gegebenen Größen soll gleichschenklig sein. Berechne aus den Angaben die fehlenden Winkel und zeichne ein passendes Dreieck.
a) $\alpha = 46°$; $\beta = \gamma$ b) $\alpha = 90°$ c) $\alpha = 35°$; $\beta = 35°$ d) $\alpha = 70°$; $\gamma = 40°$

4 Begründe, dass in jedem gleichseitigen Dreieck ABC die Winkel α, β und γ gleich groß sind. Wie groß ist dann ein Winkel.

5 Durch die Angaben ist ein spezielles Dreieck festgelegt. Gib eine Konstruktionsbeschreibung an, zeichne das Dreieck und berechne die fehlenden Winkel.
a) $\alpha = 90°$; $\beta = 45°$; $c = 6\,cm$ b) $a = 5\,cm$; $b = 5\,cm$; $\gamma = 50°$
c) $\alpha = \beta = \gamma$; $a = 5\,cm$ d) $\beta = 50°$; $c = 6\,cm$; $b = 6\,cm$

6 Gibt es ein Dreieck ABC mit den verlangten Eigenschaften? Wenn ja, bestimme die Größe der fehlenden Winkel. Nenne gegebenenfalls Besonderheiten des Dreiecks.
a) $\alpha = 38°$; $\beta = 71°$ b) $\beta = 57°$; $\gamma = 33°$ c) $\alpha = 112°$; $\gamma = 58°$ d) $\beta = 125°$; $\gamma = 80°$
e) $\alpha = 30°$; $\beta = 30°$ f) $\gamma = 90°$; $\alpha = \beta$ g) $\alpha = 56°$; $\alpha = \beta = \gamma$ h) $\gamma = 89°$; $\alpha = 91°$

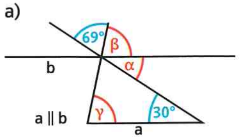
7 Bestimme die Größe der Winkel α, β und γ.
a)


Fig. 1

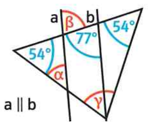
b)


Fig. 2

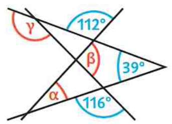
c)


Fig. 3

Bist du sicher?

1 a) Berechne den fehlenden Winkel eines Dreiecks mit $\alpha = 54°$ und $\beta = 32°$.
b) Ein gleichschenkliges Dreieck ABC hat die Basiswinkel α und β. Konstruiere das Dreieck mit $c = 4\,cm$ und $\gamma = 76°$.

2 Wahr oder falsch? Begründe.
a) Es gibt ein Dreieck mit einem rechten und zwei gleichen Winkeln.
b) Es gibt ein Dreieck mit zwei stumpfen Winkeln.
c) Es gibt ein gleichschenkliges Dreieck mit einem Winkel über 70° und einem Winkel über 60°.

8 Erstelle eine Skizze für das gesuchte Dreieck ABC. Bestimme ohne Konstruktion die Größe aller Winkel. Gibt es weitere Seitenlängen, die man durch Überlegen bestimmen kann?
a) $c = 8\,cm$; $\alpha = 60°$; $\beta = 30°$ b) $c = 5\,cm$; $b = 5\,cm$; $\alpha = 40°$
c) $a = 6\,cm$; $c = 6\,cm$; $\beta = 50°$ d) $\alpha = \beta$ und $c = b = 5\,cm$

9 Was muss man beachten, wenn man ein Dreieck durch die Angabe von drei Winkeln bestimmt? Warum reicht diese Angabe noch nicht aus, um genau ein Dreieck festzulegen?

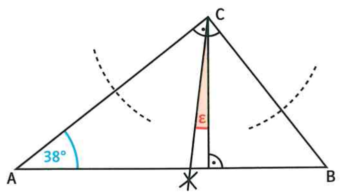
10 Berechne den Winkel ε. Schreibe die zugehörigen Überlegungen auf.


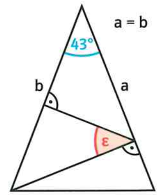
Fig. 1


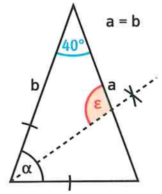
Fig. 2


Fig. 3

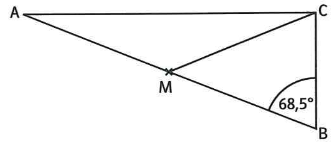
11 In Fig. 4 ist der Punkt M die Mitte der Strecke $\overline{AB}$. Die Strecke $\overline{MC}$ ist genau halb so lang wie die Strecke $\overline{AB}$. Bestimme die fehlenden Winkel des Dreiecks ABC. Zeichne eine Figur mit den gegebenen Größen im Heft.


Fig. 4

Winkel in Vielecken

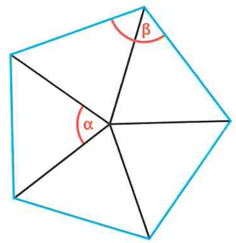
12 **Regelmäßige Vielecke**
Das Fünfeck in Fig. 5 ist regelmäßig, weil es gleich lange Seiten besitzt. Es ist aus fünf gleichen Dreiecken zusammengesetzt.
a) Wie groß ist der Mittelpunktswinkel α?
b) Wie groß ist der Innenwinkel β?
c) Zeichne nach den Ergebnissen der Teilaufgaben a) und b) ein regelmäßiges Fünfeck mit der Seitenlänge $s = 5\,cm$.
d) In Fig. 6 wird ein Kreis zum Zeichnen eines regelmäßigen Fünfecks verwendet. Zeichne mithilfe eines Kreises mit Radius 6 cm ein regelmäßiges Fünfeck.


Fig. 5

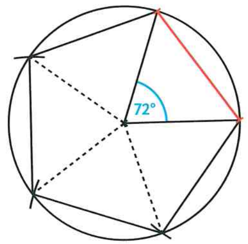
13 a) Gehe wie in Aufgabe 12 vor, um mit je einem Kreis mit Radius 8 cm ein regelmäßiges Sechseck, Achteck und 12-Eck zu zeichnen.
b) Stelle je eine Formel auf für den Mittelpunktswinkel und den Innenwinkel in einem regelmäßigen Vieleck mit n Ecken.


Fig. 6

Der Kreis in Fig. 6 heißt auch Umkreis des Vielecks

14 Frank behauptet: „Wenn man ein gleichseitiges Sechseck zeichnen will, braucht man keinen Winkelmesser. Ein Zirkel und ein Lineal genügen." Hat er Recht?

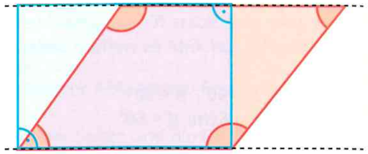


Fig. 1

15 Winkelsumme im Viereck
a) In Fig. 1 ist mithilfe von zwei parallelen Geraden ein Rechteck und ein Parallelogramm gezeichnet. Begründe, dass in beiden Vierecken die Summe der Innenwinkel 360° beträgt.
b) Begründe mithilfe der Abbildungen in Fig. 2 und Fig. 3, dass jedes Viereck die gleiche Winkelsumme hat. Denke daran, dass die gestrichelte Gerade das Viereck in zwei Dreiecke zerlegt.
c) Formuliere einen Satz über die Winkelsumme in einem beliebigen Viereck.

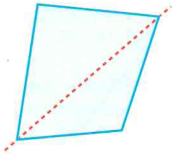


Fig. 2

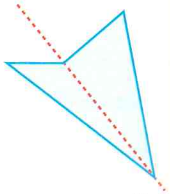


Fig. 3

16 Winkelsumme im Vieleck
a) Bestimme die Winkelsumme der inneren Winkel im Fünfeck und im Sechseck unter Verwendung der nebenstehenden Abbildungen.
b) Überprüfe, dass man die Winkelsumme im Fünfeck und im Sechseck mit dem Term $180° \cdot (n - 2)$ berechnen kann. Welche Bedeutung hat dabei die Variable n?
c) Begründe, dass man mit dem Term $180° \cdot (n - 2)$ die Winkelsumme in jedem Vieleck mit n Ecken berechnen kann.

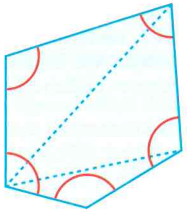


Fig. 4

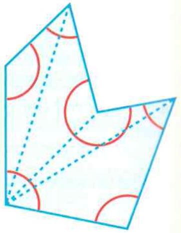


Fig. 5

Parkette aus Vielecken

17 Wenn man eine Fläche nach allen Richtungen mit Kopien einer einzigen Figur lückenlos auslegen kann, spricht man von einem **regelmäßigen Parkett**. Erkläre die Parkette in Fig. 6 und Fig. 7. Erfinde zusammen mit deinem Nachbarn Parkette.

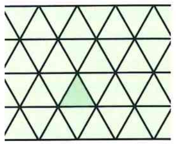


Fig. 6

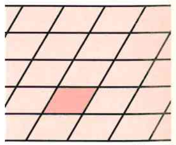


Fig. 7

18 a) Begründe, dass man mit jedem Dreieck ein Parkett legen kann.
b) Untersuche in Fig. 8 für die abgebildeten Vielecke, ob sich damit ein Parkett legen lässt. Fertige eine Zeichnung an oder begründe, dass kein Parkett möglich ist.
c) Gibt es zu jedem Viereck regelmäßige Parkette?

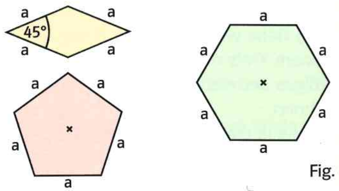
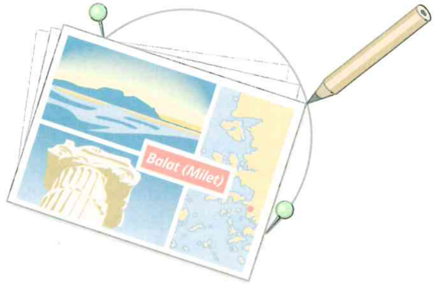


Fig. 8

6 Der Satz des Thales



Zwei Stecknadeln und eine Postkarte „sind" ein Zirkel!

Durch Winkelmessungen Fig. 1 kann man vermuten, dass die gezeichneten Dreiecke rechtwinklig sind. Um diese Vermutung allgemein zu begründen, betrachtet man Fig. 2.

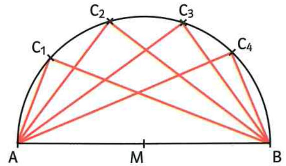


Fig. 1

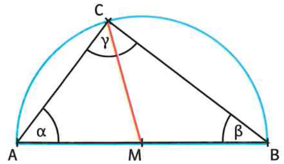
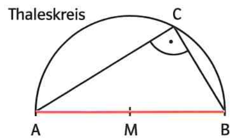


Fig. 2

Die Strecke $\overline{MC}$ teilt das Dreieck ABC in zwei gleichschenklige Dreiecke AMC und CMB, weil die Punkte A, B und C auf dem gleichen Kreis liegen. Die Winkel α und β treten als Basiswinkel bei C auf und ergeben zusammen γ. Es gilt deshalb $\alpha + \beta = \gamma$.
Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung γ, erhält man $\alpha + \beta + \gamma = \gamma + \gamma$. Mit dem Satz über die Winkelsumme im Dreieck ABC gilt $\gamma + \gamma = 180°$. Also ist $\gamma = 90°$.

Satz des Thales
Wenn ein Punkt C auf dem Thaleskreis über einer Strecke $\overline{AB}$ liegt, dann hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel.



*Der griechische Philosoph und Mathematiker Thales hat schon etwa 600 v. Chr. eine Begründung dieses Sachverhalts erbracht. Deshalb ist der Satz nach ihm benannt. Der Kreis über dem Mittelpunkt einer Strecke wird auch **Thaleskreis** genannt. Siehe dazu die Infobox auf S. 140.*

Umgekehrt kann man mit Fig. 3 begründen, dass jeder Punkt C, der mit A und B ein rechtwinkliges Dreieck bildet, auf dem Thaleskreis liegt.
Die Bewegung des Punktes C auf der Halbgeraden g kann man mit dem Zugmodus in einem Geometrieprogramm gut darstellen.

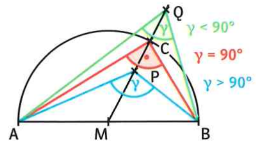


Fig. 3

Umkehrung zum Satz des Thales
Wenn von einem Punkt C aus die Strecken zu den Endpunkten einer Strecke $\overline{AB}$ einen rechten Winkel bilden, dann liegt der Punkt C auf dem Thaleskreis der Strecke.

Mit einem Thaleskreis kann man von einem Punkt P außerhalb des Kreises k die beiden Tangenten an einen Kreis konstruieren.
In Fig. 1 schneidet der Thaleskreis über der Strecke $\overline{PM}$ den Kreis k in den Berührpunkten Q und R dieser Tangenten.

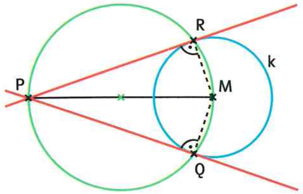


Fig. 1

Beispiel Konstruktion eines rechten Winkels
Zeichne drei Dreiecke mit $c = 6\,\text{cm}$ und $\gamma = 90°$.
Lösung:
Siehe Fig. 2.
Man zeichnet den Thaleskreis k über der Strecke AB und wählt drei Punkte C_1, C_2 und C_3 auf k. Die Dreiecke ABC_1, ABC_2 und ABC_3 sind rechtwinklig.

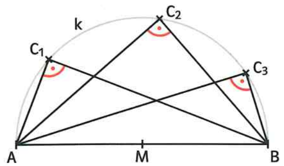


Fig. 2

Aufgaben

1 a) Zeichne mehrere Dreiecke mit $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$ und $\gamma = 90°$.
b) Zeichne einen Kreis k mit Radius 4 cm. Bestimme die Punkte A, B und C auf k so, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. Begründe deine Lösung.

2 Zeichne in einem Koordinatensystem die Punkte $A(-2|1)$ und $B(4|1)$.
Wo liegen alle Punkte P, deren Verbindungsstrecken $\overline{PA}$ und $\overline{PB}$ einen rechten Winkel bilden? Gib nach deiner Zeichnung diejenigen Punkte durch Koordinaten an, die nahe bei Gitterpunkten liegen.

3 Geo **Experimente zur Umkehrung des Satzes von Thales**
a) Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und einen Thaleskreis über der Strecke $\overline{AB}$. Miss den Winkel γ bei C. Bewege den Punkt C und achte darauf, wie sich die Weite des Winkels γ verändert, je nachdem, ob du dich mit C innerhalb, außerhalb oder auf dem Thaleskreis befindest. Schreibe deine Beobachtungen auf.
b) Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$ und eine Halbgerade von A aus. Fälle das Lot von B auf diese Halbgerade und bezeichne den Lotfußpunkt mit C.
Um welches besondere Dreieck handelt es sich beim Dreieck ABC?
Variiere die Lage der Halbgeraden. Auf welcher Linie bewegt sich der Punkt C?

Für welche Teilaufgaben von Aufgabe 4 kannst du den Satz des Thales nicht verwenden?

4 Verwende wenn möglich den Satz des Thales zum Zeichnen eines rechtwinkligen Dreiecks ABC.
a) $c = 6\,\text{cm}$; $\alpha = 50°$; $\gamma = 90°$
b) $b = 7\,\text{cm}$; $\alpha = 50°$; $\beta = 90°$
c) $\alpha = 40°$; $\gamma = 50°$; $b = 5\,\text{cm}$
d) $\alpha = \beta$; $c = 8\,\text{cm}$

5 Zeichne zuerst eine Planfigur und schreibe eine Konstruktionsbeschreibung auf.
Konstruiere ein Dreieck ABC aus
a) $c = 6\,\text{cm}$; $\gamma = 90°$; $h_c = 2\,\text{cm}$
b) $a = 5\,\text{cm}$; $\alpha = 90°$; $h_c = 1{,}5\,\text{cm}$
c) $b = 7{,}8\,\text{cm}$; $\beta = 90°$; $h_b = 3{,}2\,\text{cm}$
d) $c = 5{,}4\,\text{cm}$; $\beta = 35°$; $\alpha = 55°$

6 a) Konstruiere ein Dreieck ABC mit einem rechten Winkel bei C und der Seite $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$, das einen Flächeninhalt von $6\,\text{cm}^2$ hat.
b) Welches Dreieck mit der Grundseite $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$ und einem rechten Winkel bei C hat einen möglichst großen Flächeninhalt? Begründe.

7 Konstruiere nur mit Zirkel und Lineal ohne Winkel zu messen. Begründe.
a) Ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem ein weiterer Winkel 45° misst.
b) Ein rechtwinkliges Dreieck, bei dem ein weiterer Winkel 30° misst.

8 Konstruiert ein Rechteck, das eine 5 cm lange Seite und eine 6 cm lange Diagonale hat. Versucht verschiedene Lösungswege zu finden.

Zu Aufgabe 9 kannst du dir die Anordnung in Fig. 1 nachbauen oder mit einem Geometrieprogramm experimentieren.

9 Geo In Fig. 1 sind vier gleichlange Stäbe im Punkt D drehbar angebracht. Ihre Enden sind durch Gummischnüre verbunden. Sie bilden ein Viereck. Kann man die Stäbe so anordnen, dass das Viereck genau einen, genau zwei, genau drei oder genau vier gleiche Winkel hat? Beantworte die Fragen mit einer Zeichnung und einer schriftlichen Begründung.

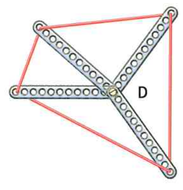


Fig. 1

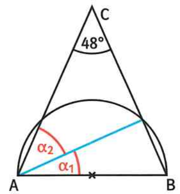


Fig. 2

10 Berechne die Winkel in Fig. 2.

11 Vom Sitzplatz eines Theaters ist der Blickwinkel von Bedeutung, unter dem man die Bühne sieht. Das nebenstehende Foto eines antiken Theaters zeigt diesbezüglich eine Besonderheit für alle Besucher in der ersten Reihe. Welche?

12 Uta wollte eigentlich drei rechtwinklige Dreiecke mithilfe des Satzes von Thales konstruieren.
Kannst du sagen, welcher Fehler ihr unterlaufen ist?

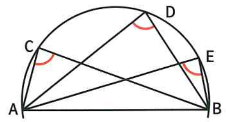


Fig. 3

13 Von der Abfahrt A der neuen Umgehungsstraße sind es noch 3 km bis zum Krankenhaus. Die geradlinige Umgehungsstraße u wurde so geplant, dass sie dem Krankenhaus K an keinem Punkt näher als 1 km kommt. Konstruiere in einem geeigneten Maßstab. In welchem Winkel zweigt die Straße von der Umgehungsstraße ab?

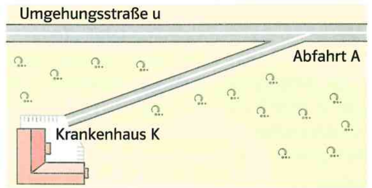


Fig. 4

14 Tangenten konstruieren
Zeichne den Kreis um $M(3|4)$ mit Radius 2,5 cm und den Punkt $P(-1|-2)$. Bestimme die beiden Tangenten durch P. Gib die Koordinaten ihrer Berührungspunkte an.

15 Eine neu zu bauende Stichstraße, deren äußere Seite durch den Punkt P geht, soll an der Außenseite ohne „Knick" in den vorhandenen Kreisverkehr einmünden. Konstruiere nach dem Plan in einem geeigneten Maßstab.

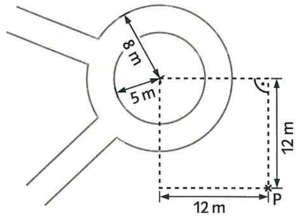


Fig. 1

16 Zeichne die zugehörigen Geraden in einem Koordinatensystem.
$y = 1{,}5x$; $y = -\frac{2}{3}x + 4$; $y = -\frac{5}{6}x + 5$;
$y = 0{,}5x - 3$; $y = -2x$
Untersuche mithilfe eines geeigneten Thaleskreises, welche der Geraden sich im rechten Winkel schneiden.

17 Die Geraden g und h in Fig. 2 sind parallel. Wie groß ist δ, wenn α 30° misst?

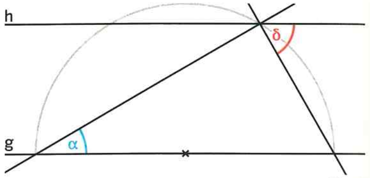
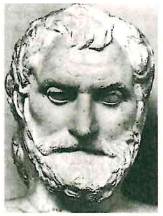


Fig. 2

Info

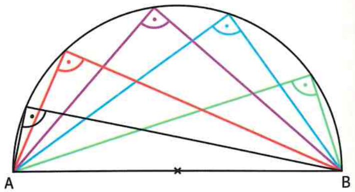
Thales von Milet (um 600 v. Chr.) – Wegbereiter der wissenschaftlichen Mathematik



Infolge der dorischen Wanderung mussten in der Antike viele Griechen auswandern. Über die Inseln der Ägäis bevölkerten sie auch die kleinasiatische Küste. Im 7. Jahrhundert v. Chr. entwickelte sich dort die griechische Siedlung Milet zu einem bedeutenden Handelsplatz. Hier war Thales als Kaufmann, Philosoph und Mathematiker tätig.

Zu den großen Verdiensten von Thales gehört, dass er die Vorgänge in der Natur nicht mehr dem Wirken der Götter zuschrieb, sondern die Ursachen in den Dingen selbst und ihren Zusammenhängen suchte. Er erklärte z. B. die jährlichen Überschwemmungen in Ägypten mit der Schneeschmelze in den Bergen und erkannte als Erster, dass die Sonne durch den Mond verfinstert wird. Für den 28. Mai 585 v. Chr. sagte er eine Sonnenfinsternis voraus, deren wirkliches Eintreten ihn selbst sehr erstaunt haben soll. Danach galt er als der größte der sieben Weltweisen.
Der nebenstehende Satz ist nach ihm benannt. Er war schon den Babyloniern bekannt. Thales hat den Sachverhalt jedoch als Erster mit den symmetrischen Eigenschaften von Figuren begründet.

Satz des Thales
Jeder Winkel von einem Punkt auf dem Halbkreis einer Strecke zu ihren Endpunkten ist ein Rechter.



7 Umkreise und Inkreise

Ein Forschungsauftrag
Beim Zeichnen der abgebildeten Figuren waren Kreise hilfreich. Versuche die Figuren zu zeichnen.

Es gibt Vielecke deren Ecken auf einem Kreis liegen. Solche Kreise heißen **Umkreise** der Vielecke. Es wird nun begründet, dass jedes Dreieck einen Umkreis besitzt.

Zum Dreieck ABC in Fig. 1 sind die Mittelsenkrechten der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ gezeichnet. Ihr Schnittpunkt U hat von den Ecken A und B sowie von B und C den gleichen Abstand. Also liegen A, B und C auf dem Kreis um U mit Radius $\overline{UA}$.

Da der Punkt U von A und C den gleichen Abstand hat, liegt er auch auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AC}$.

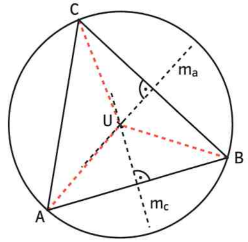


Fig. 1

Jedes Dreieck hat einen Umkreis. Der Mittelpunkt dieses Umkreises ist der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten.

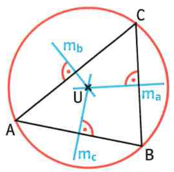


Fig. 2

Es gibt Vielecke deren Seiten einen einzigen Kreis berühren. Solche Kreise heißen **Inkreise**. Es wird nun begründet, dass jedes Dreieck einen Inkreis besitzt.

Zum Dreieck ABC in Fig. 3 sind die Winkelhalbierenden der Winkel α und β gezeichnet. Ihr Schnittpunkt I hat von den Seiten b und c sowie von a und c den gleichen Abstand. Deshalb berührt der Kreis um I mit diesem Abstand als Radius alle drei Seiten. Da der Punkt I von a und b den gleichen Abstand hat, liegt er auch auf der Winkelhalbierenden des Winkels γ.

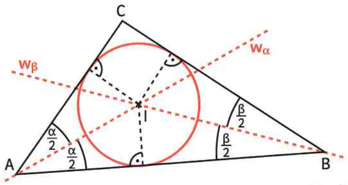


Fig. 3

Jedes Dreieck hat einen Inkreis. Der Mittelpunkt dieses Inkreises ist der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden.

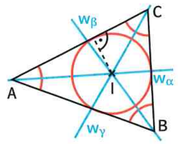


Fig. 4

Beispiel 1 Eine Aufgabe mit mehr als einer Lösung
Zeichne einen Kreis k um M mit Radius $r = 3\,cm$. Gibt es Dreiecke mit den Seitenlängen 3,3 cm und 4,8 cm, die k als Umkreis haben und die nicht deckungsgleich sind?
Lösung:
Es wird ein Kreis k um M mit $r = 3\,cm$ mit einem Kreispunkt A gezeichnet. Der Kreis um A mit Radius 4,8 cm schneidet k in zwei Punkten B_1 und B_2. Ein dritter Kreis um B_1 mit Radius 3,3 cm schneidet k in C_1 und C_2.
Die Dreiecke AB_1C_1 und AC_2B_1 haben die geforderten Eigenschaften. Sie sind nicht deckungsgleich.

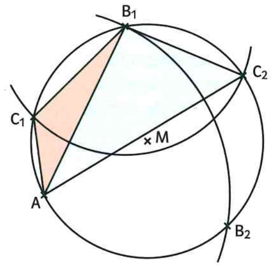


Fig. 1

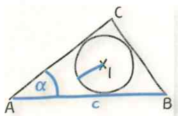


Fig. 2

Beispiel 2 Dreieck mit Inkreis
Konstruiere ein Dreieck mit $c = 5\,cm$; $\alpha = 60°$ und Inkreisradius 1,5 cm.
Lösung:
1. Zeichne die Strecke $\overline{AB} = 5\,cm$.
2. Trage in A den Winkel $\alpha = 60°$ ab.
3. Zeichne die beiden Parallelen g und h zu den Schenkeln von α im Abstand 1,5 cm.
4. Zeichne im Schnittpunkt I von g und h einen Kreis k mit Radius 1,5 cm.
5. Bestimme von B aus die Tangente an k mit dem Berührungspunkt D auf a.
6. Die Gerade BD schneidet den Schenkel von α in C.

Der Kreis k ist der Inkreis im Dreieck ABC.

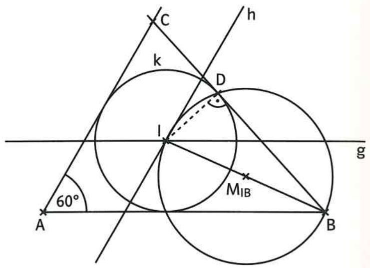


Fig. 3

Aufgaben

1 Geo **Experimentieren mit den Mittelsenkrechten im Dreieck**
Zeichne ein Dreieck ABC.
a) Zeichne die Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ mit ihrem Schnittpunkt U. Miss die Abstände von U zu den drei Eckpunkten. Welche Vermutung liegt nahe?
b) Begründe die Vermutung aus a) mit einer Eigenschaft der Mittelsenkrechten.
c) Was ergibt sich nach b) daraus für die fehlende Mittelsenkrechte zur Strecke $\overline{AC}$?
d) Welche Eigenschaft hat der Kreis um U mit dem Radius $\overline{UA}$?
e) Formuliere einen Satz, der die Ergebnisse aus a) bis d) zusammenfasst.

Tipp zu Aufgabe 2 b): Speziell oder besonders ist z. B.: Das Dreieck ist gleichschenklig oder gleichseitig; der Umkreismittelpunkt liegt auf einer Seite; das Dreieck ist spitzwinklig oder stumpfwinklig; eine Mittelsenkrechte geht durch einen Eckpunkt.

2 Geo **Dreiecke mit einem gemeinsamen Umkreis**
Untersuche die Lage des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten für Dreiecke mit einem gemeinsamen Umkreis. Zeichne dazu einen Kreis k mit Mittelpunkt M und $r = 5\,cm$ und ein Dreieck mit den Eckpunkten auf k zusammen mit den drei Mittelsenkrechten.
a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Punkt M und den Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten?
b) Verändere einen Eckpunkt des Dreiecks so, dass spezielle Dreiecke entstehen oder besondere Eigenschaften zu sehen sind. Schreibe deine Beobachtungen auf und begründe sie.

3 Zeichne ein Dreieck mit seinem Umkreis.
a) $\overline{AB} = 6\,cm$; $\alpha = 40°$; $\beta = 90°$
b) $\overline{AB} = 6\,cm$; $\alpha = 30°$; $\beta = 30°$
c) $\overline{AB} = \overline{BC} = 6\,cm$; $\beta = 90°$
d) $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 6\,cm$

4 Zeichne ein Dreieck. Beschreibe die Konstruktion.
a) $r_u = 4\,cm$; $a = 5\,cm$; $b = 3\,cm$
b) $\alpha = 50°$; $c = 8\,cm$; $r_u = 6\,cm$
c) $r_u = 5\,cm$; $\overline{AC} = \overline{BC}$; $\overline{AB} = 5\,cm$
d) $r_u = 4{,}5\,cm$; $\overline{AC} = \overline{AB}$; $\alpha = 50°$

In Aufgabe 4 steht r_u für den Umkreisradius des Dreiecks.

5 Geo **Experimentieren mit den Winkelhalbierenden im Dreieck**
Zeichne ein Dreieck ABC. Bearbeite die folgenden Aufträge.
a) Zeichne die Winkelhalbierenden zu α und β mit dem Schnittpunkt I. Miss die Abstände von I zu den drei Seiten des Dreiecks. Welche Vermutung liegt nahe?
b) Begründe die Vermutung aus a) mit einer Eigenschaft der Winkelhalbierenden.
c) Was ergibt sich daraus für die Winkelhalbierende von γ?
d) Welche Eigenschaft hat der Kreis um I, dessen Radius der Abstand zu $\overline{AB}$ ist?
e) Ist es für die Eigenschaft aus d) wesentlich, dass das Dreieck nur spitze Winkel hat?
f) Formuliere einen Satz, der die Ergebnisse aus a) bis e) zusammenfasst.

6 Geo **Umkreis und Inkreis im Dreieck**
Zeichne einen Kreis k und ein Dreieck ABC auf der Kreislinie. Zeichne die Winkelhalbierenden der drei Winkel. Führe die folgenden Aufträge aus.
a) Zeichne die Lote vom Schnittpunkt I der Winkelhalbierenden zu den Geraden durch die drei Seiten.
b) Zeichne einen Kreis um I dessen Radius einer dieser Abstände ist. Was kannst du beobachten? Gib eine Begründung.
c) Variiere die Lage des Dreiecks auf dem Kreis. Untersuche auch spezielle Dreiecke. Welche Lagen des Inkreis-Mittelpunktes kommen vor? Gibt es für spezielle Dreiecke einen Zusammenhang mit dem Umkreis-Mittelpunkt? Beschreibe typische Fälle und versuche eine Begründung zu geben.

7 Zeichne ein Dreieck mit Inkreis. Begründe besondere Lagen des Inkreismittelpunktes.
a) $\overline{AB} = 12\,cm$; $\alpha = 10°$; $\beta = 90°$
b) $\overline{AB} = 6\,cm$; $\alpha = 30°$; $\beta = 30°$
c) $\overline{AB} = \overline{BC} = 6\,cm$; $\beta = 90°$
d) $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 6\,cm$

Bist du sicher?

1 Ist der Satz richtig?
a) Die Geraden durch je zwei Eckpunkte eines Dreiecks sind Tangenten an seinen Inkreis.
b) Es gibt ein Dreieck, dessen Umkreis und Inkreis einen gemeinsamen Mittelpunkt haben.

2 Zeichne in einem Koordinatensystem. Begründe die Behauptung.
a) Das Dreieck mit den Eckpunkten $A(-4|-4)$, $B(6|-4)$ und $C(6|2)$ hat einen Umkreismittelpunkt, dessen Koordinaten ganze Zahlen sind.
b) Der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC mit $A(-4|-4)$, $B(4|-4)$ und $C(4|4)$ ist der Ursprung des Koordinatensystems.

3 Konstruiere das Dreieck.
a) Die Eckpunkte $A(2|1)$, $B(9|3)$ und der Mittelpunkt des Inkreises $I(6|4)$ sind bekannt.
b) Der Inkreis des Dreiecks berührt die Seiten des Dreiecks in $D(4|0)$, $E(5|6)$ und $F(0|4)$.

8 **Ist es hin und her gleich einfach?**

Peter behauptet: „Zu jedem Dreieck ABC kann man leicht ein Dreieck DEF konstruieren, das den Umkreis des Dreiecks ABC als Inkreis hat."

Denis behauptet: „Dann müsste man auch leicht ein Dreieck konstruieren können, das den Inkreis eines gezeichneten Dreiecks als Umkreis hat."

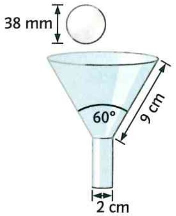


Fig. 1

9 Wie weit vom oberen Rand ist der Tischtennisball entfernt wenn er im Trichter liegt?

10 Geo In einer bestimmten Entfernung sieht man einen Baum unter einem so genannten Sehwinkel ε. Bestimme ε, die Höhe des Baumes und seine Entfernung.

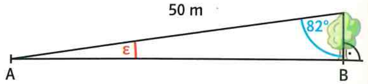


Fig. 2

11 Am 15 Meter breiten und 5 Meter hohen Giebel soll die Uhr des Rathauses ein neues Ziffernblatt erhalten. Es soll möglichst groß werden, jedoch von allen Seiten des Giebels mindestens 50 cm Abstand haben. Kann die Größe des Ziffernblattes aus den Angaben mit einer geeigneten Konstruktion bestimmt werden?

12 Konstruiere die Figuren nach der Skizze.

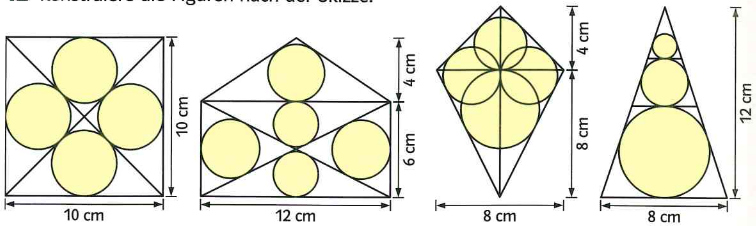


Fig. 3

13 Indiana Jones hat einem Krokodil einen dicken Ast ins Maul gestoßen, damit es nicht mehr zubeißen kann. Welche Größe hat der Winkel α?

Kannst du das noch?

14 Gib an, welche Terme äquivalent sind. Begründe deine Entscheidung.

a) $5 \cdot x - 3 - 12x$	$3 \cdot (x - 1) - x \cdot 10$	$6x - 3 - x$	$(-5x - 1) \cdot 3 + 8x$
b) $8 \cdot (1 + c) + 6$	$(c \cdot 8 + 8) + 6$	$14c + (3 - c \cdot 3) \cdot 2$	$(c - 8) \cdot 8 + 60$

15 Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ ist jedem Winkel α ein Winkel β zugeordnet. Gib die Zuordnung $\alpha \to \beta$ mithilfe einer Gleichung an.
Zeichne den Graphen der Zuordnung in einem Koordinatensystem. Liegt eine besondere Zuordnung vor?

1 Die vier Dreiecke in Fig. 1 bis Fig. 4 sind besondere Dreiecke mit zugehörigen Eigenschaften. Schreibe die Besonderheiten auf.

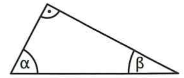


Fig. 1

2 Zeichne drei Kreise mit gleichem Radius so, dass jeder durch die Mittelpunkte der beiden anderen geht. Welche Eigenschaft hat das Dreieck mit den Mittelpunkten als Ecken?

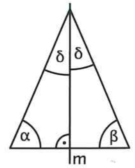


Fig. 2

3 Ist die Eigenschaft für jedes Dreieck erfüllt, liegt ein spezielles vor oder gibt es keines?

a) Die Mittelsenkrechten der drei Seiten schneiden sich in einem Punkt.
b) Zwei Winkel sind gleich, aber zwei Strecken sind verschieden.
c) Alle drei Winkel sind gleich groß und zwei Seiten sind verschieden.
d) Das Dreieck hat genau zwei Symmetrieachsen.
e) Der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten liegt auf einer Winkelhalbierenden.

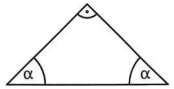


Fig. 3

4 Führe die Konstruktion nach der Beschreibung aus. Schreibe eine Aufgabe, zu der die Konstruktion eine Lösung darstellt. Schreibe einen Antwortsatz.

a) 1. Zeichne die Strecke $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$.
2. Trage den Winkel $\alpha = 40°$ an $\overline{AB}$ in A an.
3. Zeichne den Kreis k um B mit $r = 5\,\text{cm}$.
4. k schneidet α in C und D.
...

b) 1. Zeichne den Winkel $\gamma = 65°$ mit dem Scheitel S.
2. Zeichne den Kreis k um S mit $r = 4\,\text{cm}$.
3. k schneidet γ in den Punkten A und B.
4. Zeichne die Mittelsenkrechte zu $\overline{AB}$.
...

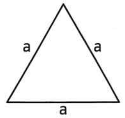


Fig. 4

5 In Fig. 5 ist $g \parallel h$. Übertrage die Figur ins Heft.
a) Bestimme die fehlenden Winkelgrößen.
b) Gib drei Gleichungen für die Winkelbeziehungen an.

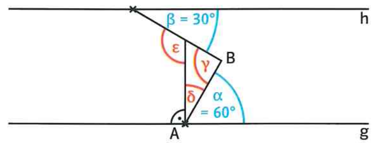


Fig. 5

Tipp zu Aufgabe 6: Verlängere die Strecke $\overline{AB}$ bis zur Geraden h.

6 Übertrage die Abbildung in Fig. 6 ins Heft. Bestimme die Größe der bezeichneten Winkel. Begründe deine Ergebnisse.

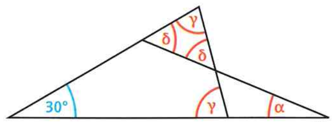


Fig. 6

7 Die Zeichnung in Fig. 7 zeigt eine Konstruktion. Beschreibe sie und bestimme die Größe der bezeichneten Winkel.

8 Warum erhält man den Mittelpunkt eines Kreises als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten zweier Sehnen? Wie viele Punkte des Kreises benötigt man hierbei mindestens?

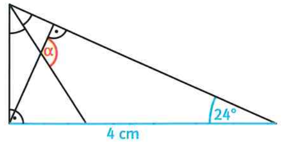


Fig. 7

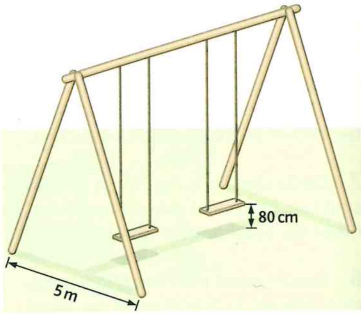
9 Geo Zeichne einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 5 cm und einen Punkt P, der 12 cm von M entfernt ist.
a) Konstruiere die Berührpunkte derjenigen Geraden, die durch P gehen und mit dem Kreis genau einen Schnittpunkt haben.
b) Miss den Winkel α, den die beiden Tangenten miteinander bilden. Wie ändert sich die Lage der beiden Berührungspunkte und der Winkel α, wenn P näher bei M liegt?

10 a) Wenn man vom Turm des Ulmer Münsters 85 m entfernt ist, bildet die Spitze des Turmes mit der Straße einen Winkel von 62°.
Welche Höhe hat der Turm?
b) Wird eine Leiter an einer Wand angelehnt, soll der Winkel zum Boden aus Sicherheitsgründen mindestens 55° und höchstens 75° betragen.
Welche Höhen kann demnach eine 5 m lange Leiter erreichen?

11 Ein Schiff fährt auf einem geradlinigen Kurs im Abstand von 12 km zu einem Leuchtturm.
Bei zwei Peilungen im Abstand von einer halben Stunde erscheint der Leuchtturm zuerst unter einem Winkel von 37° und dann unter einem Winkel von 101°.
Welche Strecke hat das Schiff zurückgelegt? Wie schnell ist es gefahren?

12 Kinderfragen müssen ernst genommen werden
Paul ist öfters mit seiner Schwester Ina auf einem Spielplatz mit einer hohen Kettenschaukel. Gestern war Onkel Dagobert mit dabei und hat Ina heftig angeschubst.
„Ich bin mit dem Schaukelbrett genauso hoch wie dein Kopf ist", juchzt Ina.
Dann will sie es genau wissen:
„Paul, was meinst du denn, wie weit ich von der Mitte der Schaukel weg war?"
Paul nimmt zum nächsten Spielplatzbesuch ein Maßband und einen Winkelmesser mit.
Er stellt fest, dass die Rundbalken 5 m auseinander stehen und mit dem Boden einen Winkel von 70° bilden. Das Sitzbrett ist 80 cm über dem Boden. Mit einer maßstabsgetreuen Konstruktion kann er Inas Frage beantworten.

Fast hätte eine Angabe gefehlt: „Onkel Dagobert ist 1,90 m groß."



13 Sicherheit geht vor
Auf einem Rundgang hat Förster Heinrich eine Tanne auf einer Wiese entdeckt, die in 8 m Höhe eine Schwachstelle hat und knicken könnte. Er muss den Gefahrenbereich, in dem die Spitze des 36 m hohen Baumes aufschlagen könnte, mit zusätzlich 5 Meter Sicherheitsabstand mit einem Seil absperren.
a) In welcher Entfernung vom Stamm könnte die Spitze den Boden treffen?
Überlege dazu, wie sich die Spitze der Tanne beim Knicken verhält, und konstruiere maßstabsgetreu.
b) Welchen Bereich muss Förster Heinrich auf der Wiese sichern?

14 Die Gemeinden A und B sollen mithilfe einer Umspannstation an eine Hochspannungsleitung angeschlossen werden. Die nebenstehende Skizze zeigt vereinfacht die geografische Situation. Damit die Kosten für die Leitungen zu den Gemeinden möglichst niedrig sind, soll die Umspannstation an derjenigen Stelle gebaut werden, von der aus die Entfernungen zu den beiden Gemeinden zusammen möglichst klein sind.
Mit der in der Abbildung gezeigten Konstruktion behauptet ein Ingenieur, die beste Lösung für das Problem mit einer Umspannstation beim Punkt C gefunden zu haben. Begründe seine Aussage. Beschreibe die Lage der Stelle C.

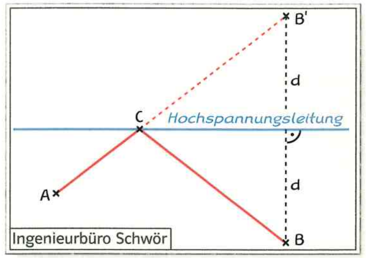


Fig. 1

15 Bei einem Laufspiel muss man von der Stelle A zuerst an der blauen Wand abklatschen und dann insgesamt möglichst schnell mit einem erneuten Abklatschen an der roten Wand zur Stelle B gelangen.
Welchen Weg würdest du nehmen?

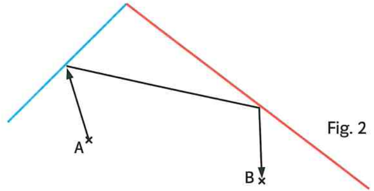


Fig. 2

16 Kannst du helfen?

Noch keinen Standort für den Sendemast
Die Vertreter der drei Gemeinden Rasthausen, Seedorf und Waldbronn sind sich noch immer nicht einig über den Standort eines Senders, der den Handy-Betrieb in der Region ermöglichen soll. Die drei Gemeinderäte fordern, dass jede Ortschaft die gleiche Qualität haben soll.

Badener Tagblatt, 25. Juli 2003

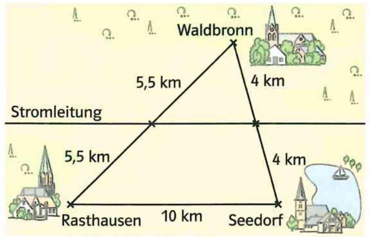


Fig. 3

Die Leistung einer Funkstation verringert sich mit zunehmendem Abstand von seinem Standort.

Wo würdest du den Platz für den Sender festlegen? Der Sender muss an die Stromleitung angeschlossen werden. Wie lang ist hierbei das Kabel?

17 Was muss man berücksichtigen, wenn man für ein ganzes Bundesland wie etwa Baden-Württemberg eine flächendeckende Versorgung, z. B. für die Rettung von Unfallopfern mit dem Hubschrauber, einrichten will? Besorge dir die zugehörigen Informationen und schreibe deine Überlegungen für eine baden-württembergische Lösung auf.

Auch der Aktionsradius eines Hubschraubers ist kreisförmig wie bei einer Funkstation.

18 Zeichne die Geraden g, h und k wie angegeben. Bestimme alle Punkte, die von g, h und k den gleichen Abstand haben.
a) Jeweils zwei Geraden schneiden sich. Die Schnittpunkte sind verschieden.
b) Die Geraden g und h sind parallel, die Gerade k schneidet g und h.
c) Die Geraden g, h, und k schneiden sich in einem Punkt.

19 Kann man drei Geraden so zeichnen, dass es keinen Punkt gibt, dessen Abstände zu den drei Geraden gleich groß sind?

20 In Fig. 1 ist das Dreieck ABC gleichschenklig.
a) Untersuche, ob g und h parallel sind.
b) Bestimme die Weite der Winkel α, γ und δ.
c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen β_1 und γ? Begründe.

Tipp: In Fig. 1 ist ein Thaleskreis gezeichnet.

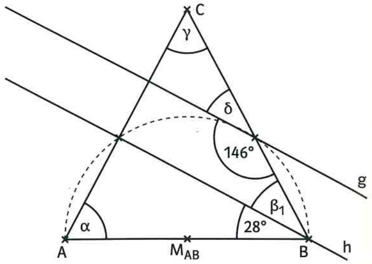


Fig. 1

21 Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Seite der Länge 6 cm und einem Flächeninhalt von 24 cm².

22 In einem Koordinatensystem ist ein Dreieck ABC mit A(−3|−2); B(5|1) und C(−1|4) gegeben.
a) Zeichne ein Rechteck mit einem möglichst kleinen Flächeninhalt so, dass seine Seiten zu je einer Koordinatenachse parallel sind und die Eckpunkte des Dreiecks auf den Seiten des Rechtecks liegen.
b) Bestimme nach Teilaufgabe a) den Flächeninhalt des Rechtecks und des Dreiecks. Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Rechtecks größer als der des Dreiecks?
c) Ein Punkt P ist gleich weit von den Eckpunkten der Strecke $\overline{AB}$ entfernt. Ein Punkt Q hat den gleichen Abstand zu den Eckpunkten des Rechtecks. Bestimme die Länge der kürzesten Strecke $\overline{PQ}$.

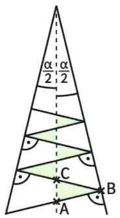


Fig. 2

23 Fig. 2 zeigt einen Leitungsmast im oberen Teil. Begründe, dass das Dreieck ABC und alle gefärbten Dreiecke gleichschenklig sind.

24 Ein Dreieck ABC soll rechtwinklig sein. Begründe, ob dies unter der gegebenen Bedingung möglich ist. Wenn ja, gib die Winkel eines passenden Dreiecks an.

a) $\gamma = 12°$	b) $\alpha = 80°$	c) $\beta = 100°$	d) $\alpha = \gamma$
e) $\gamma = \frac{\beta}{2}$	f) $\alpha + \beta = 90°$	g) $\gamma + \alpha = 110°$	h) $\alpha + \beta = \frac{\gamma}{2}$

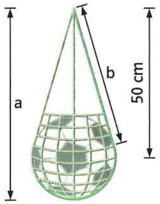


Fig. 3

25 Ein Ball mit 28 cm Durchmesser ist in einem Netz aufgehängt. Die Abbildung am Rand zeigt die Situation. Bestimme die zu den Variablen a und b gehörenden Streckenlängen.

26 Hier gibt es viele Variationen
Einen Würfel kannst du mit einem geraden Schnitt teilen. An der Schnittfläche entsteht ein Vieleck. Wenn du z. B. einen Würfel aus Knetmasse herstellst, kannst du den Schnitt mit einem Messer herstellen. Beantworte die Fragen und skizziere die zugehörigen Schrägbilder.
a) Welche Arten von Vielecken kommen bei solchen Schnitten vor?
b) Welche Figuren können entstehen, wenn der Schnitt durch drei gewählte Eckpunkte des Würfels geht?
c) Welche Figuren kommen vor, wenn der Schnitt durch drei gewählte Mittelpunkte der Seiten geht?

Beachte: Wenn man drei Punkte auf drei Würfelseiten wählt, ist damit genau ein gerader Schnitt festgelegt.

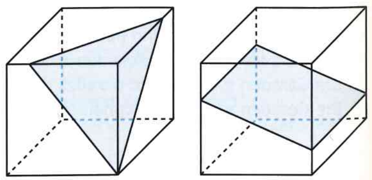


Fig. 4

Gute Gründe

Felicitas Hoppe

Ob es dafür eine Begründung gibt, dass ich nachts nicht mehr schlafen kann? Dass mir morgens plötzlich das Frühstück nicht schmeckt, dass ich im Unterricht aus dem Fenster starre, den Tisch mit seltsamen Zeichen beschmiere und nicht höre, was vorne geredet wird? Ich habe jedes Interesse verloren, ich sehe nicht, was auf der Tafel steht, ich merke nicht einmal, wenn mich mein Nachbar heftig von links in die Seite stößt. Alles ist mir egal geworden.

Nur meine Schwester weiß ganz genau, was seit zwei Wochen mit mir los ist. Für alles im Leben gibt es gute Gründe. Sie muss es wissen, sie ist älter als ich. Sie weiß auch, warum ich nachmittags stundenlang hinten im Garten stehe, selbst bei Regen und seit gestern im Schnee. Ich merke nicht einmal, wie kalt mir ist, wenn ich von dort auf das Nachbarhaus starre, wo ich oben am Fenster im zweiten Stock die Tochter unserer Nachbarn vermute.

Nicht, dass ich das wirklich begründen kann, ich habe das Mädchen nur einmal gesehen, geredet haben wir nicht sehr viel. Und wenn meine Schwester mich lachend fragt, was mir an ihr so gut gefällt, werde ich rot und beginne zu stottern. Ich weiß nur, dass ich nicht anders kann, nachts werde ich wieder von ihr träumen. Im Traum steht die Tochter der Nachbarn vor mir und fragt mich dasselbe wie meine Schwester. Warum ich immer im Garten stehe und dass ich das endlich begründen soll. Meine Mutter behauptet, es sind ihre Haare, mein Bruder behauptet, es sind die Augen, meine Schwester dagegen findet sie hässlich und meint, ich soll die Sache vergessen. Aber ich kann die Sache nicht einfach vergessen, denn diese Sache ist keine Sache, sondern die Tochter der Nachbarn, die mir einfach sehr gefällt.

Es ist wahr, ich bin schlecht in der Schule geworden, und mein Vater spricht laut von dem begründeten Verdacht, dass ich nur meine Zeit verschwende, weil das Mädchen im zweiten Stock der Nachbarn sich überhaupt nicht für mich interessiert. Dabei macht er ein finsteres Richtergesicht, und ich höre die Stimme der Tochter der Nachbarn, die fragt: Wie begründen Sie Ihr Verhalten? Aber ich will mein Verhalten gar nicht begründen, weil ich weiß, dass es nichts zu begründen gibt. Die Begründungen werde ich überspringen! Lieber gehe ich gleich zu Beweisen über, damit das Mädchen endlich versteht, warum ich im Schnee im Garten stehe und von dort aus eine Leiter anlege. Auf der Leiter steige ich bis ganz nach oben, bis unter das Fenster im zweiten Stock, damit das Mädchen mich sehen kann und versteht, dass man keine Begründungen braucht, um Zuneigung zu beweisen.

Beobachten mit dem Zugmodus eines Geometrieprogramms

Mit einem Geometrieprogramm kann man eine Figur im „Zugmodus“ nachträglich verändern, indem man einen Punkt mit der Maus „ergreift“ und ihn bewegt. Hierbei wird die Konstruktion beibehalten. Die gesamte Figur ändert aber ihre Form. Dabei kann man die Eigenschaften einer besonderen Figur oder einer Abbildung verdeutlichen. Zusätzlich kann man auch die Änderung eines markierten Punktes – seine Ortslinie – aufzeichnen.

Schnittpunkt der Mittelsenkrechten eines Dreiecks – Ortslinien beobachten

In der nebenstehenden Figur wurde mit einem Geometrieprogramm zunächst ein Dreieck ABC festgelegt und danach der Schnittpunkt S der Mittelsenkrechten konstruiert. Dann wurde ein Kreis gezeichnet, auf dem der Punkt C liegt. Wenn nun der Punkt C auf dem Kreis bewegt und dabei die Ortslinie des Punktes S aufgezeichnet wird, entsteht die rot gefärbte Linie.
Man beobachtet, dass der Schnittpunkt S der Mittelsenkrechten des Dreiecks sich vermutlich auf einer Strecke bewegt.

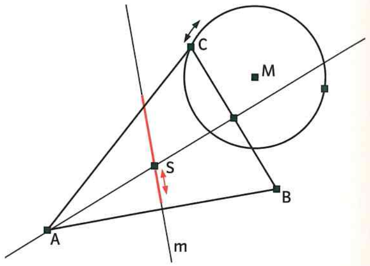


Fig. 1

Die Vermutung, dass die Ortslinie eine Strecke ist, kann mit der Eigenschaft der Mittelsenkrechten leicht begründet werden. Da die Strecke $\overline{AB}$ bei der Bewegung des Punktes C auf dem Kreis ihre Lage nicht ändert, bleibt auch die Mittelsenkrechte m der Strecke $\overline{AB}$ fest. Deshalb liegt der Punkt S für alle Lagen von C stets auf der Geraden m. Solange der Punkt C auf dem Kreis bewegt wird, wiederholt sich die Bewegung des Punktes S auf m.

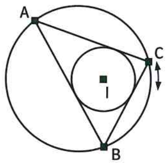


Fig. 2

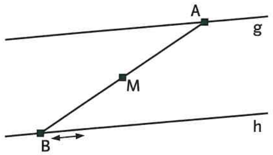


Fig. 3

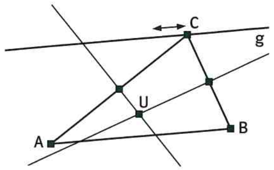


Fig. 4

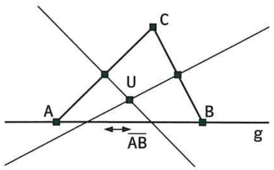


Fig. 5

Tipp:
Beim Zeichnen der Figur ist es vorteilhaft, zuerst eine Anfangsfigur festzulegen und dann die zu untersuchende Figur hineinzuzeichnen, damit die Zeichnung beim Zugmodus nicht „wackelt“.

Geo Wie verändert sich in Fig. 2 beim Dreieck ABC der Inkreis, wenn ein Punkt des Dreiecks auf dem Umkreis läuft? Gibt es Dreiecke, bei denen die Mittelpunkte der beiden Kreise zusammenfallen?

Geo In Fig. 3 werden die parallelen Geraden g und h mit einer Querstrecke $\overline{AB}$ verbunden. Welche Ortslinie beschreibt der Mittelpunkt von $\overline{AB}$, wenn B auf h läuft.

Geo In Fig. 4 ist zum Dreieck ABC eine parallele Gerade g zu $\overline{AB}$ durch den Punkt C gezeichnet. Wie ändert sich der Umkreismittelpunkt, wenn C auf g bewegt wird?

Geo In Fig. 5 ist eine Gerade durch $\overline{AB}$ gezeichnet. Wo bewegt sich der Umkreismittelpunkt des Dreiecks ABC, wenn die Strecke $\overline{AB}$ auf g verschoben wird?

Beobachten mit dem Zugmodus eines Geometrieprogramms

Eigenschaften von Abbildungen sehen – die Achsenspiegelung

In der nebenstehenden Figur ist ein Dreieck ABC an der Geraden g gespiegelt. Das Bilddreieck ist deckungsgleich zum Ausgangsdreieck. Durch das Ziehen der beiden schwarzen Punkte auf der Achse oder der Punkte A, B und C ändert sich die Figur.

Geo Variiere das Dreieck ABC und beobachte die Lage des Bilddreiecks. Welche Eigenschaften der Verbindungsstrecken $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ und $\overline{CC'}$ zwischen einem Punkt und seinem Bildpunkt erkennst du?

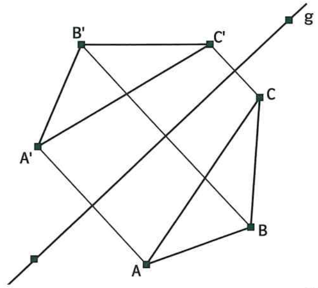


Fig. 1

Tipps:
1. Es ist vorteilhaft, zuerst die Spiegelachse durch die schwarz gezeichneten Punkte festzulegen, damit die Lage der Achse verändert werden kann.
2. Durch das Färben der Zeichnung lassen sich die einzelnen Objekte besser unterscheiden.

Geo Versuche besondere Lagen der Dreiecke herzustellen und schreibe die besonderen Eigenschaften auf, die dabei entstehen. Zum Beispiel Situationen, bei denen
- die Eckpunkte auf verschiedenen Seiten liegen,
- die Eckpunkte der Ausgangsfigur mit der Bildfigur zusammenfallen,
- ein Dreieck gleichschenklig oder gleichseitig ist,
- die beiden Dreiecke zusammen ein symmetrisches Dreieck ergeben,
- der Winkel bei C stets ein rechter ist,
- das „Dreieck“ ABC zu einer Strecke wird,
- drei Eckpunkte des „Dreiecks“ ABC auf der Achse liegen.

Geo Ergänze die Figur so, dass das Bilddreieck nochmals an einer Geraden h gespiegelt wird, welche die Gerade g schneidet. Untersuche dann den Zusammenhang zwischen der Ausgangsfigur und der Bildfigur nach zweimaliger Spiegelung an den Achsen g und h.

Spiegelung an einem Kreis – eine Abbildung erfinden und untersuchen

Vereinbarung einer Abbildung
Gegeben ist ein Kreis. Ein Punkt P wird nach folgender Vorschrift auf den Punkt P' abgebildet:
- Die Punkte P, M und P' liegen auf einer Geraden.
- Die Strecke $\overline{PP'}$ wird von der Kreislinie halbiert, d.h., es ist $\overline{PQ} = \overline{P'Q}$.

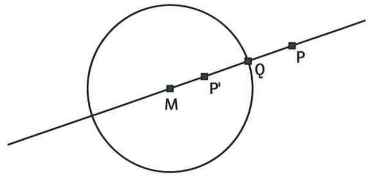


Fig. 2

Tipps:
1. Für die Konstruktion des Bildpunktes P' aus dem Punkt P ist es wichtig, zuerst den gegebenen Kreis zu zeichnen und dann die Strecke $\overline{PP'}$ mithilfe der Geraden $\overline{MP}$ und ihrem Schnittpunkt Q mit dem Kreis zu konstruieren. Danach sollte man alle störenden Linien ausblenden.
2. Wenn man zur Abbildung eine Figur hinzuzeichnet, kann man das Bild einer Figur als Ortslinie von P' aufzeichnen, wenn der Punkt P an die Figur gebunden wird.

Anregungen für eigene Experimente

Geo Konstruiere mit einem Geometrieprogramm die obige Figur so, dass sie die Abbildung ausführt.

Geo Untersuche die Bilder von Strecken, Geraden, Dreiecken und Kreisen und beschreibe ihre Eigenschaften. Versuche auch, Begründungen für die Beobachtungen zu finden.

Geo Erfinde selbst eine eigene Abbildung und untersuche ihre Eigenschaften.

Rückblick

Abstände
Abstand Punkt – Gerade: Der Abstand eines Punktes P zur Geraden g ist die Länge des Lotes von P auf g.
Abstand paralleler Geraden: Bei parallelen Geraden hat jeder Punkt auf einer Geraden den gleichen Abstand zur anderen Geraden.

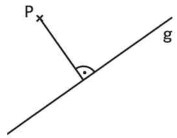


Fig. 1

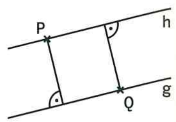


Fig. 2

Ortslinien-Eigenschaft der Mittelsenkrechten
Jeder Punkt mit dem gleichen Abstand zu den Endpunkten einer Strecke liegt auf der Mittelsenkrechten.
Umgekehrt hat jeder Punkt der Mittelsenkrechten einer Strecke den gleichen Abstand zu den Endpunkten der Strecke.

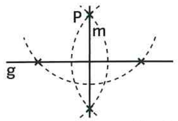


Fig. 3

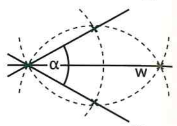


Fig. 4

Ortslinien-Eigenschaft der Winkelhalbierenden
Jeder Punkt mit gleichem Abstand zu den beiden Schenkeln eines Winkels liegt auf der Winkelhalbierenden.
Umgekehrt hat jeder Punkt der Winkelhalbierenden eines Winkels den gleichen Abstand zu den Schenkeln des Winkels.

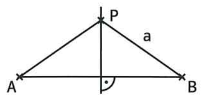


Fig. 5

Konstruktionen
Mit Zirkel und Lineal kann man
- die Mittelsenkrechte einer Strecke konstruieren,
- die Winkelhalbierende eines Winkels konstruieren,
- die Lotgerade von einem Punkt auf eine Gerade konstruieren.

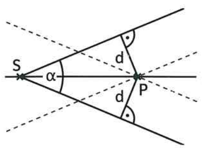


Fig. 6

Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke
Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann sind die Basiswinkel gleich groß.
Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich groß sind, dann ist es gleichschenklig.
Jeder Winkel im gleichseitigen Dreieck misst 60°.

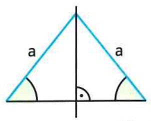


Fig. 7

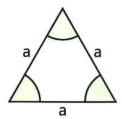


Fig. 8

Winkel an sich schneidenden Geraden
An zwei sich schneidenden Geraden sind Scheitelwinkel gleich groß. Nebenwinkel ergeben zusammen 180°.
Werden zwei parallele Geraden von einer dritten geschnitten, so haben Wechselwinkel und Stufenwinkel die gleiche Größe.

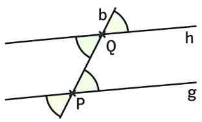


Fig. 9

Winkel im Dreieck – Inkreis und Umkreis
Die Winkelsumme im Dreieck ergibt 180°.
Jedes Dreieck hat einen Umkreis. Die drei Mittelsenkrechten der Seiten schneiden sich im Mittelpunkt U des Umkreises.
Jedes Dreieck hat einen Inkreis. Die drei Winkelhalbierenden der Winkel schneiden sich im Mittelpunkt I des Inkreises.

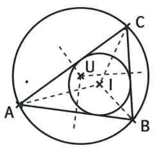


Fig. 10

Satz des Thales
Jeder Winkel im Halbkreis über einer Strecke ist ein rechter.
Der Satz des Thales kann umgekehrt werden.

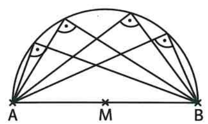


Fig. 11

Training

Runde 1

1 Gegeben ist ein Dreieck ABC mit $\overline{AB} = 4\,cm$; $\beta = 40°$ und $\overline{AC} = 3\,cm$. Zeichne eine Planfigur, gib eine Konstruktionsbeschreibung an und zeichne das Dreieck. Gibt es nur eine Lösung?

2 Zeichne ein Rechteck mit $a = 5\,cm$ und $b = 3\,cm$. Bestimme alle Punkte für die beide Aussagen A und B erfüllt sind. Begründe deine Lösung.
A: Die Punkte haben zum Schnittpunkt der Diagonalen einen Abstand von mindestens 1cm und höchstens 3cm.
B: Die Punkte haben zur längeren Seite einen Abstand von 1cm.

3 Zeichne ein Dreieck ABC mit $a = 3\,cm$; $b = 4\,cm$ und $\gamma = 50°$. Konstruiere den Schnittpunkt S der Winkelhalbierenden des Winkels α mit der Mittelsenkrechten der Seite $\overline{AC}$. Schreibe die Abstandseigenschaften des Punktes S auf, die sich aus der Konstruktion ergeben.

4 In der nebenstehenden Figur ist $g \parallel h$. Zunächst wurde die Strecke $\overline{AB}$ mit dem Winkel α gezeichnet. Dann wurden im Punkt B und danach im Punkt C die Winkelhalbierenden konstruiert.
a) Zeichne für $\alpha = 58°$ und mit dem Abstand 5cm von g zu h die Figur in dein Heft.
b) Bestimme die Größe der Winkel β und γ ohne zu messen. Begründe schriftlich.
c) Kann der Winkel α so gewählt werden, dass $\alpha = \beta$ gilt? Wie groß ist dann der Winkel γ?

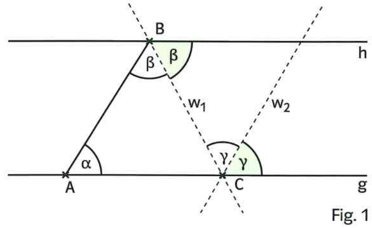


Fig. 1

Runde 2

1 Um die Länge $\overline{AB}$ des abgebildeten Sees zu bestimmen, wurden vom Punkt C aus die angegebenen Messungen vorgenommen. Bestimme mit einem geeigneten Maßstab die Länge des Sees mit einer Konstruktion.

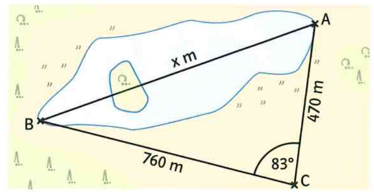


Fig. 2

2 Ein Dreieck ABC soll den rechten Winkel $\beta = 90°$ haben. Gib die mögliche Größe der Winkel an und zeichne ein passendes Dreieck.
a) $\gamma = 12°$ b) $\beta = 2 \cdot \alpha$ c) $\gamma + \alpha = 110°$

3 Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 4\,cm$; $b = 5\,cm$ und $\beta = 45°$ mit dem Umkreis. Beschreibe die Konstruktion. Gibt es mehrere Lösungen?

4 Konstruiere ein Dreieck ABC mit $c = 5\,cm$; $\alpha = 50°$ und einem rechten Winkel bei C
a) ohne Rechnung mithilfe des Satzes von Thales.
b) mithilfe einer Rechnung ohne Verwendung des Satzes von Thales.

5 Wie viele gleichschenklige Dreiecke sind in der nebenstehenden Figur enthalten?
a) Nenne Strecken der Figur, die gleich lang sind.
b) Bestimme zu $\alpha = 26°$ die beschrifteten Winkel und zeichne danach die Figur mit $\overline{AB} = 8\,cm$.
c) Kann die Figur auch so gezeichnet werden, dass $\alpha = 45°$ ist?

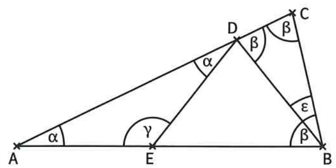


Fig. 3