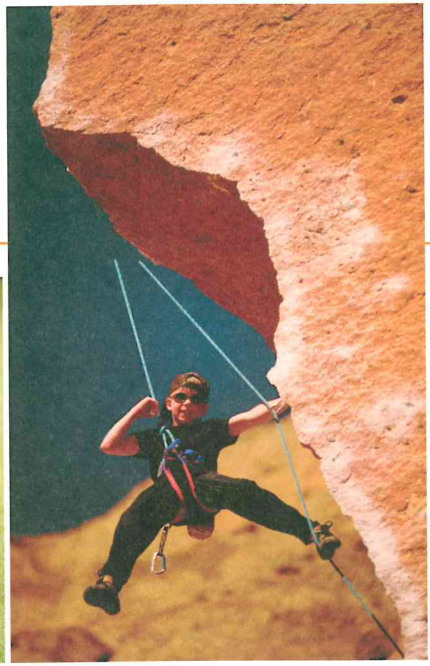
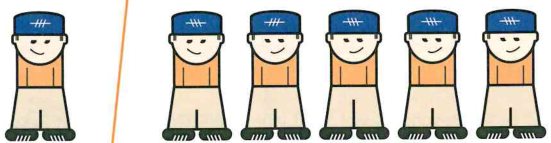
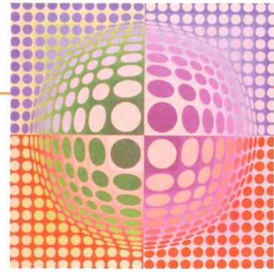
Das kannst du schon

- Dreiecke konstruieren
- Eigenschaften geometrischer Figuren erkennen
- Einfache Zusammenhänge bei geometrischen Figuren begründen

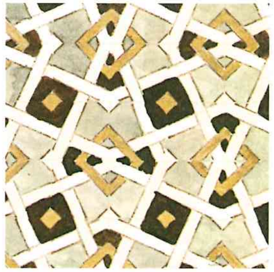




Das Gleichheitszeichen der Geometrie



Victor Vasarely



Ornament, *M.C. Escher*

In unserer Umwelt begegnen uns viele Dreiecke und Vierecke. Wenn man z.B. Gebäude plant und dann baut, muss man wissen, wie diese Figuren „funktionieren."

Es ist erstaunlich, wie wenig man von einem Dreieck wissen muss, um es bereits ganz zu durchschauen. Vierecke sind da schon viel wankelmütiger. Zum Glück kann man auch denen zu mehr Stabilität verhelfen …

Das kannst du bald

- Schnell erkennen, ob geometrische Figuren zueinander kongruent sind
- Unbekannte Größen von Körpern und Entfernungen im Freien durch Konstruktion bestimmen
- Besondere Zusammenhänge bei geometrischen Figuren erkennen und mit Kongruenzsätzen begründen

1 Kongruente Figuren

Nur zwei der fünf Teile gehören zum Puzzle.

Die Gleichheit von Mustern und Figuren spielt nicht nur bei Fingerabdrücken oder in der Kunst eine große Rolle, sondern auch in der Geometrie. Zwei Figuren sind gleich, wenn man sie ausgeschnitten so übereinander legen kann, dass es keine Überstände gibt. Man sagt dann, die Figuren sind **kongruent**.

congruere (lat.) übereinstimmen

nicht zueinander kongruent

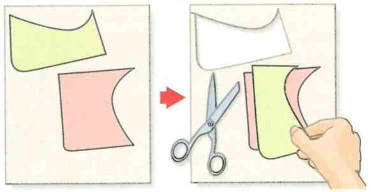


Fig. 1

zueinander kongruent

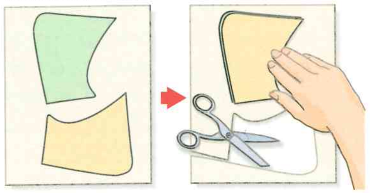


Fig. 2

Zwei Figuren sind zueinander kongruent, wenn man sie ausgeschnitten so übereinander legen kann, dass es keine Überstände gibt.

Zur Überprüfung der Kongruenz kann man Transparentfolie benutzen.
Bei Vielecken kann man auch alle entsprechenden Seiten und Winkel miteinander vergleichen.

Dein Handwerkszeug für dieses Kapitel:

Transparentfolie oder Kopierfolie (Größe ca. DIN A5) Folienschreiber (wasserlöslich)

Beispiel
Untersuche, welche der Vielecke zueinander kongruent sind.

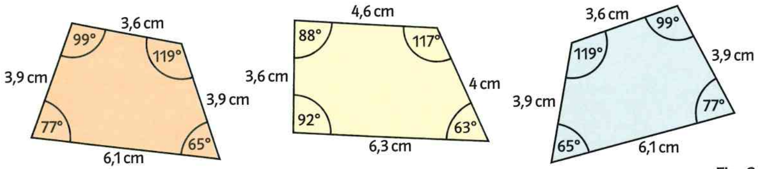


Fig. 3

Lösung:
Das blaue und das orange Viereck sind zueinander kongruent.
1. Möglichkeit: *Man überträgt die Umrisse der Figur auf Transparentfolie und vergleicht.*
2. Möglichkeit: *Man misst alle Winkel und Seiten der drei Figuren und vergleicht.*

Aufgaben

1 a) Beschreibe die zueinander kongruenten Figuren, die du in den abgebildeten Zeichen entdeckst.

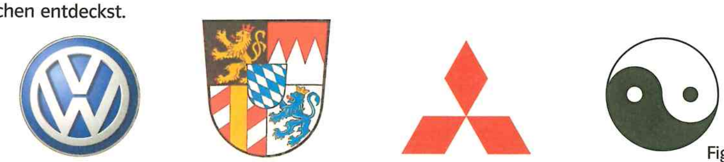


Fig. 1

b) Suche weitere Zeichen, die aus zueinander kongruenten Figuren bestehen. Tausche dich mit deinem Nachbarn über die gefundenen Figuren aus.
c) Erstelle selbst ein Zeichen oder Logo, das sich aus zueinander kongruenten Figuren zusammensetzt.

2 a) Welche Figuren in Fig. 2 sind zueinander kongruent?

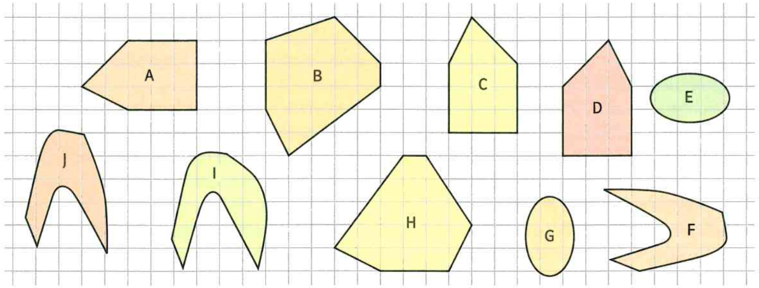


Fig. 2

Du kannst solche Figuren auch mit einem Zeichenprogramm erzeugen. Kongruente Figuren erhältst du mit der Kopier-Funktion.

b) Fertige selbst fünf Figuren an, von denen einige zueinander kongruent sind und gib sie deinem Nachbarn zur Überprüfung auf Kongruenz.

3 a) Wo überall kann der vierte Punkt H in Fig. 3 liegen, damit ein zum Viereck ABCD kongruentes Viereck entsteht?
b) Gegeben sind die Punkte A(1|1), B(7|1), C(5|4), D(2|3) und E(8|3). Gib die Koordinaten von Punkten F_1, F_2, F_3 und F_4 an, so dass die Dreiecke DEF_1, DEF_2 usw. kongruent sind zum Dreieck ABC.

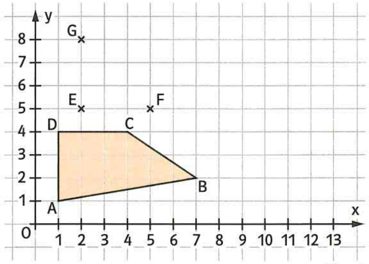


Fig. 3

4 **„Dreiecke versenken"**
a) Jeder überlegt sich Koordinaten zweier Dreiecke ABC und DEF, welche zueinander kongruent sind. Die Koordinaten der Punkte A bis E werden auf einen Zettel geschrieben, den der Nachbar erhält. Dieser muss dann die Koordinaten von F richtig herausfinden.
b) Spielt in zwei Gruppen zu je zwei Personen: Gegeben ist ein Dreieck ABC mit A(1|1), B(5|2) und C(5|5). Gesucht ist ein Dreieck $P_1P_2P_3$, welches kongruent ist zum Dreieck ABC. Gruppe 1 nennt die Koordinaten eines beliebigen Punktes P_1. Gruppe 2 sucht einen passenden Punkt P_2, dann nennt Gruppe 1 die Koordinaten des fehlenden Punktes P_3. Danach werden die Rollen vertauscht und Gruppe 2 beginnt.

Hier kannst du rechnen oder konstruieren.

Bist du sicher?

1 Welche der Dreiecke sind zueinander kongruent?
Dreieck ABC mit A(1|0); B(4|0); C(3|2)
Dreieck DEF mit D(5|5); E(2|5); F(3|3)
Dreieck GHI mit G(−2|1); H(2|1); I(1|−1)

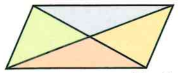


Fig. 1

2 Das Parallelogramm in Fig. 1 ist durch zwei Schnitte in vier Teildreiecke zerlegt worden.
a) Welche der entstandenen Teildreiecke sind zueinander kongruent?
b) Gibt es ein entsprechend unterteiltes Viereck, bei dem alle vier Dreiecke zueinander kongruent sind?
c) Zeichne ein Parallelogramm und zerlege es durch zwei Schnitte in vier Teilfiguren, die alle zueinander kongruent sind.

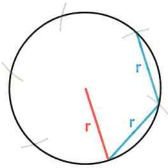


Fig. 2

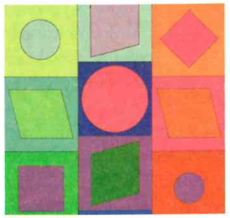
So konstruiert man ein regelmäßiges Sechseck.

5 Zeichne ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 4 cm und zerlege es in zwei, drei bzw. sechs zueinander kongruente Teilfiguren. Um welche Figuren handelt es sich jeweils?

6 a) Zeichne ein Quadrat und zerlege es auf zwei verschiedene Arten in vier zueinander kongruente Teilfiguren.
b) Zeichne ein Rechteck und zerlege es in möglichst viele zueinander kongruente Dreiecke.
c) Zeichne ein Trapez, das man in drei zueinander kongruente gleichseitige Dreiecke zerlegen kann.

7 Kongruenz ist eine Kunst
a) Schreibe zu den Bildern von Escher und Vasarely einen kurzen Text, in dem du erklärst, ob bzw. aus welchen zueinander kongruenten Figuren die Bilder entstanden sind.


Escher


Vasarely

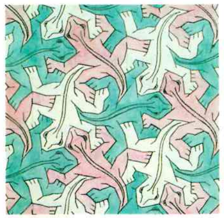

Escher

Fig. 3

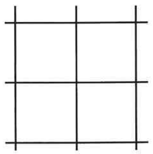
Victor Vasarely, 1908–1997

Maurits Cornelis Escher, 1898–1972

b) Das Bild von M.C. Escher auf Seite 9 ist ein Stempelbild. Es ist entstanden durch wiederholtes Stempeln mit den unten abgebildeten Stempeln und anschließendem Einfärben. Zeichne ein Gitter und trage dort mit zwei roten und zwei blauen Balken ein, wie die Stempel gedreht werden müssen damit der Bildausschnitt links entsteht.

Suche im Internet nach zueinander kongruenten Figuren in Bildern von Paul Klee, Wassily Kandinsky oder Josef Albers.


Bildausschnitt


Gitter


Stempel 1 und 2

Fig. 4

Info

Spiegeln statt Schnipseln
Man kann auch ohne Transparentfolie oder Schere überprüfen, ob zwei beliebige Figuren zueinander kongruent sind.
Man weiß, dass bei einer Achsenspiegelung oder einer Punktspiegelung Bild und Spiegelbild zueinander kongruent sind.
Will man also zeigen, dass zwei Figuren zueinander kongruent sind, so kann man nach einer Spiegelachse oder einem Spiegelpunkt suchen, so dass die eine Figur das Spiegelbild der anderen ist.
In Fig. 1 ist das rote Dreieck kongruent zum blauen Dreieck, weil das blaue Dreieck gerade das Spiegelbild des roten Dreiecks ist, wenn man es an der eingezeichneten Achse spiegelt.

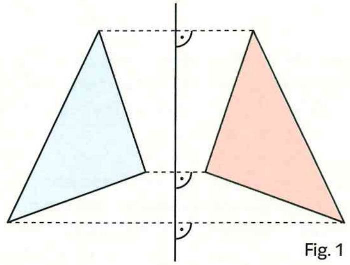


Fig. 1

8 a) Trage die Punkte A(1|1), B(4|1), C(6|3), D(4|5), E(4|3), F(1|3), P(6|7), Q(8|5), R(10|7), S(10|10), T(8|10) und U(8|7) in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Zeige, dass das Sechseck ABCDEF kongruent ist zum Sechseck PQRSTU, indem du eine Spiegelachse so einzeichnest, dass das eine Sechseck gerade das Spiegelbild des anderen ist.
b) Trage die Punkte A(1|1), B(4|4), C(4|7), D(1|7), P(6|3), Q(9|3), R(9|9) und S(6|6) in ein geeignetes Koordinatensystem ein. Zeige, dass das Viereck ABCD kongruent ist zum Viereck PQRS, indem du einen Spiegelpunkt so einzeichnest, dass das eine Viereck gerade das Spiegelbild des anderen ist.

9 a) Die vier F in Fig. 2 sind alle zueinander kongruent. Suche jeweils einen Symmetriepunkt oder eine Symmetrieachse, so dass das rote F auf eines der blauen abgebildet wird.

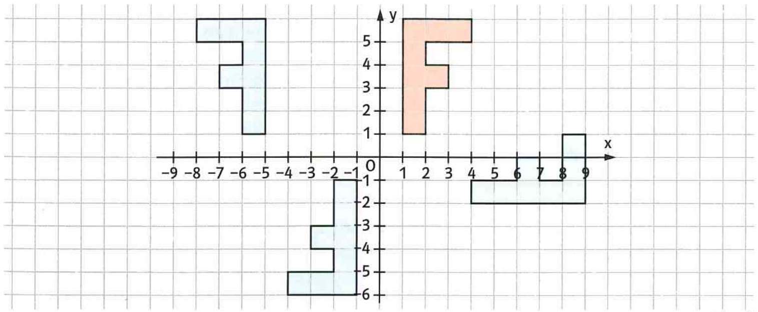
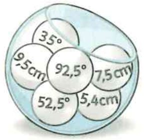


Fig. 2

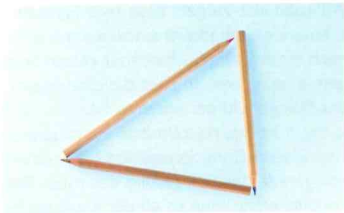
b) Beim Arbeiten mit Transparentfolie ist dir sicher aufgefallen, dass du manchmal die Folie wenden musstest. Bei welchen F aus Teil a) wäre ein Wenden erforderlich? Welche Spiegelung entspricht also dem Wenden der Folie?

2 Kongruente Dreiecke



Bei einem Dreieck kannst du sechs Größen messen; drei Seiten und drei Winkel. Karla hat ein Dreieck konstruiert und die sechs Größen auf Bälle geschrieben. Louis zieht vier Bälle und konstruiert ein Dreieck zu den Angaben. Jonas zieht drei Bälle.

Wenn man z.B. aus drei verschiedenen Buntstiften ein Dreieck legt, so erhält man – gleichgültig wie man beginnt – immer Dreiecke, die zueinander kongruent sind. Durch die Bleistifte sind die drei Seitenlängen des Dreiecks festgelegt und damit ist das Dreieck **eindeutig konstruierbar**. Auch wenn man drei andere geeignete Größen vorgibt, kann es dazu oft nur ein Dreieck geben.



In Fig. 3 ist es wichtig, dass die Seite, welche dem gegebenen Winkel gegenüber liegt größer ist als die andere gegebene Seite. Andernfalls kann es zwei verschiedene Dreiecke geben. (siehe Fig. 5).

Vergleiche dazu auch Aufgabe 5.

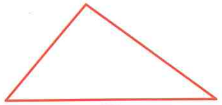


Fig. 1

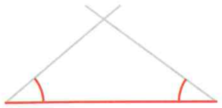


Fig. 2

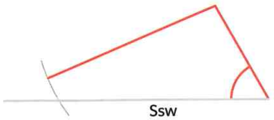


Fig. 3

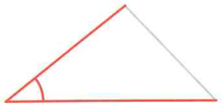


Fig. 4

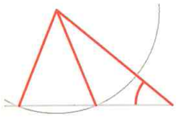


Fig. 5

Kennt man von einem Dreieck drei geeignete Größen, so kennt man bereits das ganze Dreieck!

Kongruenzsätze für Dreiecke
Zwei Dreiecke sind zueinander kongruent, wenn sie in folgenden Größen übereinstimmen:
- drei Seiten (sss)
- einer Seite und zwei Winkeln (wsw)
- zwei Seiten und dem der längeren Seite (S) gegenüberliegenden Winkel (Ssw)
- zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (sws).

Beispiel 1 Nachweis der Kongruenz
Welche der Dreiecke in Fig. 6 sind zueinander kongruent? Begründe.
Lösung:
Das blaue und das grüne Dreieck sind nach dem Kongruenzsatz sws zueinander kongruent, weil sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

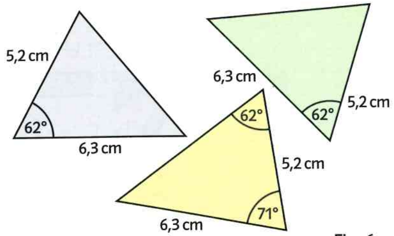


Fig. 6

Beispiel 2 Konstruktion mithilfe des Kongruenzsatzes wsw
Konstruiere ein Dreieck, bei dem eine Seite 6 cm misst, ein anliegender Winkel 41° und der gegenüberliegende Winkel 73°. Beschreibe die Konstruktion.
Lösung:
Für den zweiten anliegenden Winkel erhält man: 180° – 41° – 73° = 66°.
Man zeichnet eine Strecke der Länge 6 cm und trägt dort die beiden anliegenden Winkel ab (vier Möglichkeiten). Dort, wo sich die Schenkel schneiden, befindet sich der dritte Punkt des Dreiecks. Alle vier Lösungen sind zueinander kongruent.

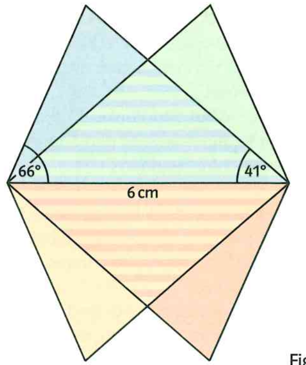
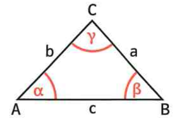


Fig. 1

Aufgaben

1 Kann man aus den Angaben schließen, dass die Dreiecke ABC und A'B'C' zueinander kongruent sind? Gib an, mit welchem Kongruenzsatz du argumentierst.
a) $c = 4\,cm$; $\alpha = 70°$; $\beta = 65°$ und $c' = 4\,cm$; $\alpha' = 70°$; $\gamma' = 45°$
b) $c = 8{,}7\,cm$; $\beta = 45°$; $\gamma = 67°$ und $c' = 8{,}7\,cm$; $\alpha' = 45°$; $\beta' = 67°$
c) $a = 7{,}8\,cm$; $c = 8{,}7\,cm$; $\alpha = 45°$ und $a' = 7{,}8\,cm$; $c' = 8{,}7\,cm$; $\alpha' = 45°$
d) $c = 4\,cm$; $b = 7\,cm$; $\alpha = 70°$ und $c' = 4\,cm$; $b' = 7\,cm$; $\alpha' = 70°$
e) $c = 7\,cm$; $b = 4\,cm$; $a = 5\,cm$ und $c' = 4\,cm$; $b' = 7\,cm$; $a' = 5\,cm$
f) Überlege dir selbst eine ähnliche Aufgabe und gib sie deinem Nachbarn zur Lösung.

Diese Bezeichnungen sind in einem Dreieck ABC üblich:



2 Welcher Kongruenzsatz garantiert die eindeutige Konstruierbarkeit des Dreiecks ABC? Konstruiere das Dreieck und beschreibe die Konstruktion. Entnimm der Zeichnung die restlichen Seiten und Winkel.
a) $a = 7{,}0\,cm$; $b = 4{,}8\,cm$; $c = 8{,}4\,cm$
b) $b = 3{,}8\,cm$; $\alpha = 35°$; $\gamma = 125°$
c) $a = 5{,}5\,cm$; $\alpha = 52°$; $\beta = 63°$
d) $a = 5{,}3\,cm$; $c = 3{,}9\,cm$; $\alpha = 40°$

Aufgabe 2 kannst du auch mit einem Geo-Programm bearbeiten.

3 Von einem Dreieck ABC sind die Seite $b = 5{,}3\,cm$ und der Winkel $\alpha = 30°$ gegeben.
a) Zeichne zwei Dreiecke mit diesen Angaben, die nicht zueinander kongruent sind.
b) Ergänze eine Angabe, so dass eine Aufgabe zum Kongruenzsatz wsw entsteht und konstruiere das Dreieck.
c) Ergänze eine Angabe, so dass eine Aufgabe zum Kongruenzsatz sws entsteht und konstruiere das Dreieck.

4 Formuliere eine Konstruktionsaufgabe zum Kongruenzsatz sws. Gib die Aufgabe deinem Nachbarn. Er soll das Dreieck konstruieren und seine Konstruktion beschreiben. Überprüfe dann, ob die Konstruktion richtig ist.

5 a) Konstruiere ein Dreieck, mit einer Seite der Länge 7,5 cm, einer weiteren Seite der Länge 6 cm sowie einem Winkel von 48°, welcher der zweiten Seite gegenüberliegt.
b) Erkläre, warum man zwei nicht kongruente Dreiecke erhält, welche die Bedingung erfüllen, obwohl doch zwei Seiten und ein Winkel sowie deren Lage vorgegeben sind.
c) Verändere bei der Aufgabe aus a) eine Angabe so, dass die Konstruktion eindeutig wird.

6 Das Dreieck ABC in Fig. 1 ist gleichschenklig. Die beiden Dreiecke ADC und DBC stimmen in zwei Seiten und einem Winkel überein.
a) Welche Seiten und Winkel sind dies?
b) Warum kann man hier den Kongruenzsatz Ssw nicht anwenden?

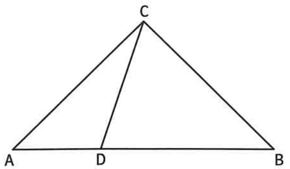


Fig. 1

7 Bei einem Dreieck ist eine Seite 7 cm lang. Ein an dieser Seite anliegender Winkel misst 50°. Welche Längen sind möglich für die Seite, welche diesem Winkel gegenüberliegt, damit man genau ein Dreieck konstruieren kann? Konstruiere.

8 Zeichne drei nicht zueinander kongruente Dreiecke, bei denen eine Seite 2,5 cm misst, ein Winkel 45° und ein anderer Winkel 82°.

Bist du sicher?

1 In Fig. 2 ist w die Winkelhalbierende von α. Begründe mithilfe eines Kongruenzsatzes, dass die Dreiecke STU und SUV zueinander kongruent sind.

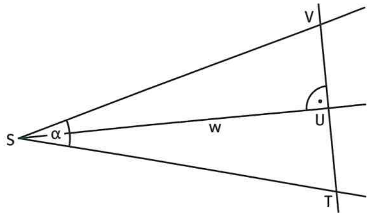
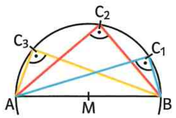


Fig. 2

2 Welcher Kongruenzsatz garantiert die eindeutige Konstruierbarkeit des Dreiecks ABC? Konstruiere das Dreieck und beschreibe die Konstruktion. Entnimm der Zeichnung die restlichen Seiten und Winkel.
a) $a = 3{,}5\,cm$; $b = 5{,}4\,cm$; $c = 7\,cm$
b) $c = 6\,cm$; $\beta = 42°$; $\gamma = 61°$

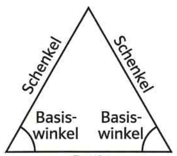
3 Zeichne zwei nicht kongruente Dreiecke mit $a = 5\,cm$; $b = 4\,cm$ und $\beta = 48°$.

Satz des Thales



9 Rechtwinklige Dreiecke
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit den gewünschten Eigenschaften. Bei welchen dieser Aufgaben gibt es verschiedene nicht kongruente Dreiecke als Lösung?
a) Eine Seite ist 3 cm lang und eine weitere 5 cm.
b) Der Thaleskreis hat einen Radius von 5 cm und ein Winkel misst 30°.
c) Eine Seite ist 5 cm lang und der Flächeninhalt beträgt 10 cm².
d) Eine Seite ist 5 cm lang und der Flächeninhalt beträgt 5 cm².

Bezeichnungen im gleichschenkligen Dreieck:



10 Gleichschenklige Dreiecke
a) Moritz behauptet: „Bei einem gleichschenkligen Dreieck muss ich nur zwei Größen kennen, um es eindeutig konstruieren zu können." Was meinst du dazu?
b) Moritz unterstreicht seine Behauptung, indem er drei „Kongruenzsätze für gleichschenklige Dreiecke" formuliert. Wie könnten die lauten?
c) Erfinde drei Konstruktionsaufgaben für gleichschenklige Dreiecke und gib sie deinem Nachbarn zur Lösung
d) Welche Angaben muss man kennen, um ein gleichseitiges Dreieck eindeutig konstruieren zu können?

In Ulm und um Ulm herum mit Theo Dolit

11 Auf dem Münsterplatz findet Theo im Boden vor dem Haupteingang des Münsters eine Tafel eingelassen, welche die Richtung und die Entfernung (Luftlinie) von Ulm zu verschiedenen Metropolen angibt. Er möchte mithilfe der Angaben auf der Tafel durch Konstruktion geeigneter Dreiecke folgende Entfernungen bestimmen.
a) London–Zürich
b) Amsterdam–Paris

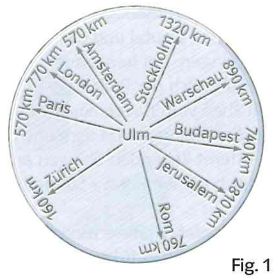


Fig. 1

Info

Winkelmessung im Gelände: der Theodolit
Möchte man den Winkel zwischen zwei markanten Punkten im Gelände messen, so verwendet man einen Theodoliten. Ein einfacher Theodolit, wie er auch an vielen Schulen vorhanden ist (Fig. 2), besteht aus einem Stativ, einer Peilvorrichtung und je einer horizontalen und einer vertikalen Winkelskala. Ein Theodolit zur Messung horizontaler Winkel kann auch selbst gebastelt werden (Fig. 3).


Fig. 2


Fig. 3

12 Um die Höhe des Münsterturms zu bestimmen, markiert Theo auf dem Münsterplatz eine 20 m lange Standlinie AB und peilt dann die Turmspitze mit einem Theodoliten von den Punkten A und B aus an. So ergeben sich die Höhenwinkel $\alpha = 69{,}5°$ und $\beta = 76°$. Bestimme durch Zeichnung in geeignetem Maßstab die Höhe des Münsterturms.

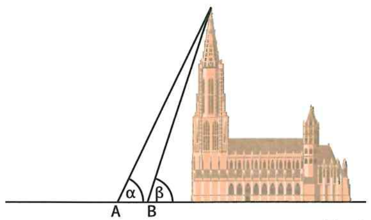


Fig. 4

13 a) Theo blickt von der Stadtmauer auf die Donau. Er weiß, dass die Stadtmauer 20 m höher als der Wasserspiegel der Donau liegt. Nun peilt er die beiden Flussufer an und möchte damit die Breite der Donau bestimmen (Fig. 5).

Fig. 5

b) Auf der Donau fährt ein Ausflugsboot. Es ist 150 m von Theos Standpunkt auf der Stadtmauer entfernt. Der Winkel zwischen der Fahrtrichtung und der Richtung zum Standpunkt beträgt 68°. Zwei Minuten später beträgt der entsprechende Winkel 138° (Fig. 6). Bestimme daraus die zurückgelegte Strecke und die Geschwindigkeit des Bootes.

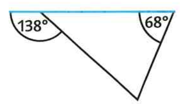


Fig. 6

14 In Ulm startet Theo zu einer Ballonfahrt durch das Blautal und das Schmiechtal nach Ehingen. Um herauszufinden, in welcher Höhe sich der Ballon gerade befindet, peilt Theo vom Ballon aus die Kirchtürme von Allmendingen und dem noch 7 km davon entfernt liegenden Ehingen an. Es ergeben sich die Winkel $\alpha = 50°$ und $\beta = 8°$.

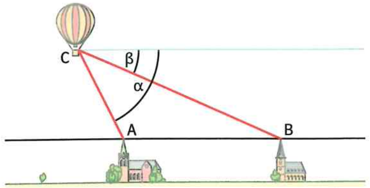


Fig. 1

15 Die Ballonfahrt führte zunächst von Ulm aus direkt in das 16 km Luftlinie entfernte Blaubeuren und von dort auf direktem Weg nach Ehingen (weitere 15 km Luftlinie).
Nach der Landung auf dem Ehinger Marktplatz ist das Auto mit Ballon im Hänger zurück zum Ulmer Münsterplatz gefahren, laut Tacho eine Strecke von 28 km. Untersuche durch Konstruktion eines geeigneten Dreiecks, um wie viel die Strecke von Ehingen nach Ulm mit dem Ballon (also Luftlinie) kürzer wäre als die Fahrt auf der Straße. Gib den Unterschied auch in Prozent an.

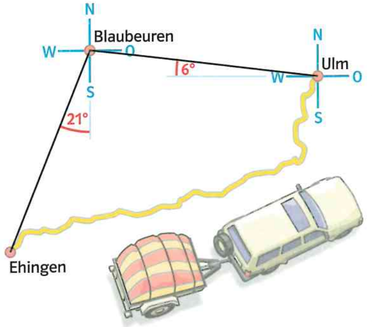


Fig. 2

Kleines Projekt

16 Nehmt euch ein Beispiel an Theo und geht auf Entdeckungsreise in eurer Stadt. Die Notizzettel helfen euch, eure Arbeit zu planen und aufzuteilen.

Auswahl: Welche Größen sollen bestimmt werden?

Strategie: Welche Größen müssen gemessen werden, um die gesuchte Größe ermitteln zu können?

Vermessung: Welche Messwerkzeuge werden benötigt?

Konstruktion: Welche Kongruenzsätze werden benötigt?

Präsentation: Wo und wie werden die Ergebnisse vorgestellt?

Gehe von der Mündung an der Iller entlang 100 m flussaufwärts. Die Ersparnisse sind von dort genau 80 m entfernt am Ufer der Donau vergraben.

17 Ach ja, und dann war da noch Theos Erbonkel. Der hatte seine ganzen Ersparnisse am Ufer der Donau in der Nähe der Illermündung vergraben. Ordentlich wie er war, hat er eine korrekte Lagebeschreibung hinterlassen. Trotzdem finden seine Erben das Geld nicht. Woran kann das liegen? Konstruiere in geeignetem Maßstab und beachte dabei, dass die Iller unter einem Winkel von 34° in die Donau mündet.

Kannst du das noch?

18 a) Beschreibe, wie man vorgeht, wenn man die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{8}{7}$ addiert.
b) Hannah hat auf dem Markt $\frac{1}{4}$ kg Erdbeeren, 600 g Zwetschgen und ein halbes Kilogramm Äpfel eingekauft. Wie schwer sind ihre Einkäufe insgesamt?

19 a) Ordne die folgenden Bruchzahlen der Größe nach: $\frac{7}{11}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$.
b) Gib fünf Bruchzahlen an, die zwischen 0,2 und 0,3 liegen.

3 Figuren im Raum


Fig. 1

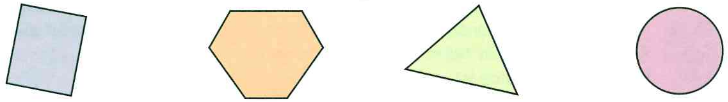


Fig. 2

Wenn man die abgebildeten Körper durchschneidet, so entstehen – je nach dem, wie man den Schnitt ansetzt – die unterschiedlichsten Schnittflächen (Fig. 2). Du lernst nun, wie man durch geschicktes Erkennen solcher Schnittflächen schwer zugängliche Größen im Raum auf einem Blatt Papier bestimmen kann.

Ein Autovermieter gibt für den quaderförmigen Laderaum seines Kleinlasters folgende Maße an: L 4,56 m; B 1,80 m; H 1,90 m.
Es soll untersucht werden, ob ein Stabhochspringer in diesem Auto problemlos seinen 5,10 m langen Stab unterbringen könnte. Dazu geht man in vier Schritten vor.

1. Skizze anfertigen
Der Laderaum ist ein Quader. Ein Stab, der im Laderaum transportiert werden soll, darf höchstens so lang sein wie die Raumdiagonale des Quaders.

2. Schnittfläche und geeignetes Dreieck finden
Das blaue Dreieck enthält die gesuchte Raumdiagonale d (rot). Um dieses Dreieck konstruieren zu können, muss man aber erst die Länge der Bodendiagonale d_1 (orange) kennen.

3. Maßstab wählen, Dreieck(e) konstruieren
Es ergeben sich vernünftige Längen in cm, wenn man die gegebenen Maßzahlen mit 2 multipliziert (z. B. $4{,}56 \cdot 2 \approx 9{,}1$). Das entspricht einem Maßstab von 1 : 50. Dann kann man zunächst das grüne Dreieck und dann das blaue Dreieck konstruieren.

4. Gesuchte Größe messen, umrechnen und überprüfen
Die Länge der roten Strecke beträgt etwa 10,5 cm. Bei dem gewählten Maßstab ergibt sich für die Raumdiagonale eine Länge von $10{,}5\,\text{cm} \cdot 50 = 5{,}25\,\text{m}$. Der Wert scheint plausibel; damit passt der Stab in den Kleinlaster.

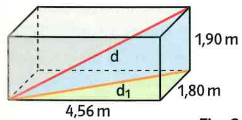


Fig. 3

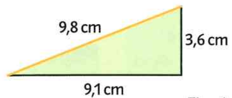


Fig. 4

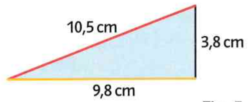


Fig. 5

So kann man schwer zugängliche Größen im Raum bestimmen:
1. Man fertigt eine Skizze der Situation an.
2. Man sucht eine Schnittfläche mit einem Dreieck, das die gesuchte Größe enthält.
3. Man wählt einen geeigneten Maßstab und konstruiert das Dreieck.
4. Man misst die konstruierte Länge, rechnet sie anhand des Maßstabs um und überprüft, ob sich ein sinnvoller Wert ergibt.

Beispiel (geeignete Dreiecke betrachten)
Die Cheopspyramide in Ägypten besitzt eine quadratische Grundfläche mit der Seitenlänge a = 230 m. Die Kantenlänge beträgt 219 m. Bestimme ihre Höhe.
Lösung:
Die gesuchte Höhe entspricht der Strecke $\overline{MS}$ in Fig. 1. Sie ist z. B. im Dreieck AMS enthalten. Wählt man den Maßstab 1 : 2000, so entsprechen 230 m 11,5 cm und 219 m 10,95 cm. Zunächst bestimmt man die Strecke $\overline{AM}$, indem man die Grundfläche maßstabsgetreu konstruiert (Fig. 2). Damit konstruiert man das Dreieck AMS (Fig. 3) und erhält für die Strecke $\overline{MS}$ 7,4 cm; das entspricht 148 m.
Die Cheopspyramide ist etwa 148 m hoch.

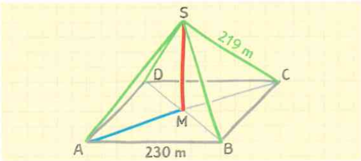


Fig. 1

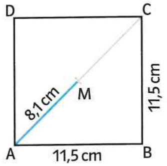


Fig. 2

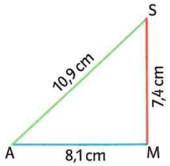


Fig. 3

Aufgaben

1 Der Zauberer Agnus Rivus hat einen 30 cm hohen Zylinder mit einem Innendurchmesser von 26 cm. Kann er darin seinen 14 Zoll langen Zauberstab verschwinden lassen?

2 a) Zeige, dass der Besen von Agnus Rivus nicht in den abgebildeten Schrank passt.
b) Wie hoch müsste der Schrank sein, damit Agnus darin seinen Besen verstauen kann?

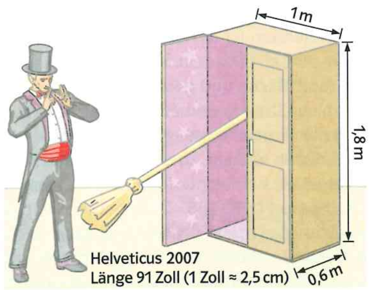


Fig. 4

Für einen solchen Trichter gilt die Volumenformel:
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.
G = Grundfläche
h = Höhe

3 Der abgebildete Trichter ist 1 m hoch und besitzt eine quadratische Grundfläche mit ebenfalls 1 m Seitenlänge.
a) Wie viel Flüssigkeit befindet sich im Trichter, wenn dieser bis zum oberen Rand gefüllt ist?
b) Wie viel Flüssigkeit befindet sich im Trichter, wenn er nur bis zur halben Höhe gefüllt ist? Welchem Anteil (in %) entspricht dies?

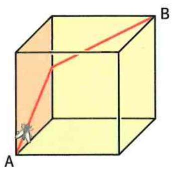


Fig. 5

4 Eine Fliege kann vom Punkt A zum Punkt B in einer würfelförmigen Schachtel der Kantenlänge 50 cm entweder krabbeln oder auf direktem Weg fliegen (Fig. 5).
a) Ermittle durch Konstruktion in geeignetem Maßstab die Länge beider Strecken.
b) Gib an, um wie viel Prozent die eingezeichnete Krabbelstrecke länger ist als die kürzeste Flugstrecke.

Bist du sicher?

1 Ein Aufzug ist 1,50 m breit, 1,80 m tief und 2,30 m hoch. Wie lang können Gegenstände maximal sein, wenn man sie mit dem Aufzug transportieren möchte?

2 Am Äquator beträgt der Radius der Erde 6378 km. Wenn man die Erde auf Höhe des Äquators umrunden möchte, legt man rund 2 · 3,14 · 6378 km ≈ 40 000 km zurück. Freiburg liegt auf dem 48. Breitengrad. Welchen Weg muss man zurücklegen, um die Erde längs des 48. Breitengrads zu umrunden?

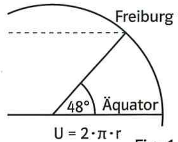


Fig. 1

5 Zu den Pyramiden von Gizeh zählen neben der Cheops-Pyramide noch die Chepren-Pyramide und die Mykerinos-Pyramide.
a) Die Mykerinos-Pyramide hat eine quadratische Grundfläche mit einer Seitenlänge von 108 m. Ihr Neigungswinkel beträgt 51,3° (vgl. Fig. 2). Bestimme aus diesen Angaben die Höhe der Pyramide.
b) Im Beispiel auf der vorherigen Seite wurde zur Ermittlung der Höhe der Cheops-Pyramide ein Dreieck betrachtet, das beim Schnitt durch die Pyramide längs einer Bodendiagonalen entsteht. Bestimme erneut die Höhe der Cheops-Pyramide, indem du die Schnittfläche betrachtest, die entsteht, wenn man längs einer Seitenhalbierenden schneidet (vgl. Fig. 2)
c) Die Chepren-Pyramide besitzt die gleiche Grundfläche wie die Cheops-Pyramide, war aber ursprünglich nur 143,5 m hoch. Bestimme die Kantenlänge und den Neigungswinkel der Pyramide.

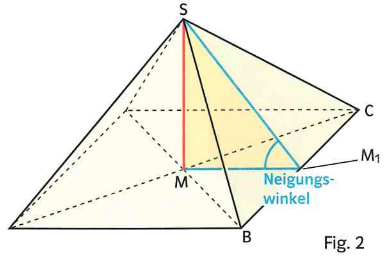
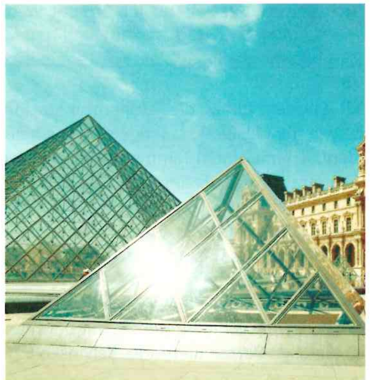


Fig. 2


Die Pyramiden von Gizeh sind eines der sieben Weltwunder der Antike.

6 Die Glaspyramide vor dem Louvre ist quadratisch mit einer Grundseitenlänge von 34,2 m und einer Höhe von 21,6 m.
a) Bestimme die Kantenlänge der Pyramide.
b) Ermittle durch Konstruktion und Rechnung, wie viele Quadratmeter Glas für die Pyramide benötigt wurden.
c) Wie schwer ist die Pyramide, wenn das verwendete Glas 42,5 kg pro m^2 wiegt?
d) Die Pyramide vor dem Louvre soll, was die Maße angeht, nur eine Miniaturausgabe der Cheopspyramide sein. Überprüfe.
e) Auch die kleine Pyramide hat dieselben Proportionen wie ihre großen Vorbilder. Die Seiten dieser Pyramide sind 7,6 m lang. Berechne ihre Höhe.


Die Metallkonstruktion der Pyramide wiegt 100 t.
Wie groß ist der Glasanteil am Gesamtgewicht?

Grundseite: 6,8 cm
Schenkel: 9,7 cm

Seitenlänge: 6,8 cm

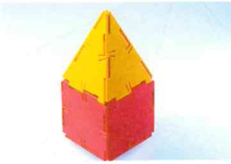
Seitenlänge 6,8 cm

Seitenlänge 6,8 cm

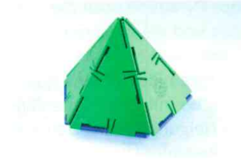
7 Mit einem Geometriebaukasten kann man viele interessante Körper bauen. Die einzelnen Bauteile haben die auf dem Rand angegebenen Maße.
Bestimme damit jeweils die Höhe der unten abgebildeten Körper.

Oktaeder

Tetraeder



Würfel mit aufgesetzter Pyramide



Fünfeckspyramide

8 Ein 12 m langes und 6 m breites Haus besitzt ein 2,4 m hohes Walmdach. Der Dachfirst ist 9 m lang.
a) Berechne die Oberfläche des Daches, nachdem du die benötigten Größen konstruiert hast.
b) Wie viele Ziegel werden benötigt, wenn ein Ziegel eine Fläche von rund 34 cm x 20 cm bedeckt und mit einem Verschnitt von ca. 12 % gerechnet werden muss, weil die Dachflächen nicht rechteckig sind.

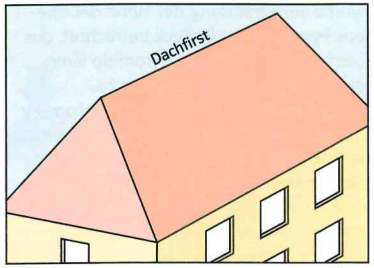
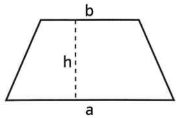


Fig. 1



$A = \frac{a+b}{2} \cdot h$

9 Wie lang müssen die Stangen eines Zeltes sein, das als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 2 m hat, wenn es in der Mitte 2,5 m hoch sein soll?

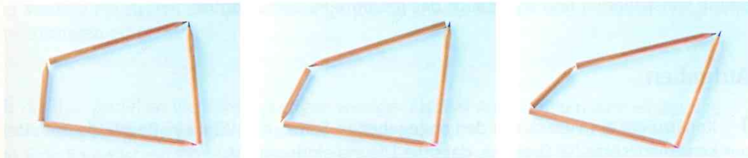
Kannst du das noch?

10 Physiker geben die Temperatur statt in °Celsius oft in Kelvin an. Die Kelvinskala ist wie die Celsiusskala eingeteilt, das heißt, ein Temperaturunterschied von 19 °C ist identisch mit einem Temperaturunterschied von 19 K. 0 K entsprechen −273,15 °C. Diese Temperatur wird als absoluter Nullpunkt bezeichnet, da eine tiefere Temperatur nicht möglich ist.
a) Der kälteste Ort der Erde ist Ojmjakon in Sibirien. Der Temperaturrekord dort steht bei 195,3 K. Wie viel °C sind das?
b) Am wärmsten wird es im Death Valley in Kalifornien. Dort wurden schon einmal 56 °C gemessen. Welcher Temperatur in Kelvin entspricht dies?
c) Gib jeweils eine Formel an, mit der man Kelvin in °C umrechnen kann und umgekehrt.
d) Welchen Vorteil bietet die Kelvinskala beim Berechnen von Temperaturunterschieden?

4 Konstruktion von Vierecken

Du weißt inzwischen, dass Dreiecke sich eindeutig konstruieren lassen, wenn man nur drei geeignete Größen (Seitenlängen oder Winkel) kennt. Wir untersuchen nun, ob es für allgemeine oder spezielle Vierecke ebenfalls solche Kongruenzsätze gibt.

Wenn man aus vier verschiedenen Buntstiften ein Viereck legen möchte, so stellt man fest, dass es – anders als bei Dreiecken – viele verschiedene Möglichkeiten gibt.



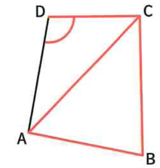
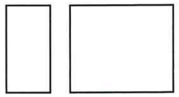


Fig. 1

Das Viereck ABCD in Fig. 1 ist dagegen durch die fünf rot markierten Angaben eindeutig festgelegt. Man kann dies mit den Kongruenzsätzen für Dreiecke begründen: Die Diagonale AC zerlegt das Viereck in die Dreiecke ABC und ACD. Das Dreieck ABC ist nach dem Kongruenzsatz sss eindeutig konstruierbar, das Dreieck ACD ist nach dem Kongruenzsatz Ssw eindeutig konstruierbar. Also sind zwei Vierecke, die in diesen Angaben übereinstimmen, zueinander kongruent.

Andererseits gibt es auch Vierecke, die in 5 oder mehr Stücken übereinstimmen und nicht zueinander kongruent sind:



Zum Nachweis der Kongruenz bei Vierecken sind fünf geeignete Angaben notwendig.

Beispiel 1 Eindeutige Konstruktion
Konstruiere ein Viereck mit den angegebenen Seiten und Winkeln. Beschreibe die Konstruktion und begründe mithilfe der Kongruenzsätze für Dreiecke, dass die Lösung eindeutig ist.
a = 6 cm; b = 4,5 cm; d = 6,8 cm; α = 110°; β = 78°
Lösung:
Zeichne die Strecke $\overline{AB}$ = 6 cm. In A trägt man die Strecke $\overline{AD}$ = 6,8 cm unter einem Winkel von α = 110° ab. In B trägt man die Strecke $\overline{BC}$ = 4,5 cm unter einem Winkel von β = 78° ab. Dann verbindet man die Punkte C und D.
Die Dreiecke ABD und ABC sind nach dem Kongruenzsatz sws eindeutig konstruierbar. Damit sind auch alle Eckpunkte des Vierecks eindeutig festgelegt.

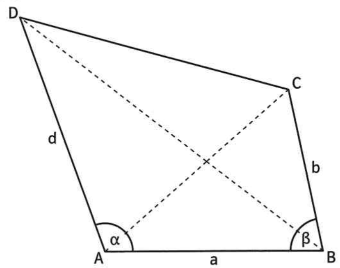
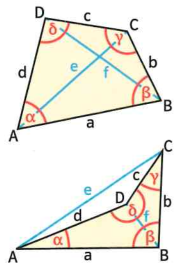


Fig. 2

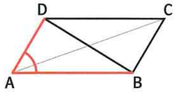
Bezeichnungen im Viereck:



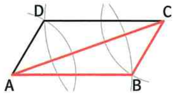
Beispiel 2 Spezielle Vierecke: Parallelogramme

Wie viele Angaben (Seiten, Winkel, Diagonalen) benötigt man, um ein Parallelogramm eindeutig konstruieren zu können? Finde zwei Kongruenzsätze für Parallelogramme und begründe sie mithilfe der Kongruenzsätze für Dreiecke.

Lösung:



„sws"



„sds"

Ein Parallelogramm ist eindeutig konstruierbar, wenn man drei geeignete Größen kennt. Zwei Parallelogramme sind kongruent, wenn sie in folgenden Größen übereinstimmen:

- zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (sws)
- zwei Seiten und einer Diagonalen (sds)

Begründung für den Kongruenzsatz sws:
Nach dem gleichnamigen Kongruenzsatz für Dreiecke ist das Teildreieck ABD eindeutig konstruierbar. Den Punkt C erhält man, indem man den Punkt A an der Mitte der Strecke BD spiegelt. Damit ist auch dieser Punkt eindeutig konstruiert.

Begründung für den Kongruenzsatz sds:
Nach dem Kongruenzsatz sss für Dreiecke sind die beiden Teildreiecke ABC und ACD eindeutig konstruierbar und somit auch das gesamte Parallelogramm.

Aufgaben

1 Konstruiere ein Viereck mit den angegebenen Seiten und Winkeln. Begründe mithilfe der Kongruenzsätze für Dreiecke, dass die Lösung eindeutig ist.
a) $\alpha = 32°$; $a = 6\,cm$; $b = 1{,}5\,cm$; $d = 4\,cm$; $e = 5{,}5\,cm$
b) $\alpha = 68°$; $\beta = 80°$; $\delta = 98°$; $b = 3\,cm$; $f = 4{,}5\,cm$
c) $a = 3\,cm$; $b = 4{,}5\,cm$; $\beta = 118°$; $\gamma = 20°$; $\delta = 190°$

2 a) Konstruiere beide möglichen Vierecke aus den Stücken $a = 4{,}4\,cm$; $b = 2{,}3\,cm$; $c = 3{,}3\,cm$; $\alpha = 60°$; $e = 4{,}9\,cm$. Wie muss man die Angabe für c bzw. e abändern, damit die Konstruktion eindeutig wird? Argumentiere mit einem der Kongruenzsätze für Dreiecke.
b) Es gibt zwei Vierecke mit $a = 6{,}2\,cm$; $b = 2{,}1\,cm$; $c = 3{,}8\,cm$; $d = 3{,}9\,cm$ und $f = 5{,}8\,cm$. Konstruiere sie und erkläre warum es zwei Lösungen gibt, obwohl die Teildreiecke BCD und ABD durch den Kongruenzsatz sss eindeutig festgelegt sind.
c) Konstruiere alle vier möglichen Vierecke mit $a = 7\,cm$; $b = 3{,}6\,cm$; $c = 1{,}6\,cm$; $f = 4{,}5\,cm$ und $\alpha = 35°$. Erkläre, wie es zu den vier Fällen kommt, indem du die Teildreiecke ABD und BCD betrachtest.

3 Beim Viereck ABCD in Fig. 1 sind alle Stücke gegeben.
a) Suche fünf geeignete Stücke heraus, durch die das Viereck eindeutig bestimmt ist. Konstruiere das Viereck aus diesen fünf Stücken und begründe, warum die Konstruktion eindeutig ist.
b) Suche fünf Stücke heraus, durch die das Viereck nicht eindeutig bestimmt ist. Konstruiere zwei nicht kongruente Vierecke, die in diesen fünf Stücken übereinstimmen und erkläre, warum das Viereck in diesem Fall nicht eindeutig bestimmt ist.

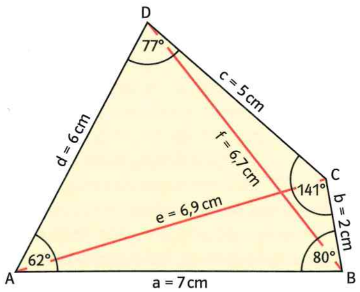


Fig. 1

4 Welche der folgenden „Kongruenzsätze für Vierecke" sind richtig? Finde Gegenbeispiele oder begründe, warum die Sätze stimmen.
Zwei Vierecke sind zueinander kongruent, wenn sie übereinstimmen in
a) vier Winkeln und einer Seite
b) drei Seiten und den eingeschlossenen Winkeln
c) zwei Seiten, dem eingeschlossenen Winkel und den beiden anliegenden Winkeln
d) allen vier Seiten und einer Diagonalen.

5 Erfindet selbst „richtige und falsche Kongruenzsätze" wie in Aufgabe 4 und überprüft gegenseitig eure Vorschläge.

Bist du sicher?

1 Ein Viereck besitzt die Seitenlängen $a = 7\,cm$; $b = 4{,}5\,cm$; $c = 6\,cm$ und $d = 5\,cm$.
a) Konstruiere zwei nicht kongruente Vierecke mit diesen Maßen.
b) Ergänze die gegebenen Seitenlängen um eine weitere Angabe (Länge einer Diagonalen oder Weite eines Winkels). Untersuche, ob die Konstruktion damit eindeutig wird.
c) Variiere die zusätzliche Größe so lange, bis du jeweils zwei nicht zueinander kongruente Lösungen erhältst.

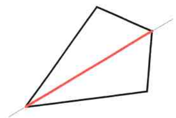
Diese Aufgabe eignet sich zum Experimentieren mit einem Geo-Programm.

6 Bei speziellen Vierecken genügen weniger als fünf Angaben, um eine eindeutige Konstruierbarkeit zu gewährleisten.
a) Eine Raute ist ein Parallelogramm, bei dem alle Seiten gleich lang sind. Überlege, wie viele Angaben notwendig sind, um eine Raute eindeutig festzulegen. Formuliere einen Kongruenzsatz für Rauten und stelle deinem Nachbarn zwei Konstruktionsaufgaben zu diesem Satz.
b) Weil bei einem Trapez mindestens ein Seitenpaar parallel zueinander ist, genügen vier geeignete Stücke, um ein Trapez eindeutig zu bestimmen. Formuliere einen Kongruenzsatz und löse eine Konstruktionsaufgabe dazu, die du dir selbst ausgedacht hast.

Wie würde ein Kongruenzsatz für Quadrate lauten?

7 Konstruiere, falls möglich, aus $a = 5\,cm$; $b = 4\,cm$ und $e = 7\,cm$
a) ein Parallelogramm b) einen Drachen c) ein Rechteck d) ein Trapez.
In welchen Fällen ist die Konstruktion eindeutig?

Bei einem Drachen ist eine Diagonale Symmetrieachse.



8 Konstruiere jeweils den Querschnitt des Dammes (Fig. 1) im Maßstab 1:200.
a) Dammsohle 16 m; Dammkrone 6 m; Dammhöhe 3,8 m
b) Dammsohle 14 m; Dammhöhe 3,2 m; Böschungswinkel 35°
c) Böschungslänge 7 m; Dammkrone 4,5 m; Böschungswinkel 40°

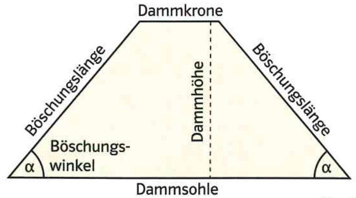


Fig. 1

Kannst du das noch?

9 a) Zeichne einen beliebigen Winkel mit dem Scheitel S und den Schenkeln g und h. Konstruiere die Winkelhalbierende w und zeichne durch einen beliebigen Punkt P auf g die Parallele zu h. Der Schnittpunkt mit w sei Q.
b) Betrachte das Dreieck SPQ. Um welches spezielle Dreieck handelt es sich dabei?
c) Begründe, warum bei dieser Konstruktion immer ein solches spezielles Dreieck entsteht.
d) Wie muss man den Winkel in a) wählen, damit ein rechtwinkliges Dreieck entsteht?

1 Knoten = 1 Seemeile pro Stunde

1 Seemeile = 1852 m

10 Bei einer Schaukel – wie auf dem Bild – kann man das Sitzbrett seitlich hin- und herbewegen. Es ist 3,20 m lang; im Ruhezustand hängt es 2 m unter der oberen Querstange und 0,5 m über dem Boden.
a) Zeichne die Schaukel mit dem Boden im Maßstab 1 : 50 in der Ruhestellung.
b) Trage in die Zeichnung den Gefahrenbereich ein, in dem man von der schwingenden Schaukel getroffen werden kann.
c) Konstruiere eine Schaukelstellung, bei der das Sitzbrett 1 m seitlich ausschwenkt. Wie weit befindet sich dann das Sitzbrett über dem Boden?

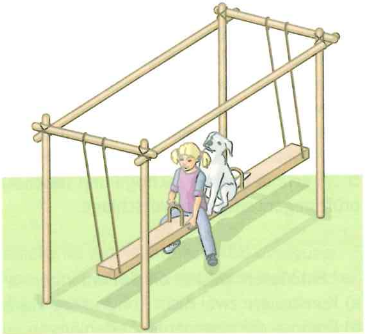


Fig. 1

11 Ein Dampfer fährt parallel zur geradlinigen, 6 km entfernten Nordseeküste mit einer Geschwindigkeit von 12 Knoten. Der Winkel zwischen Fahrtrichtung und dem Leuchtturm „Blink Fuer" beträgt 70°. Einige Zeit später kommt der Leuchtturm „Üs Küs" in Sicht. Der Winkel zwischen Fahrtrichtung und „Üs Küs" beträgt nach genau einer halben Stunde Fahrt 82°. Wie weit sind die beiden Leuchttürme voneinander entfernt? Konstruiere.

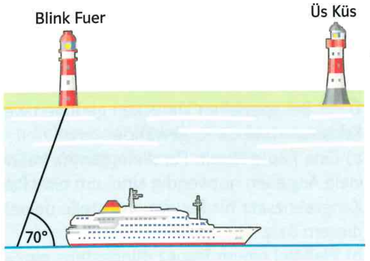


Fig. 2

12 Die Kurbel des Wagenhebers kann so lange gedreht werden, bis das Stück d nur noch 10 cm lang ist (Fig. 3).
Welche Höhe vom Boden aus kann der Punkt C höchstens erreichen?
Zeichne.

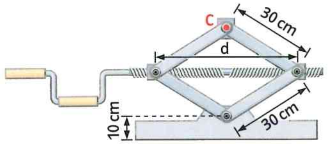


Fig. 3

13 Oft ist es wichtig, dass Vierecke stabil sind, umgekehrt kann es aber auch sein, dass Vierecke für bestimmte Zwecke gerade beweglich sein sollten.
a) Für welche Zwecke benötigt man stabile Vierecke? Wie wird die Stabilität erreicht? Wo kommen im Alltag bewegliche Vierecke vor und warum sind sie beweglich? Schreibe einen kleinen Text darüber. Die Bilder helfen dir sicher dabei.


Fig. 4


Fig. 5

b) Sucht Vierecke in und um eure Schule herum. Untersucht, ob und wie sie stabilisiert sind. Fotografiert sie und erstellt ein Plakat.

Info

Gelenkvierecke mit einem Geometrieprogramm konstruieren
So konstruiert man ein Gelenkviereck mit den Streckenlängen
a = 6 cm; b = 5,5 cm; c = 3,8 cm und d = 6,2 cm:
1. Zeichne die Strecke $\overline{AB}$ mit der Streckenlänge a = 6 cm.
2. Zeichne die Strecke $\overline{BC}$ mit der Streckenlänge b = 5,5 cm.
3. Zeichne einen Kreis um C mit Radius c = 3,8 cm.
4. Zeichne einen Kreis um A mit Radius d = 6,2 cm.
5. Markiere die Schnittpunkte D_1 und D_2 der beiden Kreise.

Die Vierecke $ABCD_1$ und $ABCD_2$ kann man durch Ziehen an den Punkten B und C verändern. Dabei kann es passieren, dass sich bei einem der beiden Vierecke die Strecken schneiden (Fig. 1). Solche Vierecke „zählen" nicht.

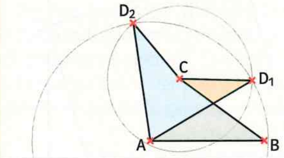


Fig. 1

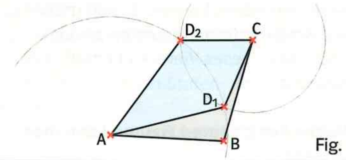


Fig. 2

14 Geo Konstruiere ein Gelenkviereck mit den Seitenlängen a = 11 cm; b = 10 cm; c = 6 cm und d = 7 cm. Damit die Übersicht nicht verloren geht, soll hier nur eines der beiden möglichen Vierecke betrachtet werden (Fig. 3)
a) Ermittle durch Ziehen den größtmöglichen Wert für α bzw. β. Überlege dann, wie man diesen Wert mit einer Konstruktion ermitteln könnte.
b) Finde durch Ziehen heraus, für welchen Winkel α bei D ein rechter Winkel entsteht.
c) Untersuche, für welchen Winkel α die Strecke $\overline{CD}$ parallel zur Strecke $\overline{AB}$ ist. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Winkeln α und δ? Begründe.
d) Konstruiere das in b) gesuchte Viereck. Ist die Konstruktion eindeutig?

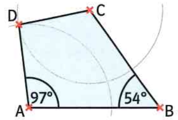


Fig. 3

15 Geo Konstruiere die Gelenkvierecke $ABCD_1$ bzw. $ABCD_2$ mit a = 7 cm; b = 5 cm; c = 8 cm und d = 6 cm. Miss die Länge e der Diagonalen $\overline{AC}$.
a) Für welche Diagonalenlängen gibt es mindestens ein Viereck? Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Seitenlängen und den gefundenen Grenzen?
b) Für welche Diagonalenlängen gibt es zwei verschiedene Vierecke?
c) Wie kann man die kleinstmögliche Diagonalenlänge e, für die es zwei verschiedene Vierecke gibt, durch Konstruktion ermitteln?

Tipp zu Teil c):

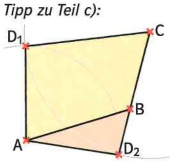


Fig. 4

16 Geo a) Konstruiere zwei frei bewegliche Vierecke $ABCD_1$ bzw. $ABCD_2$ mit a = 7 cm; b = 3,6 cm; c = 1,6 cm und f = 4,5 cm.
b) Wenn man den Punkt C bewegt, so gibt es insgesamt vier Positionen, also vier verschiedene Vierecke, bei denen α = 35° ist. Gib für diese vier Vierecke jeweils den Winkel β an.
c) Für welchen Wert von α gibt es nur noch zwei Vierecke? Wie kann man diesen Wert durch Konstruktion ermitteln?

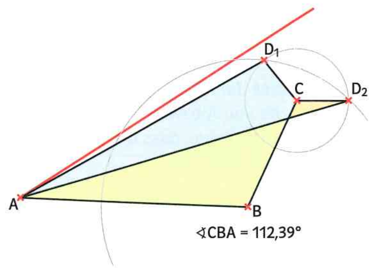


Fig. 5

Tipp zu Teil b): Zeichne bei A einen 35°-Winkel ein. Wenn die Punkte D_1 und D_2 auf diesem Schenkel (rot) liegen, haben die Vierecke die gewünschte Eigenschaft. (vgl. Fig. 5)

5 Begründen mit Kongruenzsätzen

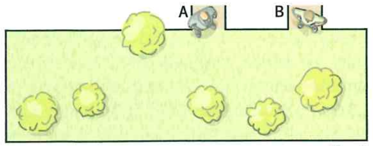


Fig. 1

Zu einem großen Grundstück existieren zwei Zufahrten A und B. Das Grundstück soll durch eine gerade Grenze so in zwei gleiche Grundstücke eingeteilt werden, dass jeder Besitzer eine Zufahrt benutzen kann.

Wenn man bei einem Quadrat auf den Seiten gleich lange Strecken abträgt, entsteht ein neues Viereck. Es soll mithilfe von Kongruenzüberlegungen gezeigt werden, dass dieses Viereck ebenfalls ein Quadrat ist.

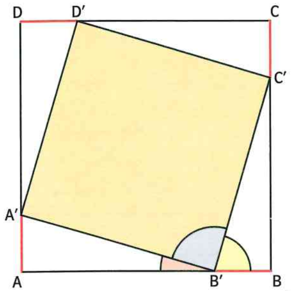


Fig. 2

1. Welche kongruenten Figuren kann man erkennen?
Die Dreiecke AB'A', BC'B', CD'C' und DA'D' sind nach dem Kongruenzsatz sws zueinander kongruent.

2. Was folgt aus der Kongruenz dieser Figuren?
- Die Strecken $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$ und $\overline{D'A'}$ sind gleich lang, weil in zueinander kongruenten Dreiecken einander entsprechende Seiten gleich lang sind.
- Der gestreckte Winkel an den Punkten A', B', C' bzw. D' setzt sich jeweils zusammen aus den beiden spitzen Winkeln der Dreiecke (grün und gelb in Fig. 2) und dem unbekannten Innenwinkel des Vierecks (blau). Nach dem Winkelsummensatz ist der blaue Winkel dann 90° groß. Damit ist das Viereck A'B'C'D' ein Quadrat.

Wenn man geometrische Zusammenhänge mithilfe von Kongruenzsätzen begründen möchte, so kann man folgendermaßen vorgehen:
1. Man sucht nach kongruenten Figuren und weist deren Kongruenz nach.
2. Man zieht Schlussfolgerungen aus der Kongruenz der Figuren und bestätigt so den geometrischen Zusammenhang.

Beispiel
In Fig. 3 ist M die Mitte von $\overline{AB}$. $\overline{BF}$ und $\overline{AG}$ sind die Lote von A bzw. B auf die Gerade durch C und M. Zeige, dass die Strecken $\overline{BF}$ und $\overline{AG}$ gleich lang sind.
Lösung:
1. Die Dreiecke AGM und MBF sind nach dem Kongruenzsatz wsw zueinander kongruent.
2. Deshalb gilt $\overline{AG} = \overline{BF}$.

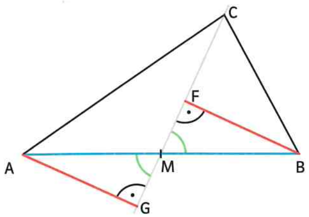


Fig. 3

Aufgaben

1 Zeichne ein gleichseitiges Dreieck. Trage an allen Seiten gleich lange Strecken ab und verbinde die Schnittpunkte (Fig. 1). Zeige, dass auch das so entstandene Dreieck gleichseitig ist.

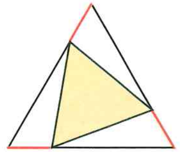


Fig. 1

2 Zeichne einen Kreis und einen Durchmesser $\overline{AB}$ des Kreises sowie von A und B aus vier gleich lange Sehnen. Begründe, dass jeweils gegenüberliegende Sehnen parallel sind.
a) Benutze Stufen- und Wechselwinkel sowie den Kongruenzsatz sss.
b) Benutze den Satz des Thales und den Kongruenzsatz Ssw.

3 Zeichne ein Viereck bei dem gegenüberliegende Seiten gleich lang sind.
a) Um welche Art von Viereck scheint es sich zu handeln?
b) Zeige mithilfe eines Kongruenzsatzes, dass gegenüberliegende Winkel in diesem Viereck gleich groß sind
c) Bestätige deine Vermutung, indem du mithilfe von b) und von Stufen- und Wechselwinkeln zeigst, dass gegenüberliegende Seiten parallel sind.

4 In Fig. 2 ist ein Halbkreis abgebildet. Die Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ sind gleich lang. Zeige mithilfe von Kongruenzsätzen und dem Satz des Thales, dass dann das Dreieck ABC gleichschenklig ist.
Anleitung: Zeige zunächst, dass die Dreiecke ABF und ABE zueinander kongruent sind. Weise damit die Kongruenz von zwei weiteren Teildreiecken nach und schließe dann auf die Behauptung.

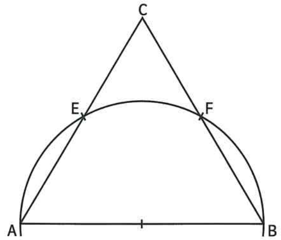


Fig. 2

5 a) In Fig. 3 ist das Dreieck ABC gleichseitig. Die Strecken $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ und $\overline{CF}$ sind gleich lang. Übertrage die Figur in dein Heft und zeige, dass auch das grüne Dreieck gleichseitig ist.
b) Zeichne ein Quadrat und konstruiere auf gleiche Art wie bei dem Dreieck aus Fig. 3 ein Innenviereck. Handelt es sich dabei auch um ein Quadrat? Begründe.

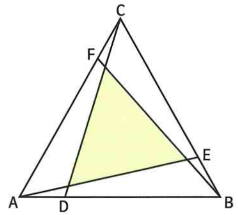


Fig. 3

6 In Fig. 4 ist ein Parallelogramm zweimal auf ganz bestimmte Weise in zwei Teilflächen unterteilt worden.
a) Beschreibe, wie der Schnitt durch das Parallelogramm verläuft.
b) Stelle eine Vermutung darüber auf, welcher Zusammenhang zwischen den jeweils entstandenen Teilflächen besteht.
c) Begründe mithilfe von Kongruenzüberlegungen den in b) beobachteten Zusammenhang.

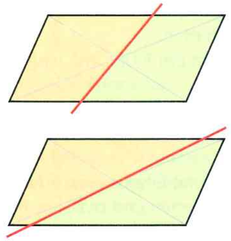


Fig. 4

1 a) Übertrage die nebenstehende Figur eines Tangramspiels in dein Heft. Wähle als Seitenlänge 8 cm.
b) Unterteile die großen Figuren in Teilfiguren, die allesamt kongruent zu den beiden kleinen Dreiecken sind.

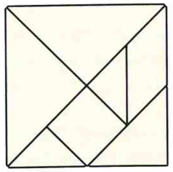


Fig. 1

2 Eine Variante des Tangramspiels siehst du in Fig. 2.
a) Untersuche, ob die so entstandenen Teilvierecke alle zueinander kongruent sind und begründe deine Antwort.
b) Das Quadrat hat eine Seitenlänge von 8 cm. Wie groß ist dann der Flächeninhalt des blauen Teilvierecks, wenn die rote Strecke 2,5 cm lang ist?

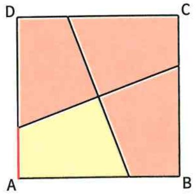
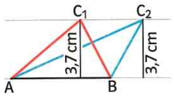


Fig. 2

3 a) Bei einem Dreieck soll eine Seite 5,4 cm lang sein und eine weitere 6,8 cm. Welche Seitenlängen kommen für die dritte Seite in Frage?
b) Formuliere eine Regel dazu, welcher Zusammenhang zwischen den drei Seitenlängen in einem Dreieck besteht.

Bei Konstruktionen mit Dreieckshöhen musst du Parallelen zeichnen:



4 Konstruiere ein Dreieck ABC aus den angegebenen Größen. Es gibt immer zwei Lösungen. Gib für beide Lösungen die restlichen Stücke an.
a) $a = 4\,cm$; $c = 4{,}5\,cm$:; $h_c = 3{,}5\,cm$ b) $h_c = 4{,}2\,cm$; $b = 4{,}4\,cm$; $\gamma = 40°$
c) $h_c = 4{,}2\,cm$; $a = 4{,}4\,cm$; $b = 4{,}6\,cm$ d) $h_c = 3{,}6\,cm$; $a = 3{,}8\,cm$; $\alpha = 50°$

5 Konstruiere ein Dreieck ABC mit dem Flächeninhalt $A = 8\,cm^2$ und den angegebenen Größen.
a) $c = 4\,cm$; $\alpha = 30°$ b) $a = 8\,cm$; $b = 3\,cm$

6 Wie muss ein Dreieck mit den Seitenlängen 6 cm und 3 cm aussehen, damit sein Flächeninhalt möglichst groß wird? Wie klein kann der Flächeninhalt werden?

7 a) Wie hoch steht ein Drachen, wenn die Schnur 50 m lang ist und der Winkel zwischen der Schnur und der Erde 63° beträgt?
b) Welcher Winkel ergibt sich, wenn der Drachen 40 m hoch steigt?

Sonnenstände in Deutschland im Monat Mai

8:00	*35°*
9:00	*45°*
10:00	*52°*
11:00	*58°*
12:00	*61°*

Informationen zu den Sonnenständen findest du im Internet.

8 Richard ist 1,60 m groß. An einem Vormittag in den Pfingstferien misst Cira seinen Schatten.
a) Cira misst um 8 Uhr. Wie lang ist der Schatten?
b) Später misst Cira erneut und erhält 1,25 m. Um welche Uhrzeit hat Cira gemessen?
c) Richard und Cira messen erneut in den Weihnachtsferien und zwar um 10 Uhr. Wie lang ist der Schatten jetzt?

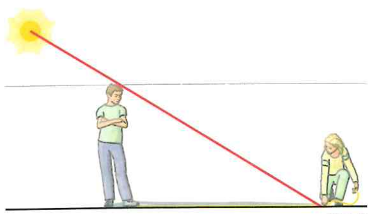
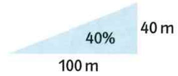


Fig. 3

9 Der erste Abschnitt der Fellhornbahn führt von der Talstation (927 m) bis auf 1785 m. Auf einer präzisen Karte misst man für die Entfernung zwischen Talstation und Bergstation 2750 m.
a) Gib die mittlere Steigung der Fellhornbahn in % an.
b) Welche Strecke legt die Seilbahn tatsächlich zurück?

Die Steigung in % gibt den mittleren Höhenunterschied (in m) pro 100 m in der Horizontalen an.



10 Untersuche, welche der folgenden Aussagen wahr sind und welche nicht. Begründe.
a) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind zueinander kongruent, wenn sie in einer Höhe und einem Winkel übereinstimmen.
b) Zwei gleichseitige Dreiecke sind zueinander kongruent, wenn sie in einer Höhe übereinstimmen.
c) Stimmen zwei Dreiecke in der Länge einer Seite und im Flächeninhalt überein, so sind sie zueinander kongruent.
d) Zwei rechtwinklige Dreiecke sind zueinander kongruent, wenn sie in einer Seitenlänge und einem weiteren Winkel übereinstimmen.
e) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind zueinander kongruent, wenn sie in der Länge eines Schenkels und in einem Basiswinkel übereinstimmen.

Gib einen Kongruenzsatz an oder finde ein Gegenbeispiel

11 Geo Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC mit Höhe h_c. Der Fußpunkt der Höhe sei F. Miss die Strecken $\overline{AF}$ und $\overline{BC}$. Verändere das Dreieck durch Ziehen so, dass diese beiden Strecken gleich lang sind. Sind dann die Teildreiecke zueinander kongruent? Argumentiere mit einem Kongruenzsatz.

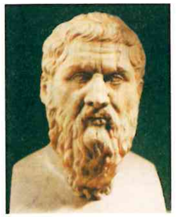
12 Geo Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC. Wähle einen Punkt P auf $\overline{BC}$; ziehe durch P die Parallelen zu den beiden anderen Seiten. Der Schnittpunkt auf $\overline{AC}$ sei Q, der auf $\overline{AB}$ sei R.
a) Verändere die Lage von P so, dass $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$ gleich lang sind. Experimentiere (variiere das Dreieck), um herauszufinden, wo P genau liegen muss, damit $\overline{PQ}$ und $\overline{PR}$ gleich lang sind.
b) Beweise deine Vermutung (betrachte die Dreiecke ARP und APQ).

Kannst du das noch?

13 Herr Geiger nimmt am Einstein-Marathon in Ulm teil. Weil er beim Start ziemlich weit hinten steht, läuft die offizielle Zeitnahme bereits einige Minuten bis er die Startlinie überquert und er sich auf die 42,195 km lange Reise machen kann. Er läuft die gesamte Strecke in einem konstanten Tempo. Die 10-km-Marke passiert er nach 44:40, nach der Hälfte der Distanz zeigt die offizielle Uhr 1:30:54.
a) Wann hat Herr Geiger das Ziel erreicht?
b) Gib für die Zuordnung *Wegstrecke s (in km)* → *Zeit t (in s)* eine Formel an.

14 Beim 10 000-m-Paarzeitlaufen auf der 400-m-Bahn dürfen sich zwei Läufer so oft sie möchten abwechseln. Thorsten benötigt 80 s für eine Runde, Reinhard 90 s. Insgesamt absolvieren sie die 10 000 m in 35 min 50 s. Wie viele Runden ist Thorsten gelaufen, wie viele Reinhard?

Die platonischen Körper



Platon,
428 v. Chr. – 348 v. Chr.

Regelmäßige Körper faszinieren die Menschen schon seit Jahrtausenden. Es gibt einige wenige Körper, die besonders strenge Forderungen erfüllen, die regulären Polyeder. Man spricht von einem regulären Polyeder, wenn
- es ausschließlich von zueinander kongruenten regelmäßigen Vielecken begrenzt wird

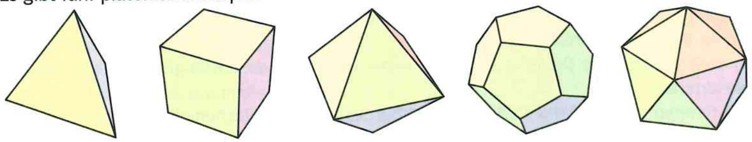
und
- an jeder Ecke gleich viele dieser Vielecke aufeinander treffen.

Diese Körper heißen auch platonische Körper, benannt nach dem griechischen Gelehrten Platon.

Im Griechischen bedeutet poly viel-.
Der Wortteil -eder stammt vom griechischen Wort hedra (Sitz) ab.
(Auf jeder seiner Flächen kann ein Polyeder sitzen.)

tettares: vier
hex: sechs
okto: acht
dodeka: zwölf
eikosi: zwanzig

Es gibt fünf platonische Körper.



Tetraeder Hexaeder Oktaeder Dodekaeder Ikosaeder

Fig. 1

Die Namen der Körper setzen sich aus den griechischen Zahlwörtern und dem Wortteil -eder für Fläche zusammen. Ein Tetraeder ist also z. B. ein „Vierflächner“.

Das Hexaeder kennst du unter einem anderen Namen …

Wir bauen die platonischen Körper

Wenn man die fünf platonischen Körper nachbauen möchte, kann man entweder Baukästen benutzen oder sich selbst Netze der Körper auf Karton zeichnen, diese ausschneiden und dann zusammenkleben. Teilt euch in fünf Gruppen auf und bastelt Modelle der platonischen Körper. Für das Dodekaeder und das Ikosaeder findet ihr hier bereits verkleinerte Vorlagen. Wählt als Kantenlänge für die Modelle jeweils mindestens 3 cm.

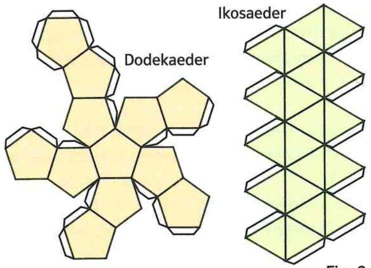


Fig. 2

Wo steckt der Fehler? Ein Ikosaeder besteht aus 20 Dreiecken. Jedes Dreieck hat drei Ecken. Also hat das Ikosaeder 60 Ecken.

Der eulersche Polyedersatz

Wenn man die Zahl der Ecken und Kanten eines Tetraeders ermitteln möchte ohne wirklich zu zählen, so kann man sich Folgendes überlegen.
Ein Tetraeder besteht aus vier Dreiecken. Jedes Dreieck hat drei Seiten und drei Ecken. An jeder Kante kommen zwei Seiten zusammen. Also hat das Tetraeder $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ Kanten.
An jeder Ecke des Körpers kommen (Dreiecks-) Ecken zusammen. Also hat das Tetraeder $(4 \cdot 3) : 3 = 4$ Ecken.

1 Übertrage die nebenstehende Tabelle in dein Heft. Fülle sie für alle platonischen Körper mithilfe der oben gemachten Überlegungen aus.

Körper	Ecken	Flächen	Kanten
Tedraeder	4	4	6
Hexaeder			
…			

2 a) Betrachte die Tabelle aus Aufgabe 1 und erkläre, welcher Zusammenhang zwischen Ecken-, Flächen- und Kantenzahl besteht (eulerscher Polyedersatz).
b) Untersuche, ob der gefundene Zusammenhang zwischen Ecken-, Flächen- und Kantenzahl nur für die platonischen Körper gilt oder auch für die unten abgebildeten Körper.

Leonhard Euler
1707–1783

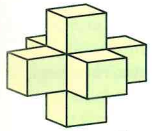


Fig. 1

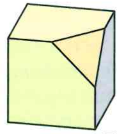


Fig. 2

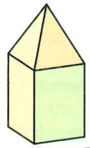


Fig. 3

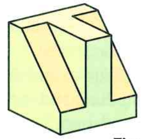


Fig. 4

Gibt es noch weitere platonische Körper?

Man kann zeigen, dass es nicht mehr als fünf platonische Körper geben kann. Dazu wird zunächst gezeigt, dass es nur einen platonischen Körper geben kann, der aus regelmäßigen Vierecken (= Quadraten) besteht.
Ein Winkel im Quadrat ist 90° groß.
- Treffen drei Quadrate zusammen, so erhält man eine Winkelsumme von 270° und es entsteht ein Würfel (Fig. 5),
- Bei vier Quadraten entsteht bereits eine Winkelsumme von 360° und es ist keine Ecke mehr möglich (Fig. 6)

Also ist der Würfel der einzige platonische Körper, der von Quadraten begrenzt wird.

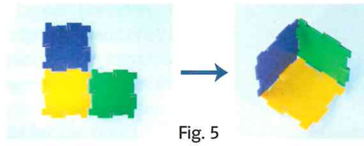


Fig. 5

Treffen drei Quadrate zusammen, so erhält man einen Würfel.

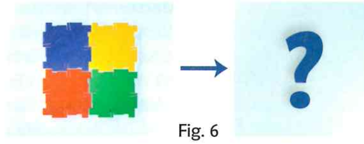


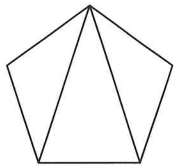
Fig. 6

Treffen vier Quadrate zusammen, so erhält man keine Ecke mehr.

Die folgenden Aufgaben helfen dir dabei, mit ähnlichen Überlegungen wie beim Viereck zu zeigen, dass es insgesamt nur fünf platonische Körper gibt.

3 Dreiecke
a) Wie groß ist ein Winkel im gleichseitigen Dreieck?
b) Welche Winkelsummen ergeben sich, wenn drei, vier, fünf bzw. sechs Dreiecke zusammen treffen?
c) Wie viel platonische Körper mit Dreiecken als Flächen kann es also geben, wie heißen sie?

Tipp zu Aufgabe 4 a):



4 Fünfecke
a) Wie groß ist ein Winkel im regelmäßigen Fünfeck?
b) Begründe mit Winkelsummen, dass es nur einen platonischen Körper geben kann, der aus Fünfecken besteht. Wie heißt dieser?

5 Sechsecke
a) Wie groß ist ein Winkel im regelmäßigen Sechseck?
b) Begründe mit a), dass es keinen Körper geben kann, der nur aus Sechsecken besteht.
c) Erkläre, warum es auch keine Körper geben kann, die nur aus regelmäßigen Siebenecken, Achtecken usw. bestehen.

Die platonischen Körper

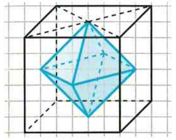


Fig. 1

Ein unangenehmer platonischer Körper:

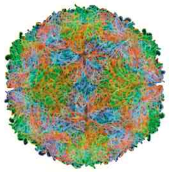

Rhinovirus


Fig. 2


Fig. 3

Dieser archimedrische Körper wird mit Füßen getreten:

Dualität der platonischen Körper

6 Wenn man bei einem Würfel die Mitten der Seitenflächen einzeichnet und die Mittelpunkte von benachbarten Flächen miteinander verbindet, so entsteht ein Oktaeder (Fig. 1). Übertrage Fig. 1 in dein Heft. Überlege, welcher platonische Körper entsteht, wenn man in gleicher Weise die Mitten der Oktaederflächen miteinander verbindet?

7 Würfel und Oktaeder stehen also in einer engen Beziehung zueinander, man sagt, sie sind zueinander dual.
Zu welchem platonischen Körper ist das Ikosaeder bzw. das Tetraeder dual?

Die archimedischen Körper

Wenn man weniger strenge Vorgaben macht, erhält man weitere Körper. Lässt man etwa unterschiedliche regelmäßige Vielecke als Begrenzungsflächen zu, so erhält man die **archimedischen Körper**. Von Ihnen gibt es 13 Stück.

8 Einen Würfel kann man durch Abstumpfen der Ecken in einen archimedischen Körper verwandeln. Dafür gibt es sogar zwei Möglichkeiten.
a) Wenn man die Ecken „nur ein bisschen" abstumpft, entsteht ein sogenannter **Hexaederstumpf**, der aus Achtecken und Dreiecken besteht (Fig. 2).
Bestimme durch Konstruktion die Seitenlängen des Achtecks und des Dreiecks, wenn der ursprüngliche Würfel eine Seitenlänge von 4 cm hatte.
b) Wenn man die Ecken etwas großzügiger abschneidet (der Schnitt wird jeweils in der Mitte der Seitenflächen angesetzt), entsteht ein **Kuboktaeder**. Er besteht aus Vierecken und Dreiecken (Fig. 3).
Bestimme auch hier die Seitenlängen der entstandenen Quadrate und Dreiecke.
c) Besorge dir Steckschaum vom Floristen oder Styropor und bastle daraus einen Hexaederstumpf und ein Kuboktaeder.

9 Man kann aus jedem der fünf platonischen Körper durch „ein bisschen" Abstumpfen einen archimedischen Körper machen (siehe Aufgabe 8 Teil a)). Diese heißen dann Tetraederstumpf, usw. Gib jeweils an, aus welchem platonischen Körper die unten abgebildeten archimedischen Körper entstanden sind.


Fig. 4

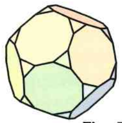


Fig. 5

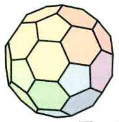


Fig. 6

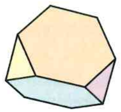


Fig. 7

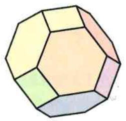


Fig. 8

10 Wenn man die platonischen Körper noch stärker enteckt, so entstehen weitere archimedische Körper.
a) Welcher platonische Körper wurde in Fig. 9 entdeckt?
b) Finde im Internet die Namen der abgebildeten Körper heraus.

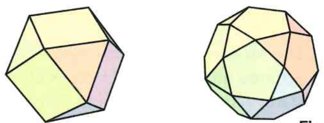


Fig. 9

Zwillingsglück

Felicitas Hoppe

Wir kommen tatsächlich fast völlig zur Deckung, meine Zwillingsschwester und ich. Sie heißt Hanna, ich Anna. Ein einziger Buchstabe, der uns trennt, damit man uns unterscheiden kann. Doch auch das ist keine sichere Sache, denn was macht ein einzelner Buchstabe aus? Vielleicht ist sie Anna, und ich heiße Hanna, und morgen drehn wir den Spieß einfach um. Montags Hanna und dienstags Anna, und mittwochs tauschen wir wieder die Plätze und antworten abwechselnd, ganz nach Bedarf, je nachdem, wer die Antwort weiß. Wir wissen genau, wie man Schularbeit spart, wir lernen jede die Hälfte für zwei. Und wie oft haben wir dieses Spiel gespielt, so lange, bis die Lehrer verlieren, spätestens donnerstags oder freitags, wenn sie sich endlich geschlagen geben, weil niemand mehr weiß, wer wir wirklich sind und wie wir eigentlich heißen.

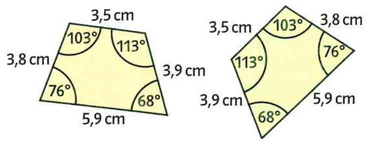
Denn seit jeher sind wir einander so ähnlich, dass wir uns selbst miteinander verwechseln, als sähen wir nur unser Spiegelbild. Nachts steigen wir häufig ins falsche Bett, und morgens putzen wir uns unsere Zähne, hin und wieder mit falscher Bürste, denn auch die Bürsten sind deckungsgleich und auch für uns selbst nicht zu unterscheiden. Genau wie die Zähne. Die beißen wohl immer ins selbe Brot und hinterlassen überall gleiche Spuren, sagt zweimal im Jahr unser Zahnarzt und lacht. Die gleichen sich durch und durch bis aufs Haar, sagt einmal im Monat unser Friseur, wenn er staunend zwei Köpfe vergleicht und die blonden Frisuren auf Linie bringt. Die Scheitel legt er im selben Winkel, im Nacken zählt er die Locken nach, mathematisch exakt, damit wir auch wirklich Zwillinge bleiben.

Fast könnten wir unsere Köpfe tauschen, das würde nicht einmal uns selber auffallen, weil wir dieselben Gedanken haben, dieselben Absichten, dieselben Meinungen, vor allem aber dasselbe Ziel: Wir haben beschlossen, zur Deckung zu kommen, damit uns niemand entdecken kann, damit uns am Schluss keiner mehr unterscheidet. Auch Kleider und Hosen könnten wir tauschen, wir tragen immer dieselbe Größe, dieselben Modelle, dieselben Farben, die gleichen Hosen und Röcke und Kleider, die gleichen Ringe, Ketten und Taschen. Und wenn wir uns später die Lippen bemalen, werden wir sehr auf den Farbton achten. Selbst der Schulweg ist ununterscheidbar geworden, wir haben lange dafür geprobt und jeden Schritt auf Zentimeter gemessen.

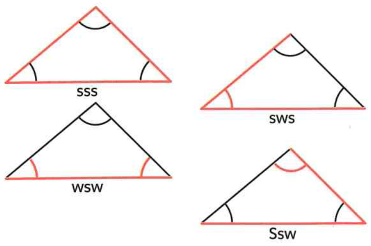
So sind wir fast unbesiegbar geworden. Ein Duo der ganz besonderen Sorte, das niemand wirklich entwaffnen kann. Auch die Freunde haben längst aufgegeben, herauszufinden, wer wir eigentlich sind. Wer Anna, wer Hanna, wer sie und wer ich, wer du und wer wir. Ein Ei wie das andere, sagt unser Vater. Denn wahrscheinlich hat unser Vater vergessen, dass eine von uns die Ältere ist und dass wir, so sehr wir uns darum bemühen, trotzdem nicht wirklich zur Deckung kommen.

Nur am Wochenende herrscht plötzlich Klarheit, wenn unsere Mutter die Frühstückseier serviert, die es bei uns nur an Sonntagen gibt. Denn kein Frühstücksei kann einem anderen gleichen, und nur meine Mutter weiß ganz genau, wie jeder von uns sie am liebsten isst: mein Vater gar nicht, wir aber sehr gern, Hanna weich gekocht und mit Salz, Anna dagegen hart und ganz ohne, weil ich das Salz nicht ausstehen kann. Dann dürfen wir endlich sein, wer wir sind: Hanna ist Hanna, ich bleibe Anna. Und ein Zwillingsglück ist, dass die Lehrer nicht wissen, dass Sonntage keine Schultage sind.

Rückblick

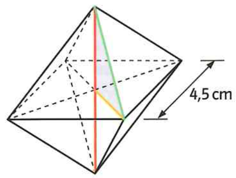


Kongruente Figuren
Zwei Figuren sind zueinander kongruent, wenn man sie so aufeinander legen kann, dass sie genau übereinander passen.
Um dies zu überprüfen, genügt es bei Vielecken, entsprechende Streckenlängen und Winkelweiten miteinander zu vergleichen.



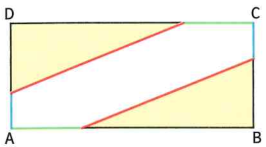
Kongruenzsätze für Dreiecke
Bei Dreiecken genügt es bereits, drei geeignete Angaben zu kennen (Seiten oder Winkel), um eine Aussage über Kongruenz machen zu können.
Die Kongruenzsätze für Dreiecke besagen, dass zwei Dreiecke bereits zueinander kongruent sind, wenn sie in folgenden Größen übereinstimmen:
- drei Seiten(sss)
- zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (sws)
- einer Seite und zwei Winkeln (wsw)
- zwei Seiten und dem der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel (Ssw)

Eindeutige Konstruktion
Die Kongruenzsätze garantieren, dass ein Dreieck eindeutig gegeben ist, wenn man drei geeignete Stücke kennt. Mit diesem Wissen lassen sich durch maßstabsgetreue Konstruktion z. B. Höhen oder Entfernungen ermitteln.



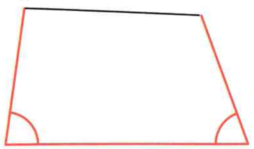
Mithilfe des blauen Dreiecks kann man die Höhe des Oktaeders bestimmen.

Geometrische Sachverhalte verifizieren und begründen
Die Kongruenzsätze sind hilfreich, wenn man Beobachtungen an geometrischen Figuren überprüfen und begründen möchte.



Im Rechteck ABCD sind die grünen und die blauen Strecken jeweils gleich lang. Mit dem Kongruenzsatz sws kann man zeigen, dass dann auch die roten Strecken gleich lang sind.

Kongruenz bei Vierecken
Zum Nachweis der Kongruenz bei Vierecken sind fünf geeignete Angaben notwendig.
Bei speziellen Vierecken kann man auch mit weniger Angaben auskommen.



Fünf geeignete Angaben sind z. B. drei Seiten und die eingeschlossenen Winkel.

Training

Runde 1

1 Untersuche, in welchen Fällen sich ein zu Fig. 1 kongruentes Lösungsdreieck ergibt. Argumentiere mit den Kongruenzsätzen.
a) $c = 9\,cm$; $\alpha = 39°$; $\gamma = 57°$
b) $c = 6{,}7\,cm$; $b = 9\,cm$; $\alpha = 84°$
c) $b = 10{,}7\,cm$; $\beta = 39°$; $\gamma = 57°$
d) $c = 10{,}7\,cm$; $b = 9\,cm$; $\beta = 57°$

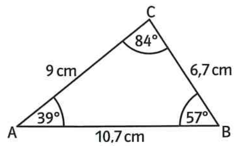


Fig. 1

2 Zerlege ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 7 cm in zwei, drei bzw. vier kongruente Teilfiguren. Fertige für jede Zerlegung eine neue Zeichnung an.

3 Ein trichterförmiges Cocktailglas hat oben einen Durchmesser von 8 cm und ist 6 cm hoch (ohne Stiel). Wie viel Flüssigkeit befindet sich in dem Glas, wenn es bis zu einer Höhe von 4 cm gefüllt ist? (Formel für das Volumen: $V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$)

4 a) Konstruiere eine Raute mit $a = 4\,cm$ und $\beta = 43°$.
b) Konstruiere einen Drachen mit $a = 3\,cm$; $e = 5\,cm$ und $f = 4\,cm$.
c) Konstruiere ein Quadrat mit $f = 5\,cm$.

5 Ein Kirchturm wird neu gedeckt. Das Dachdecken einschließlich der Ziegel kostet 29,50 € pro m². Berechne die Kosten.

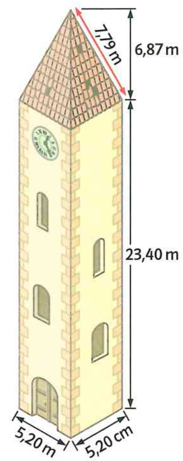


Fig. 2

Runde 2

1 Im Sommer wirft ein 8 m hoher Mast mittags einen 4,30 m langen Schatten. Welchen Winkel bilden dann die Sonnenstrahlen mit der Erdoberfläche?

2 Konstruiere ein Dreieck aus den folgenden Angaben. Miss die übrigen Seiten und Winkel.
a) $a = 3\,cm$; $b = 5{,}4\,cm$; $c = 7{,}7\,cm$
b) $a = 5\,cm$; $\beta = 33°$; $\gamma = 67°$
c) $b = 6{,}7\,cm$; $c = 5{,}8\,cm$; $\alpha = 43°$
d) $b = 5\,cm$; $\alpha = 35°$; $\gamma = 61°$

3 In Fig. 3 ist M der Mittelpunkt des Kreises. Begründe, dass die beiden Dreiecke MPQ und MP'Q' zueinander kongruent sind.

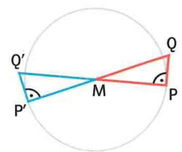


Fig. 3

4 Begründe oder widerlege die folgenden Aussagen.
a) Zwei Dreiecke sind zueinander kongruent, wenn sie in allen Winkeln und ihrem Flächeninhalt übereinstimmen.
b) Wenn zwei Dreiecke nicht zueinander kongruent sind, so müssen sie sich mindestens in einer Seitenlänge unterscheiden.

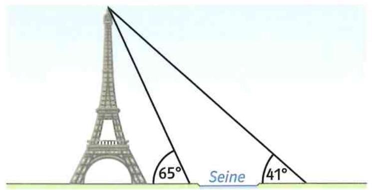


Fig. 4

5 Wie weit sind die beiden Messpunkte in Fig. 4 in etwa voneinander entfernt?

6 Zeichne drei verschiedene Vierecke, welche in fünf Größen übereinstimmen, aber nicht zueinander kongruent sind.