kannst du schon

- Kongruenzen von Figuren nachweisen
- Mit Größen rechnen
- Konstruktionen durchführen


Zahl und Maß


Daten und Zufall


Beziehung und Änderung

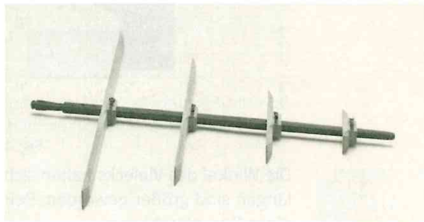

Modell und Simulation


Muster und Struktur


Form und Raum

Das sieht euch ähnlich

Ob Dinge sich ähneln, erkennen wir schnell, auch wenn sie nicht gleich sind. Es kommt auf Form und Größe an.



Jakobsstab

Das kannst du bald

- Ähnliche Figuren untersuchen
- Figuren vergrößern und verkleinern
- Mit Strahlensätzen Längen berechnen

1 Vergrößern und Verkleinern von Vielecken – Ähnlichkeit

Mit einem Kopierer vergrößerte oder verkleinerte Bilder haben Gemeinsamkeiten und sind doch unterschiedlich.

Ob Modelleisenbahn, Foto, Mikroskop, Landkarte, Overheadprojektor oder Mikroelektronik – das Vergrößern oder Verkleinern hat jeder schon ausgenutzt. Aber ist auch klar, was sich beim Vergrößern oder Verkleinern ändert und was unverändert bleibt? Um dies zu erkennen, betrachtet man eine Figur und ihre mit dem Fotokopierer erzeugte Vergrößerung.

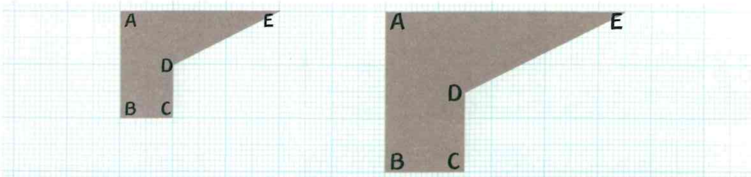


Fig. 1 Fig. 2

Die Winkel des Vielecks haben sich durch das Vergrößern nicht geändert. Nur die Seitenlängen sind größer geworden. Beim genaueren Betrachten der Seitenlängen erkennt man einen Zusammenhang.

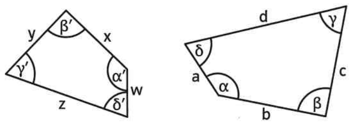
		$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{CD}$	$\overline{DE}$	$\overline{EA}$
Fig. 1	l_1	2 cm	1 cm	1 cm		
Fig. 2	l_2	3 cm	1,5 cm			
Längenverhältnis	$\frac{l_2}{l_1}$	$\frac{3}{2} = 1{,}5$				

Bei einem Vergrößerungsfaktor größer 1 ergibt sich eine Vergrößerung.
Bei einem Vergrößerungsfaktor zwischen 0 und 1 ergibt sich eine Verkleinerung.

Alle Längen einander entsprechender Seiten stehen in einem festen **Längenverhältnis** zueinander. Dieses Verhältnis nennt man **Vergrößerungsfaktor**.
Wenn bei einer Vergrößerung oder Verkleinerung einer Figur die einander entsprechenden Winkel und die Längenverhältnisse gleich bleiben, dann sagt man, die Figuren sind **ähnlich**.

Bei einer maßstäblichen Vergrößerung entstehen ähnliche Figuren.

Zwei Vielecke heißen **ähnlich**, wenn die Längenverhältnisse einander entsprechender Seiten und einander entsprechende Winkel gleich sind.
$\frac{a}{w} = \frac{b}{x} = \frac{c}{y} = \frac{d}{z}$ und $\alpha = \alpha'$; $\beta = \beta'$; $\gamma = \gamma'$; $\delta = \delta'$



Beispiel Untersuchung auf Ähnlichkeit und ähnliche Figuren zeichnen
a) Untersuche, ob Fig. 1 zu Fig. 2 oder Fig. 3 ähnlich ist.
b) Zeichne ein zur Figur 2 ähnliches Viereck mit dem Vergrößerungsfaktor 2.

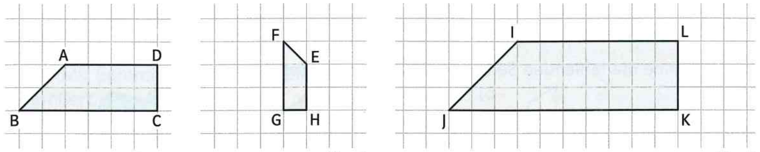
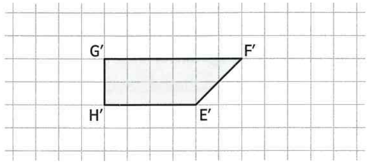


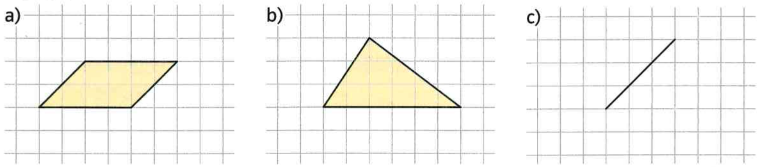
Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Lösung:
a) Vergleich der Fig. 1 mit Fig. 2:
Winkel: Entsprechende Winkel sind gleich groß.
Dies erkennt man durch Vergleich der Kästchen oder durch Messen.
Seitenverhältnisse: $\frac{\overline{FG}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{GH}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{HE}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2}$; daraus folgt: Fig. 1 und Fig. 2 sind ähnlich.
Vergleich der Fig. 1 mit Fig. 3:
Seitenverhältnisse: $\frac{\overline{JK}}{\overline{BC}} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$; $\frac{\overline{KL}}{\overline{CD}} = \frac{3}{2}$; die Seitenverhältnisse sind nicht gleich, also sind Fig. 1 und Fig. 3 nicht ähnlich.
b) $\overline{G'H'} = 2 \cdot \overline{GH} = 1\,\text{cm}$
$\overline{H'E'} = 2 \cdot \overline{HE} = 2\,\text{cm}$
$\overline{F'G'} = 2 \cdot \overline{FG} = 3\,\text{cm}$
$\overline{E'F'} = 2 \cdot \overline{EF} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$
Die Winkel bleiben alle gleich groß.



Aufgaben

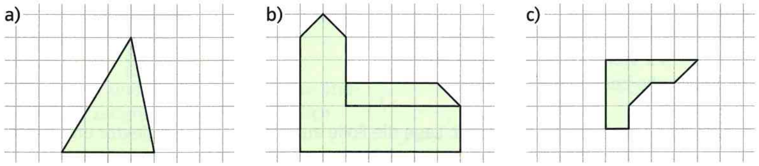
1 Zeichne ähnliche Figuren unter Verwendung des angegebenen Vergrößerungsfaktors ins Heft.



Vergrößerungsfaktor: 2 Vergrößerungsfaktor: $\frac{3}{2}$ Vergrößerungsfaktor: $\frac{5}{2}$

Warum kann man einer Landkarte Himmelsrichtungen direkt entnehmen, während man Entfernungen erst umrechnen muss?

2 Zeichne die Figur ab und vergrößere sie zu einer ähnlichen Figur, so dass sie gerade noch in ein 10 cm × 10 cm großes Quadrat hineinpasst. Welcher Vergrößerungsfaktor ist zu wählen?



3 Prüfe, ob die drei übereinander liegenden Rechtecke in der Fig. 1 ähnlich sind. Bestimme, wenn möglich, den Vergrößerungsfaktor.

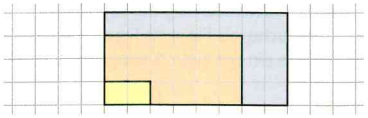
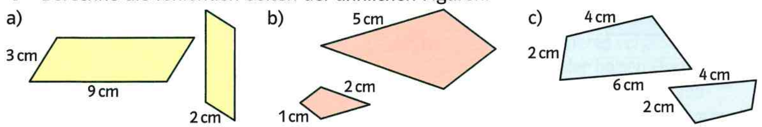


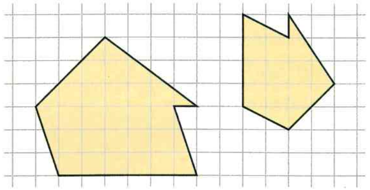
Fig. 1

4 Berechne die fehlenden Seiten der ähnlichen Figuren.



Bist du sicher?

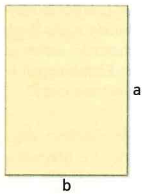
1 Untersuche die beiden Figuren auf Ähnlichkeit. Welcher Vergrößerungsfaktor liegt vor?



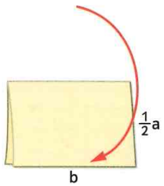
2 Das Viereck ABCD ist durch die Punkte A(1|1), B(4|1), C(2|3) und D(2|2) gegeben. Zeichne ein zu ABCD ähnliches Viereck mit dem Vergrößerungsfaktor 3.

5 Auf den Bildern ist jeweils die Pyramide des Louvre zu sehen.

a) Handelt es sich um eine maßstäbliche Vergrößerung des Fotos? Begründe deine Antwort.
b) Die beiden Bilder wurden mithilfe eines Computers bearbeitet. Weißt du, wie aus dem ersten Bild das zweite entstand? Erkläre, wie man mit dem Computer eine maßstäbliche Vergrößerung erzeugt.



6 Schneide ein Rechteck aus und falte es entlang der kurzen Mittellinie einmal. Ist das entstandene Rechteck ähnlich zum Ausgangsrechteck? Probiere dies mit einem DIN-A4-Blatt.
Zeige, dass die Rechteckseiten im Verhältnis $a : b = \sqrt{2}$ stehen müssen, damit ähnliche Rechtecke beim Falten entstehen.

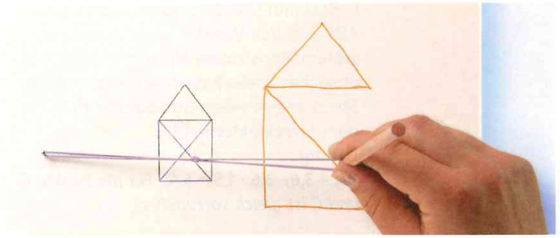


7 Zeichne auf eine Folie eine Figur. Lege die Folie auf den Overheadprojektor und richte diesen so ein, dass eine maßstäbliche Vergrößerung mit dem Faktor 6 entsteht.

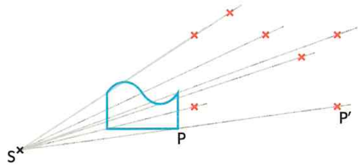
2 Zentrische Streckung

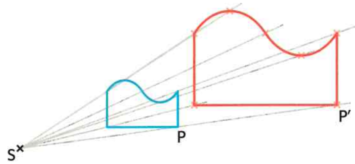
Mit Gummi und Stift wird ein Bild vergrößert.

Befestige das Gummi an einem Punkt und bewege den Stift so, dass der Knoten sich über die Linien der Vorlage bewegt.



Bei einem Diaprojektor wird ein vergrößertes Bild durch die Lichtstrahlen, die von einer zentralen Beleuchtungsstelle ausgehen, erzeugt. Nach einem solchen Prinzip soll auch eine vergrößerte Figur konstruiert werden. Als Ausgangspunkt für die Konstruktion legt man dazu einen Punkt S fest. Verlängert man alle Strecken von S zur Figur mit demselben Faktor k (z. B. k = 2), so erhält man die Punkte der vergrößerten Figur.
Eine solche Konstruktion nennt man **zentrische Streckung** mit dem **Streckfaktor** k. Der Punkt S ist dabei das **Streckzentrum** der Konstruktion.





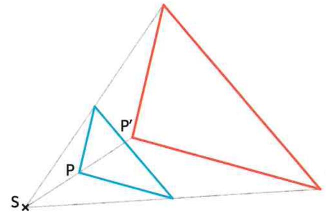
Für die zentrische Streckung gilt:
Für $k > 1$ wird eine Figur vergrößert und für $0 < k < 1$ wird die Figur verkleinert.

Bei der Betrachtung von Ausgangs- und Bildfigur einer zentrischen Streckung, sind folgende Eigenschaften zu erkennen:
1. Einander entsprechende Winkel in der Ausgangs- und in der Bildfigur sind gleich groß.
2. Die Seitenlängen der Bildfigur haben bei einem Streckfaktor $k = 2$ die doppelte Länge der Ausgangsfigur.

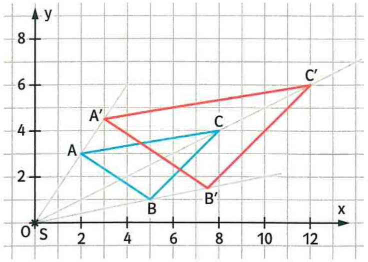
Aus den Eigenschaften der zentrischen Streckung erkennt man, dass Ausgangs- und Bildfigur ähnlich sind.

Zentrische Streckung mit dem Streckzentrum S und dem Streckfaktor k:
a) Zeichne einen Strahl von S durch P.
b) Trage von S aus das k-fache der Länge der Strecke $\overline{SP}$ ab und erhalte P'.

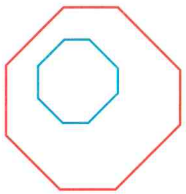
Eine Figur und die durch zentrische Streckung erzeugte Bildfigur sind ähnlich.



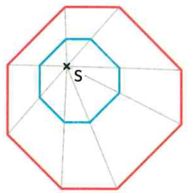
Beispiel 1 Konstruktion ähnlicher Figuren
Gegeben sind die Punkte A(2|3), B(5|1), C(8|4) und S(0|0). Zeichne das Dreieck ABC und den Punkt S in ein Koordinatensystem. Konstruiere ein zum Dreieck ABC ähnliches Dreieck durch eine zentrische Streckung mit dem Streckzentrum S und dem Streckfaktor k = 1,5.
Lösung:
$\overline{OA} = 3{,}6$; $3{,}6 \cdot 1{,}5 = 5{,}4$. *Für die Punkte B und C ist gleich vorzugehen.*



Beispiel 2 Bestimmung des Streckzentrums
Untersuche, ob die größere Figur durch eine zentrische Streckung aus der kleineren Figur entstanden sein kann.



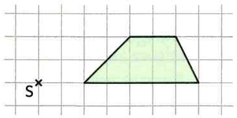
Lösung:

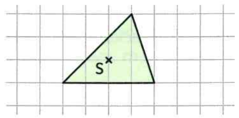


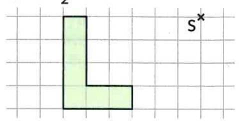
Zeichnet man durch die jeweils einander entsprechenden Punkte Linien, so schneiden sich diese in einem Punkt. Dieser Punkt ist das Streckzentrum S.
Die größere Figur ist durch eine zentrische Streckung aus der kleineren Figur entstanden. Der Streckfaktor ist k = 2.

Aufgaben

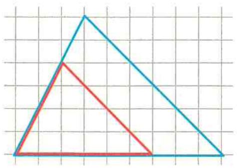
1 Übertrage die Figur ins Heft und führe die zentrische Streckung mit dem Streckfaktor k durch.
a) k = 3 b) k = 2 c) $k = \frac{1}{2}$

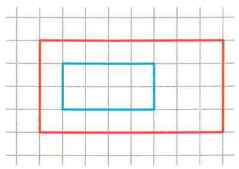


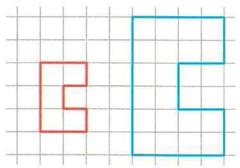




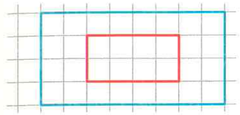
2 Die rote Figur ist durch zentrische Streckung aus der blauen entstanden. Wo befindet sich das Streckzentrum und wie groß ist der Streckfaktor?
a) b) c)

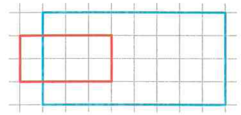


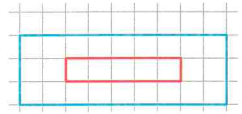




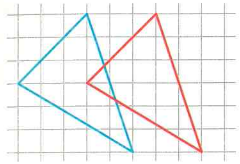
3 Überlege, ob die blaue Figur durch eine zentrische Streckung aus der roten Figur entstanden sein kann. Gib gegebenenfalls den Streckfaktor an und zeichne das Streckzentrum ein.
a) b) c)

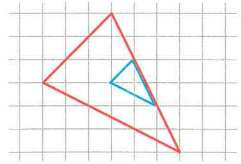


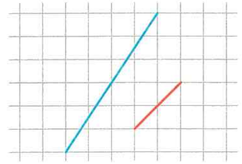




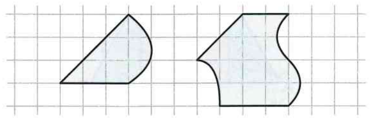
d) e) f)





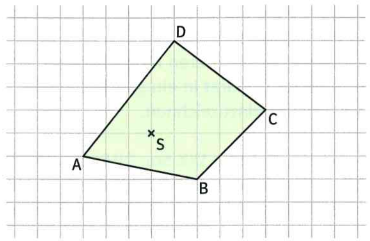


4 Zeichne die Figur in dein Heft. Lege ein Streckzentrum fest und führe eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor k = 3 durch.



Bist du sicher?

1 Übertrage die Figur in dein Heft und führe eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor k = 3,5 durch.



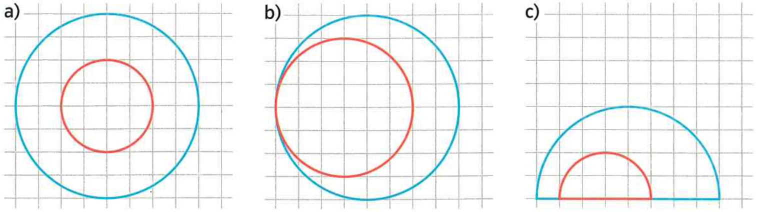
2 Die Punkte A(2|1), B(5|2) und C(1|3) bilden das Dreieck ABC, die Punkte A′(6|3), B′(15|6) und C′(3|9) das Dreieck A′B′C′. Prüfe, ob eine zentrische Streckung vorliegt. Gib gegebenenfalls das Streckzentrum S und den Streckfaktor k an.

5 a) Zeichne ein Fünfeck und führe für unterschiedliche Streckzentren und gleichen Streckfaktor k = 2 die zentrischen Streckungen durch.
b) Was kann man über die Lage der Streckfigur sagen, wenn das Streckzentrum innerhalb der Figur liegt? Gibt es weitere besondere Lagen für das Streckzentrum?

6 Zeichne das Viereck ABCD mit A(4|1), B(8|2), C(9|7) und D(3|6). Bei einer zentrischen Streckung wird der Eckpunkt C auf C′(12,5|10,5) und der Eckpunkt D auf D′(0,5|8,5) abgebildet. Konstruiere das Bildviereck A′B′C′D′.

7 a) Zeichne das Dreieck ABC mit A(3|1), B(6|1) und C(5|3) und führe eine zentrische Streckung mit k = 2 durch. Bestimme und vergleiche die Flächeninhalte der Dreiecke.
b) Führe eine zentrische Streckung durch, sodass der Flächeninhalt des Bildes nur ein Viertel des Flächeninhaltes der Ausgangsfigur beträgt. Welcher Streckfaktor ist zu benutzen?

8 Bestimme das Streckzentrum und den Streckfaktor der zentrischen Streckung.



9 In das gleichseitige Dreieck ABC aus Fig. 1 wurde ein möglichst großes Quadrat eingezeichnet. Dies ist nicht so einfach, wie man vielleicht denkt. Fig. 2 zeigt eine Idee, wie man die Konstruktion durchführen kann. Beschreibe die Konstruktion in einem kurzen Text.

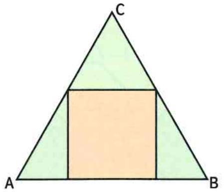


Fig. 1

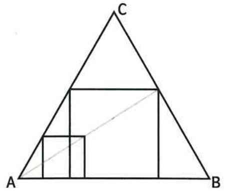


Fig. 2

10 a) Zeichne in ein gleichschenkliges Dreieck ein möglichst großes Quadrat ein. Nutze für die Konstruktion den Ansatz, der in Fig. 3 dargestellt ist.
b) Suche nach weiteren Möglichkeiten, ein maximales Quadrat in ein gleichschenkliges Dreieck einzuzeichnen.

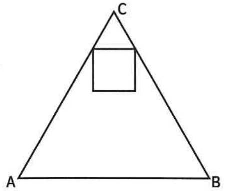


Fig. 3

11 In Fig. 4 wurde versucht, eine Figur und deren zentrisch gestrecktes Bild zu zeichnen. Sowohl Figur als auch Bild sind noch nicht vollständig. Übernimm das Bild in dein Heft und zeichne Figur und Bild vollständig. Welcher Streckfaktor wird für die zentrische Streckung benutzt?

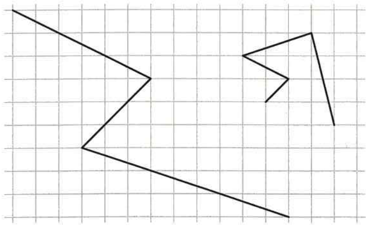


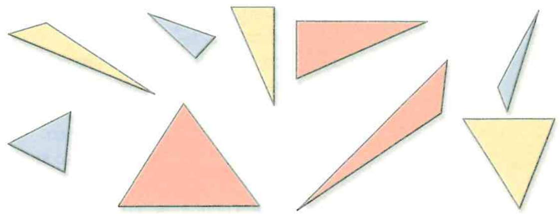
Fig. 4

Kannst du das noch?

12 Welcher Kongruenzsatz garantiert die eindeutige Konstruierbarkeit des Dreiecks ABC? Konstruiere das Dreieck.
a) $a = 5\,\text{cm}$, $b = 2\,\text{cm}$, $\alpha = 50°$ b) $b = 7\,\text{cm}$, $\alpha = 35°$, $\gamma = 90°$

13 Löse die Klammern auf.
a) $(2x - 5a) \cdot 3ax$ b) $(2z - 3s)(3s + 2z)$ c) $(2x - 3)x - (2 - 3x) \cdot 2$

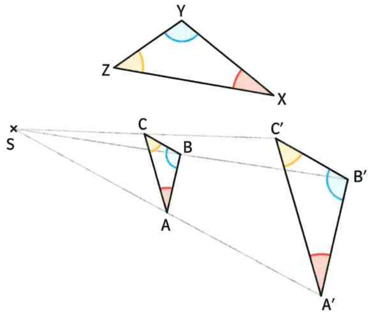
3 Ähnliche Dreiecke



Ähnliche Dreiecke sind einfach zu erkennen.

Um die Ähnlichkeit von zwei Figuren zu überprüfen, muss man eigentlich die Winkel und die Seitenverhältnisse vergleichen. Bei Dreiecken ist ein solch großer Aufwand nicht notwendig. Es genügt der Vergleich der Winkel oder der Seitenverhältnisse.

Als Erstes wird der Fall betrachtet, dass die Dreiecke ABC und XYZ in den einander entsprechenden Winkeln übereinstimmen. Durch eine zentrische Streckung wird das Dreieck ABC so gestreckt, dass die Bildstrecke $\overline{A'C'}$ so lang wie die Strecke $\overline{XZ}$ ist. Die Winkel bleiben dabei unverändert. Nach dem Kongruenzsatz WSW sind die Dreiecke XYZ und A'B'C' kongruent. Dreieck ABC und Dreieck A'B'C' sind ähnlich, da sie aus einer zentrischen Streckung hervorgehen. Damit ergibt sich, dass die Dreiecke ABC und XYZ ähnlich sind.

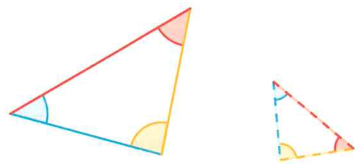


Kongruenzsatz WSW: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen.

Nun wird der Fall betrachtet, dass für die beiden Dreiecke ABC und XYZ gilt: Entsprechende Seiten der Dreiecke bilden das gleiche Verhältnis. Das Dreieck ABC kann durch eine zentrische Streckung so vergrößert werden, dass die Seiten des Dreiecks ABC gleich groß zu den entsprechenden Seiten des Dreiecks XYZ sind. Dazu nutzt man eine zentrische Streckung, die als Streckfaktor das Seitenverhältnis hat. Dreiecke mit gleichen Seiten sind nach dem Kongruenzsatz SSS kongruent. Sie stimmen also auch in allen Winkeln überein. Da bei der zentrischen Streckung die Winkelweiten unverändert bleiben, ergibt sich, dass die Dreiecke ABC und XYZ ähnlich sind.

Kongruenzsatz SSS: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen drei Seiten übereinstimmen.

Ähnliche Dreiecke
1. Wenn zwei Dreiecke in allen entsprechenden Winkeln übereinstimmen, dann sind sie ähnlich.
2. Wenn in zwei Dreiecken die entsprechenden Seitenlängen das gleiche Verhältnis bilden, dann sind sie ähnlich.



Zum Nachweis der Ähnlichkeit bei Dreiecken reichen auch zwei übereinstimmende Winkel aus. Die Übereinstimmung im dritten Winkel ergibt sich aus der Innenwinkelsumme im Dreieck.

Beispiel Berechnung über Ähnlichkeit
In der Fig. 1 wurde in das Dreieck ABC eine Senkrechte eingezeichnet, sodass das Dreieck DBE entstand.
a) Begründe, dass die Dreiecke ähnlich sind.
b) Berechne die fehlenden Seitenlängen.
Lösung:
a) Beide Dreiecke stimmen im rechten Winkel und im Winkel α überein. Also sind die Dreiecke ähnlich.
b) Sich entsprechende Seiten sind: $\overline{AB}$ und $\overline{BE}$, $\overline{CA}$ und $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ und $\overline{BD}$

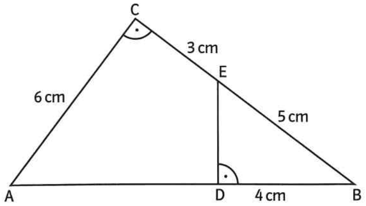
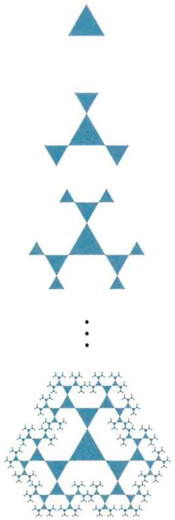


Fig. 1

Vergrößerungsfaktor: $\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{8\,\text{cm}}{4\,\text{cm}} = 2.$

$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BE} = 10\,\text{cm}$. Aus $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{DE} = 6\,\text{cm}$ folgt: $\overline{DE} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = 3\,\text{cm}$.



Aufgaben

1 Ein Dreieck hat die Winkel 65° und 42°, ein anderes Dreieck die Winkel 42° und 73°. Sind die beiden Dreiecke ähnlich?

2 Prüfe, ob ein Dreieck mit den Seiten $a = 4{,}5\,\text{cm}$, $b = 7{,}2\,\text{cm}$ und $c = 3{,}3\,\text{cm}$ zu einem Dreieck mit den Seiten $d = 16{,}8\,\text{cm}$, $e = 7{,}7\,\text{cm}$ und $f = 10{,}5\,\text{cm}$ ähnlich ist.

3 In Fig. 2 sind die Geraden g und h parallel.
a) Begründe, dass die Dreiecke ABM und CDM ähnlich sind.
b) Berechne die Längen der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BM}$, wenn $\overline{CD} = 1{,}5\,\text{cm}$, $\overline{MC} = 1\,\text{cm}$, $\overline{AM} = 7\,\text{cm}$ und $\overline{DM} = 2\,\text{cm}$ sind.

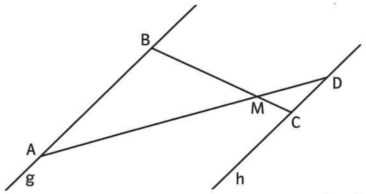


Fig. 2

4 In Fig. 3 sind die Geraden g und h parallel.
a) Begründe, dass die Dreiecke ABM und CDM ähnlich sind.
b) Berechne alle Seiten im Dreieck CDM, wenn die Seitenlängen $\overline{MA} = 2{,}5\,\text{cm}$, $\overline{MB} = 4\,\text{cm}$, $\overline{AB} = 1{,}5\,\text{cm}$ und $\overline{BD} = 3{,}5\,\text{cm}$ bekannt sind.

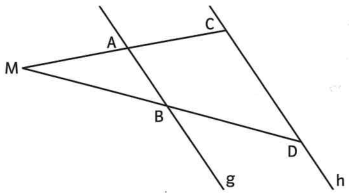


Fig. 3

5 In das rechtwinklige Dreieck ABC wird die Höhe h eingezeichnet. Der Fußpunkt der Höhe sei D (Fig. 4). Begründe, dass die Dreiecke ABC, ADC und BCD ähnlich sind.

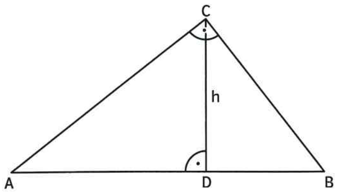
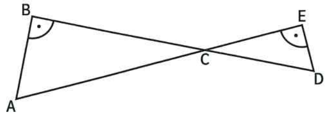


Fig. 4

Bist du sicher?

1 a) Begründe, dass die Dreiecke ABC und CDE ähnlich sind.
b) Berechne die fehlenden Dreieckseiten, wenn $\overline{AB} = 7{,}5\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 19{,}5\,\text{cm}$, $\overline{CE} = 10{,}8\,\text{cm}$ und $\overline{DE} = 4{,}5\,\text{cm}$.



6 In einem Rechteck mit den Seiten $a = 6\,\text{cm}$ und $b = 8\,\text{cm}$ ist die Diagonale $e = 10\,\text{cm}$ lang. Zeichnet man wie in Fig. 1 von A und C aus die Orthogonalen zur Diagonalen, so erhält man verschiedene Dreiecke.
a) Welche Dreiecke sind ähnlich? Weise die Ähnlichkeit nach.
b) Berechne die Seitenlängen der Dreiecke AED und ABE.

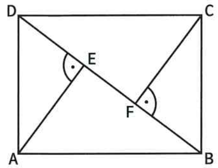


Fig. 1

7 a) Zeige, dass die vier Teildreiecke I bis IV in Fig. 2 ähnlich sind.
b) Berechne die Seitenlängen der Dreiecke.
c) In welchem Vergrößerungsverhältnis stehen die Dreiecke zueinander?

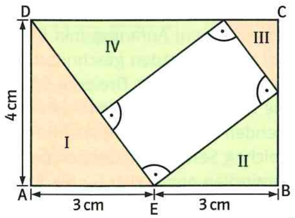


Fig. 2

8 Die Dreiecke ABC und ABD (in Fig. 3) sind gleichschenklig mit $\overline{AC} = \overline{BC} = 4{,}1\,\text{cm}$ und $\overline{AB} = \overline{AD} = 2{,}9\,\text{cm}$.
a) Zeige, dass die Dreiecke ABC und ABD ähnlich sind.
b) Wie lang ist die Strecke $\overline{BD}$?

9 Zeichne ein Dreieck ABC mit $a = 6\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$ und $c = 7\,\text{cm}$. Konstruiere über der Seite $\overline{AC}$ ein ähnliches Dreieck ACD, so dass der Seite $\overline{AB}$ im Dreieck ABC die Seite $\overline{AC}$ im Dreieck ACD entspricht. Mit welchem Vergrößerungsfaktor wird das Dreieck ACD gezeichnet? Wie verhalten sich die Flächeninhalte der beiden Dreiecke?

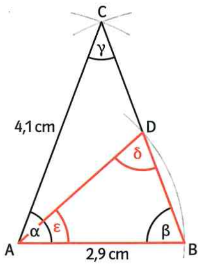


Fig. 3

Kannst du das noch?

10 Bestimme die Lösungen des linearen Gleichungssystems.

a) $3x - 2 = 2y$
$-2x + 1 = y$

b) $x - 2y - 3 = 0$
$2x + 2y + 1 = 0$

c) $\frac{3}{4}x - y = \frac{1}{2}$
$2x + \frac{1}{3}y = 2$

11 Auf sechs Kugeln sind die Buchstaben des Wortes ANANAS verteilt. Von den sechs Kugeln werden zufällig vier Kugeln gezogen und hintereinander auf den Tisch gelegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht das Wort ANNA?

4 Strahlensätze

Durch das Bewegen der Kerze oder der Figur kann der Schatten größer oder kleiner werden. Die Gesetzmäßigkeiten kann man durch Experimentieren und Messen von Abständen herausfinden.

Viele Berechnungen von Strecken lassen sich auf eine Grundfigur wie in Fig. 1 zurückführen. Dabei werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt S von zwei parallelen Geraden geschnitten. Man erkennt in der Figur die Dreiecke SAB und SCD. Sie sind ähnlich, da sie in den entsprechenden Winkeln übereinstimmen. Aus den gleichen Seitenverhältnissen bei ähnlichen Dreiecken ergibt sich für die Strecken auf den Strahlen:

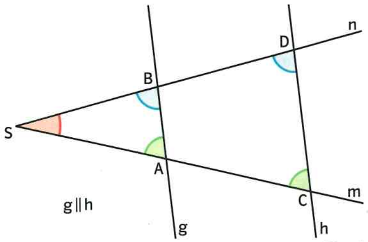


Fig. 1

$\frac{\overline{SD}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SA}}$.

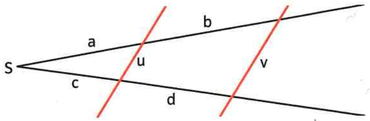
Da $\overline{SD} = \overline{SB} + \overline{BD}$ und $\overline{SC} = \overline{SA} + \overline{AC}$ ist, folgt: $\frac{\overline{SB} + \overline{BD}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SA} + \overline{AC}}{\overline{SA}}$ und

$1 + \frac{\overline{BD}}{\overline{SB}} = 1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{SA}}$ und $\frac{\overline{BD}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{SA}}$. Die Verhältnisgleichungen für Strahlenabschnitte werden im **1. Strahlensatz** zusammengefasst. Im **2. Strahlensatz** werden Verhältnisse von Strahlenabschnitten und Parallelenabschnitten betrachtet. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ergibt sich:

$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{SB}}$.

Strahlensätze

Werden zwei von einem Punkt S ausgehende Strahlen von zwei Parallelen geschnitten, dann gilt:



1. Die Abschnitte auf einem Strahl verhalten sich wie die entsprechenden Abschnitte auf dem anderen Strahl.
2. Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich wie die von S aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf einem Strahl.

1. Strahlensatz

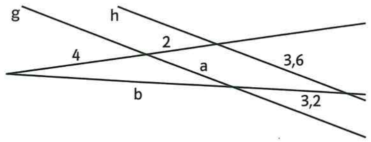
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$, $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

2. Strahlensatz

$\frac{v}{u} = \frac{a+b}{a}$, $\frac{v}{u} = \frac{c+d}{c}$

Beispiel 1 Berechnung einer Länge

In der Figur sind die Geraden g und h parallel. Berechne die Länge der Strecke a und der Strecke b.



Lösung:

b wird mit dem 1. Strahlensatz berechnet:

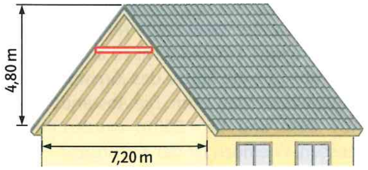
$\frac{b}{3{,}2} = \frac{4}{2}$ und $b = \frac{4 \cdot 3{,}2}{2} = 6{,}4$.

a wird mit dem 2. Strahlensatz berechnet:

$\frac{a}{3{,}6} = \frac{4}{4+2}$ und $a = \frac{4 \cdot 3{,}6}{6} = 2{,}4$.

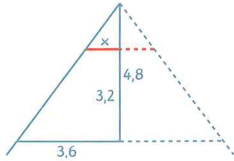
Beispiel 2 Anwendung Strahlensatz

In ein Dachgeschoss mit einer Höhe von 4,80 m soll auf einer Höhe von 3,20 m eine Decke eingezogen werden. Wie lang muss ein durchgängiger Deckenbalken sein?



Lösung:

Skizze:



Decke und Boden sind parallel.

Ansatz mit 2. Strahlensatz:

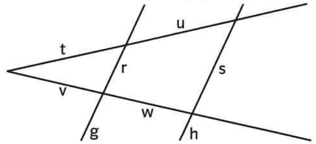
$\frac{x}{7{,}2} = \frac{4{,}8 - 3{,}2}{4{,}8}$ und $x = \frac{1{,}6 \cdot 7{,}2}{4{,}8} = 2{,}4$

Der Deckenbalken muss 2,40 m lang sein.

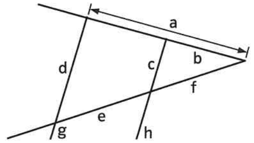
Aufgaben

1 In der Zeichnung ist g parallel zu h. Welche Verhältnisse sind gleich?

a)

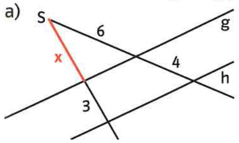


b)

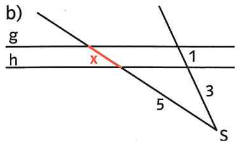


2 In der Zeichnung ist g parallel zu h. Berechne jeweils die fehlenden Größen.

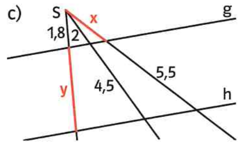
a)



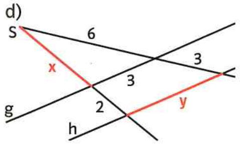
b)



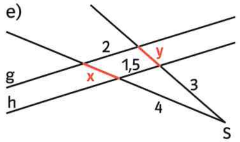
c)



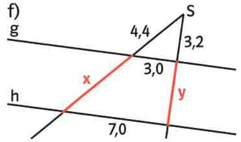
d)



e)

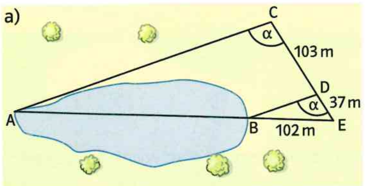


f)

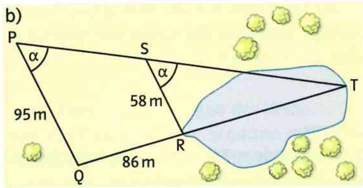


3 Berechne die Länge des Sees.

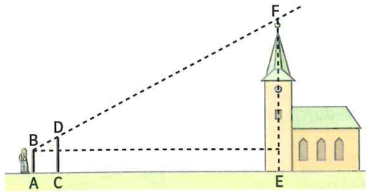
a)



b)



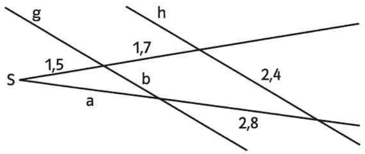
4 Um die Höhe des Kirchturmes zu ermitteln, werden zwei Stäbe $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ mit den Längen 1,4 m und 2,1 m so aufgestellt, dass über sie die Spitze des Kirchturmes angepeilt werden kann. Die Abstände $\overline{AC} = 1{,}5$ m und $\overline{CE} = 200$ m wurden gemessen. Wie hoch ist der Kirchturm?

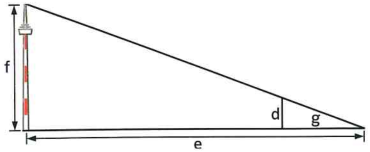


Bist du sicher?

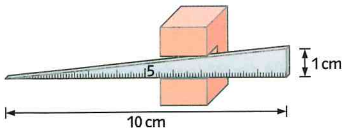
1 Die Geraden g und h sind parallel. Berechne die Längen a und b.

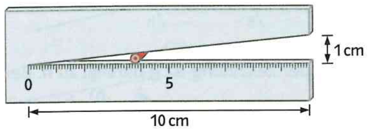
2 Wie hoch ist der Fernsehturm, wenn d = 1,8 cm, g = 64 cm und e = 2,6 km betragen?

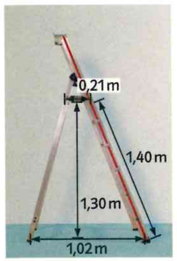




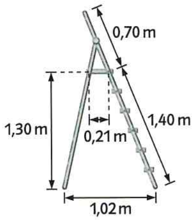
5 Mit Messkeil und Messlehre kann man kleine Öffnungen und kleine Dicken messen. Bestimme die Weite der Öffnung des Werkstücks und die Dicke des Drahtes.





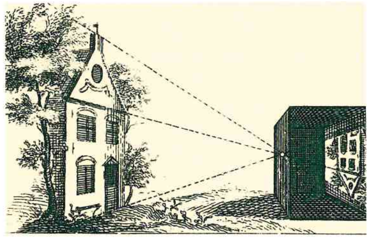


6 Eine Treppenleiter mit der maximalen Tritthöhe von 1,30 m soll in einem Kellerraum eingesetzt werden. Wie hoch muss der Raum mindestens sein, damit die Leiter aufgestellt werden kann? Welche Höhe über dem Fußboden hat man, wenn man auf der vierten Sprosse der Leiter steht?



5 Erweiterung der Strahlensätze

Mithilfe von so genannten Lochkameras wurden bereits im 16. Jahrhundert Landschaften und Gegenstände exakt verkleinert gezeichnet.



Bei den Strahlensätzen wurde immer vorausgesetzt, dass parallele Geraden von Strahlen geschnitten wurden (Fig. 1). Lässt man für die Strahlen auch Geraden zu, so können die Parallelen auch eine andere Lage haben (siehe Fig. 2). Dabei sind in den entstehenden Dreiecken ABS und CDS die sich entsprechenden Winkel gleich groß. Die Dreiecke sind deshalb ähnlich und man erhält für die Seitenverhältnisse:

$\frac{u}{v} = \frac{a}{d}$, $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$ und $\frac{u}{v} = \frac{b}{c}$.

Addiert man bei der zweiten Gleichung die Zahl 1, so ergibt sich

$1 + \frac{a}{d} = 1 + \frac{b}{c}$ und damit $\frac{d+a}{d} = \frac{c+b}{c}$.

Diese Gleichungen beschreiben die Strahlensätze für sich schneidende Geraden.

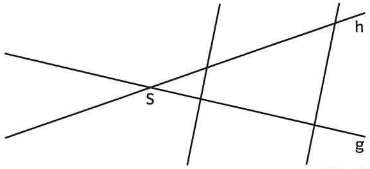


Fig. 1

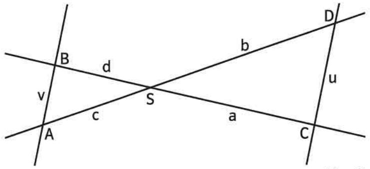


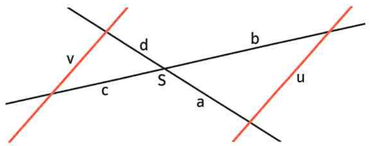
Fig. 2

Scheitelwinkel
∢ CSD = ∢ BSA

Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen:
∢ SAB = ∢ SDC,
∢ DCS = ∢ ABS

Strahlensätze

Werden zwei Geraden, die sich im Punkt S schneiden, von zwei Parallelen geschnitten, dann gilt:



1. Die Abschnitte auf einer Geraden verhalten sich zueinander wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen Geraden.

1. Strahlensatz

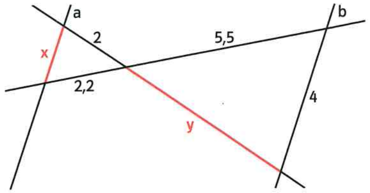
$\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$, $\frac{d+a}{d} = \frac{c+b}{c}$, $\frac{d+a}{a} = \frac{c+b}{b}$

2. Die Abschnitte auf den Parallelen verhalten sich zueinander wie die von S aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf einer Geraden.

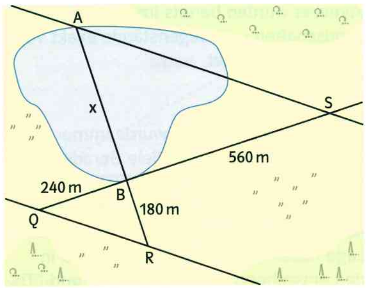
2. Strahlensatz

$\frac{u}{v} = \frac{a}{d}$, $\frac{u}{v} = \frac{b}{c}$

Beispiel 1 Berechnung einer Länge
In der Figur ist a ∥ b. Berechne x und y.
Lösung:
1. Strahlensatz:
$\frac{y}{2} = \frac{5,5}{2,2}$, also $y = \frac{5,5 \cdot 2}{2,2} = 5$.
2. Strahlensatz:
$\frac{x}{4} = \frac{2,2}{5,5}$, also $x = \frac{2,2 \cdot 4}{5,5} = 1,6$.



Beispiel 2 Anwendung
Die beiden Geländepunkte A und B sind durch einen See getrennt. Um die Entfernung zu bestimmen, wurde gepeilt und gemessen.
Berechne die Entfernung von A nach B.
Lösung:
Man erkennt die Strahlensatzfigur mit dem Schnittpunkt B.
1. Strahlensatz:
$\frac{x}{180} = \frac{560}{240}$, also $x = \frac{560 \cdot 180}{240} = 420$.
Die Entfernung zwischen den Geländepunkten A und B beträgt 420 m.



Aufgaben

1 Stelle mithilfe der Strahlensätze Verhältnisgleichungen für die Fig. 1 auf.

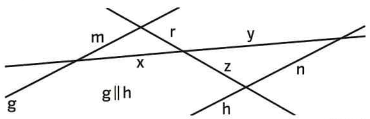


Fig. 1

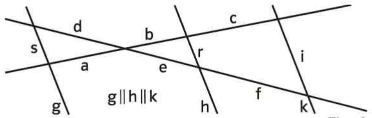
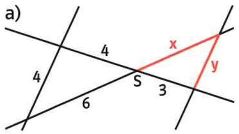
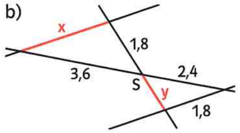
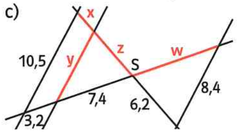


Fig. 2

2 Ergänze das □ im Heft so, dass eine richtige Verhältnisgleichung für Fig. 2 entsteht.
a) $\frac{a}{b} = \frac{\square}{e}$ b) $\frac{s}{i} = \frac{d}{\square}$ c) $\frac{a+b}{c} = \frac{\square}{f}$ d) $\frac{b}{\square} = \frac{r}{i}$ e) $\frac{a+b}{\square} = \frac{\square}{d}$ f) $\frac{b+c}{d} = \frac{i}{\square}$

3 Parallelen werden von zwei Geraden geschnitten. Berechne die fehlenden Längen.
a)


b)


c)


4 Die Punkte A und B liegen am Rand einer Schlucht. Im ebenen Gelände wurden Messungen zur Berechnung des Abstandes der Punkte durchgeführt (Fig. 3). Berechne den Abstand zwischen den Felspunkten.

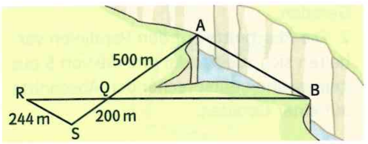
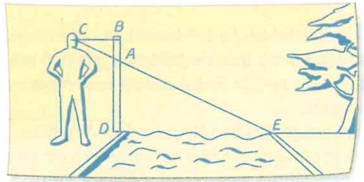


Fig. 3

5 Leonardo da Vinci (1452 – 1519) schlug vor, die Breite eines Flusses nach der nebenstehenden Zeichnung zu bestimmen. Erläutere das Verfahren, mit dem man die Breite berechnen kann, und bestimme die Flussbreite, wenn die folgenden Größen gemessen werden:
$\overline{BC} = 1\,m$, $\overline{AB} = 20\,cm$, $\overline{AD} = 1,5\,m$.



Bist du sicher?

1 Berechne x, y und z in der Fig. 1.

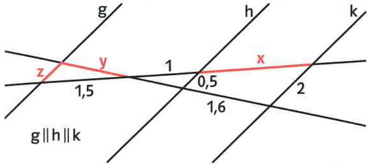


Fig. 1

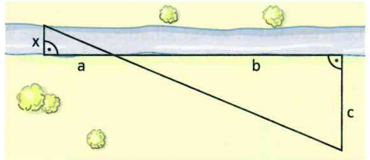


Fig. 2

2 Um die Breite eines Flusses von einer Uferseite aus zu bestimmen (Fig. 2), werden die Strecken a = 15 m, b = 60 m und c = 48 m gemessen. Bestimme die Flussbreite.

6 In Fig. 3 ist die Wirkungsweise einer Lochkamera schematisch dargestellt. Mit G und B werden die Gegenstandsgröße und die Bildgröße bezeichnet, mit g und b die Gegenstandsweite und Bildweite. Wie groß wird ein 114 m hoher Turm in 180 m Entfernung abgebildet, wenn die Bildweite 45 cm beträgt?

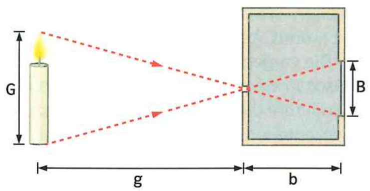
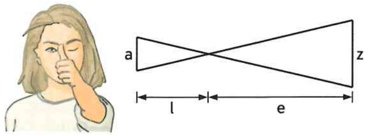
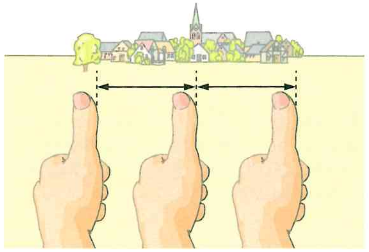


Fig. 3

7 Entfernungen im Gelände können mit dem so genannten Daumensprung abgeschätzt werden. Dabei peilt man einen Gegenstand hintereinander mit dem linken und dem rechten Auge an. Ist eine Geländegröße bekannt, lässt sich die zweite mittels Augenabstand und Armlänge abschätzen.





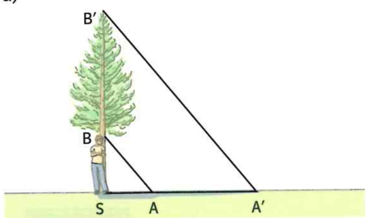
Beachte: 20 % aller Finger sind Daumen.

a) Wie weit steht Anke vom Dorf entfernt, wenn sie es mit zwei Daumensprüngen abdeckt? Augenabstand a = 6 cm, Armlänge l = 58 cm, Dorfbreite z = 1,4 km.
b) Miss deine Armlänge und deinen Augenabstand und schätze Entfernungen im Gelände.

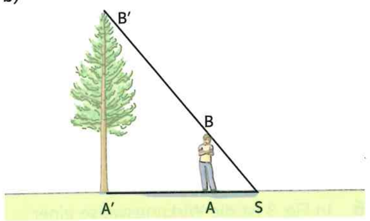
1 Betrachte die beiden Bilder.
a) Bestimme den Vergrößerungsfaktor, mit dem das zweite Bild aus dem ersten hervorgeht.
b) Fertige von den Bildern eine Vergrößerung mit einem Kopierer an. Merke dir den eingestellten Vergrößerungsfaktor. Wie kann man aus Original und Kopie die Kopiereinstellung ermitteln?

2 Ein Baum wirft einen Schatten der Länge 4,8 m. Die daneben stehende Person von 1,8 m Größe hat einen Schatten von 1,5 m. Wie groß ist der Baum? Nutze die Skizzen und beschreibe unterschiedliche Lösungswege.

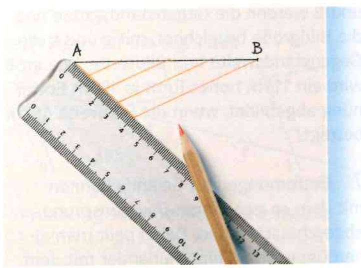
a)



b)



3 Die vorgegebene Strecke $\overline{AB}$ soll zeichnerisch in vier gleiche Teile zerlegt werden.
a) Erläutere die abgebildete Methode der Streckenteilung mithilfe der Strahlensätze.
b) Teile eine 11 cm lange Strecke in vier gleiche Teile.
c) Teile eine Strecke der Länge 13 cm in fünf gleiche Teile. Zeichne den Punkt T auf der Strecke ein, der sie in zwei Teilstrecken mit dem Längenverhältnis 2 : 3 teilt.



4 Eine Erbse von 6 mm Durchmesser verdeckt gerade den Vollmond (Fig. 1), wenn man sie 66 cm vom Auge entfernt hält. Berechne den Mondradius.

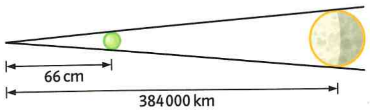
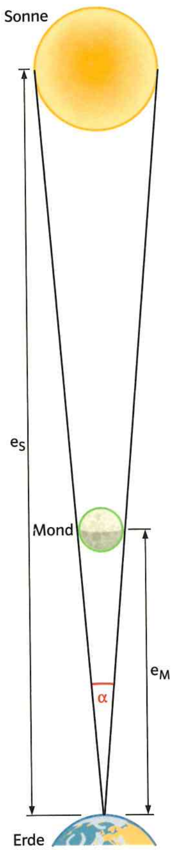


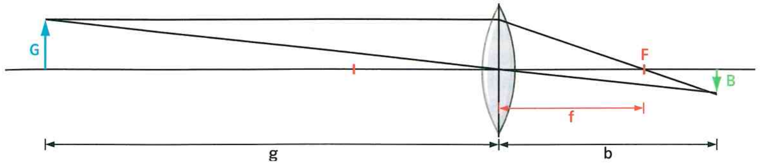
Fig. 1

5 Bei einer totalen Sonnenfinsternis verdeckt der Mond die Sonne und es entsteht auf der Erde ein Schatten des Mondes. Die Schattengröße hängt von der genauen Stellung der Himmelskörper zueinander ab. Berechne die Entfernung der Sonne von der Erde, wenn bei einem Schattendurchmesser von 245 km auf der Erde der Mond eine Entfernung von der Erdoberfläche von 384 000 km hat.



Sonnendurchmesser: 1 392 000 km
Monddurchmesser: siehe Aufgabe 4

6 Die Figur zeigt den Strahlenverlauf zur Bildentstehung an einer Sammellinse. Dabei ist g die Gegenstandsweite, b die Bildweite, G die Gegenstandsgröße und B die Bildgröße. Die Brennweite f wird durch Form und Glasart der Linse bestimmt.



a) Suche nach Strahlensatzfiguren, die für eine Berechnung an der Sammellinse nutzbar sind.
b) Stelle einen Zusammenhang zwischen den Größen Gegenstandsweite g, Bildweite b, Gegenstandsgröße G und Bildgröße B auf.
c) Wie weit muss ein Gegenstand von der Sammellinse mit der Brennweite 20 mm entfernt sein, damit von einem 1,6 m hohen Gegenstand ein Bild der Größe 36 mm entsteht?

7 Zeichne ein Rechteck mit der Breite 2 cm und der Länge 3 cm. Lege einen Punkt S fest und führe eine zentrische Streckung mit $k = 3$ durch.
a) Berechne und vergleiche die Flächeninhalte von Ausgangs- und Bildfigur. Welchen Zusammenhang kann man feststellen? Begründe deine Vermutung mithilfe von Strahlensätzen und Streckfaktor.
b) Bestätige die Vermutung aus a mit einem Beispiel, in welchem ein Dreieck zentrisch gestreckt wird.
c) In der Fig. 1 sind M_1 und M_2 jeweils die Seitenmitten. Das Dreieck ABC habe den Flächeninhalt von 5 cm². Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreiecks CM_1M_2?

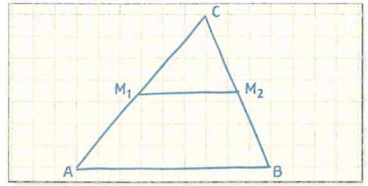
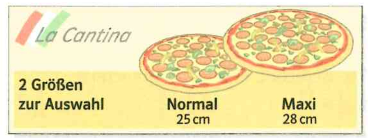
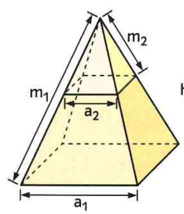


Fig. 1

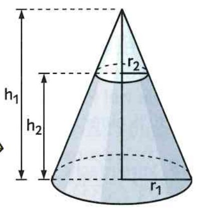
8 Eine Pizza „Italia" mit 25 cm Durchmesser kostet 5,80 €. Die gleiche Pizza kann man auch mit einem Durchmesser von 28 cm bestellen. Welchen Preis sollte diese Pizza haben? Begründe deine Antwort.



9 Von einer quadratischen Pyramide mit der Grundkante $a_1 = 40\,cm$ und der Mantelkante $m_1 = 50\,cm$ wird die Spitze abgeschnitten, deren Mantelkante $m_2 = 18\,cm$ beträgt.
Wie lang ist die Kante a_2 der Deckfläche des verbleibenden Pyramidenstumpfes?



10 Ein Kegel mit dem Radius $r_1 = 7{,}4\,cm$ und der Höhe $h_1 = 18{,}5\,cm$ soll so geschnitten werden, dass die Schnittfläche den Radius $r_2 = 2{,}6\,cm$ besitzt. In welcher Höhe muss der Kegel geschnitten werden?



Ein Winkel von 0,5° wird durch eine Lupe betrachtet, die 4fach vergrößert. In welcher Größe erscheint der Winkel?

11 Mit den abgebildeten Geräten („Storchenschnabel“ oder „Pantograph“) kann man Zeichnungen vergrößern oder verkleinern.
a) Schreibe einen mathematischen Aufsatz zur Funktionsweise des Gerätes.
b) Mit welchem Streckfaktor arbeitet das Gerät aus Fig. 1? Mit welchem Streckfaktor arbeitet das Gerät aus Fig. 2?
c) Zum Bauen eines eigenen Pantographen kann man Teile des Metallbaukastens nutzen oder aus Holz Stäbe zurechtsägen. Versuche eine Vergrößerungsmaschine zu bauen.

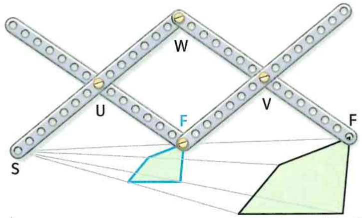


Fig. 1

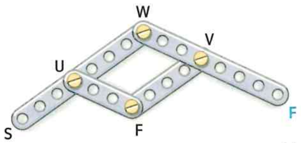
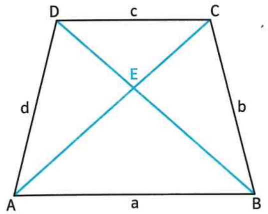
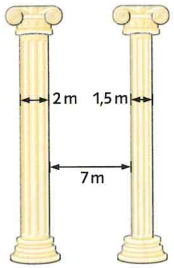


Fig. 2

12 Zeichne ein Trapez ABCD einschließlich der beiden Diagonalen. Erkennst du eine Strahlensatzfigur? Beweise, dass sich die Diagonalen im Verhältnis der Grundlinien a und c teilen.



13 Zwei runde Säulen mit 2m und 1,5m Durchmesser haben einen Abstand (lichte Weite) von 7m. In welcher Entfernung zur Säule steht ein Betrachter, für den die dünnere Säule gerade die dickere Säule verdeckt?



Kannst du das noch?

14 Ordne die angegebenen Zahlen den Zahlbereichen rationale Zahl, natürliche Zahl, reelle Zahl und ganze Zahl zu.
$2{,}54;\ -\frac{7}{3};\ \sqrt{4};\ -3{,}\overline{52};\ 7;\ -1376;\ -\sqrt{51};\ 132{,}3;\ \frac{21}{3}$

15 Ordne die Zahlen der Größe nach. Beginne mit der kleinsten.
$52{,}76;\ \frac{123}{5};\ -\frac{7}{3};\ \frac{56}{20};\ -1{,}37;\ \frac{639}{12};\ -2{,}3;\ \frac{87}{30};\ 25\frac{2}{3}$

16 Berechne ohne Taschenrechner.
a) $\frac{7}{5}+\frac{13}{15}$ b) $\frac{4}{6}-\frac{2}{9}$ c) $\frac{3}{14}+\frac{7}{4}$ d) $\frac{5}{2}+1{,}72$ e) $1{,}25-\frac{14}{8}$
f) $\frac{5}{12}\cdot\frac{9}{25}$ g) $\frac{18}{21}:\frac{9}{14}$ h) $\frac{14}{3}:6$ i) $2{,}5\cdot\frac{3}{8}$ j) $162{,}1\cdot 3{,}5$

17 a) Bestimme 20% von $\frac{12}{5}$.
b) Gib die um 120% vergrößerte Summe der Zahlen 3,5 und $\frac{5}{2}$ an.
c) Wie viel Prozent sind der achte Teil von 56?
d) 30% einer Zahl ergeben 20. Bestimme die Zahl.

18 Vereinfache so weit wie möglich.
a) $(\sqrt{3}+\sqrt{12})\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}(\sqrt{125}-\sqrt{45})$ c) $(\sqrt{50}-\sqrt{98}):\sqrt{2}$

Experimentieren mit Geometrie

In der klassischen Geometrie wurde mit Zirkel und Lineal konstruiert. Das Experimentieren mit geometrischen Figuren war damit sehr aufwändig. Mit Computerprogrammen kann man geometrische Konstruktionen im Nachhinein verändern. Durch das Beobachten von Veränderungen an einer geometrischen Figur oder das Vergleichen von Längen und Winkeln kann man Gesetzmäßigkeiten erkennen.

Untersuchung der zentrischen Streckung

Zum Dreieck ABC wird eine zentrische Streckung konstruiert. Dazu legt man das Streckzentrum S und den Streckfaktor k als Verhältnis der Teilstrecken $\overline{EG}$ und $\overline{GF}$ fest (Fig. 1). Durch das Verschieben des Punktes G auf der Geraden $\overline{EF}$ kann der Streckfaktor $k = \frac{\overline{GF}}{\overline{EG}}$ zwischen 0 und unendlich verändert werden.

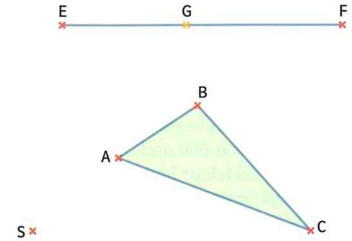


Fig. 1

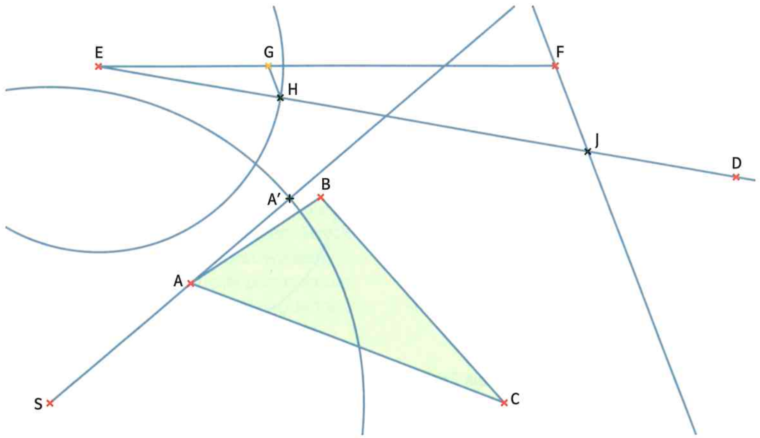
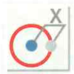


Fig. 2

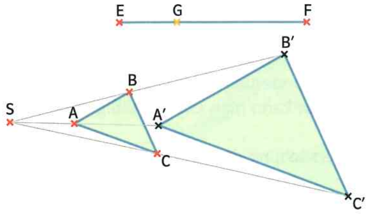
Um den Punkt A' zu konstruieren (Fig. 2), zeichnet man in E beginnend einen Strahl, auf dem die Länge $\overline{SA}$ von E aus abgetragen wird. Man erhält den Punkt H und $\overline{EH} = \overline{SA}$. Durch eine Parallele zur Strecke $\overline{GH}$ durch den Punkt F entsteht eine Strahlensatzfigur. Nach dem ersten Strahlensatz gilt:
$\frac{\overline{GF}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{HJ}}{\overline{EH}}$. Da $k = \frac{\overline{GF}}{\overline{EG}}$, folgt: $\overline{HJ} = k \cdot \overline{EH}$.
Die Länge der Strecke $\overline{SA'}$ entspricht damit der Länge der Strecke $\overline{HJ}$. Durch das Abtragen der Länge $\overline{HJ}$, beginnend im Punkt S, erhält man den Punkt A'. In Analogie konstruiert man die Punkte B' und C' und erhält das Dreieck A'B'C'. Nach dem Ausblenden der Hilfslinien kann durch das Ziehen an den Punkten S und G das Experimentieren beginnen.



Einen Kreis mit Radius abtragen

Experimentieren mit Geometrie

1 Konstruiere eine zentrische Streckung eines Dreiecks mit einem dynamischen Geometrieprogramm.

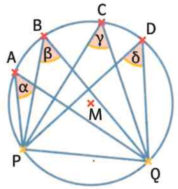


2 Wie verändert sich die Lage von Bild und Original zueinander, wenn die Lage des Streckzentrums verändert wird? Gib die Erkenntnisse in Abhängigkeit von der Lage des Punktes S an.

3 Wie ändert sich die Lage von Bild und Original zueinander, wenn der Streckfaktor verändert wird? Gib die Erkenntnisse in Abhängigkeit von der Größe des Streckfaktors an.

4 Konstruiere eine zentrische Streckung für ein Viereck bzw. Fünfeck. Untersuche auch hier die Lage von Bild und Original zueinander, wenn sich die Lage des Streckzentrums oder der Streckfaktor ändern. Für welche Formen des Vierecks bzw. Fünfecks gelten die gleichen Erkenntnisse wie beim Dreieck?

Ähnlichkeitssätze am Kreis



Die zu einer Kreissehne gehörenden Peripheriewinkel auf derselben Seite der Sehne sind gleich groß.

Zeichnet man in einen Kreis zwei Sehnen ein, so können diese sich wie in Fig. 1 schneiden. Dabei werden die Sehnen in vier Teilstrecken unterteilt. Beobachtet man die Längen der einzelnen Teilstrecken, so kann man Zusammenhänge feststellen.

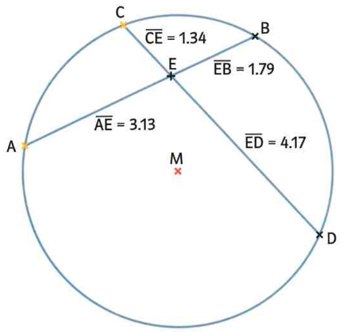


Fig. 1

5 Konstruiere mit einem dynamischen Geometrieprogramm einen Kreis mit Sehnen wie in Fig. 1. Verändere die Lage der Sehnen und beobachte die Längen der Teilstrecken. Welchen Zusammenhang kann man beobachten? Beschreibe den Zusammenhang mit einer Gleichung.

6 Formuliere den Sehnensatz als Erkenntnis aus den Untersuchungen an Fig. 1. Nutze den Satzanfang: „Schneiden sich zwei Sehnen in einem Punkt E im Kreisinneren, dann gilt: …"

Einen weiteren mathematischen Zusammenhang zur Ähnlichkeit am Kreis kann man beim Experimentieren an der Fig. 2 erkennen. Hier wurden von einem Punkt S außerhalb des Kreises zwei Sekanten gezeichnet. Durch die Schnittpunkte der Sekanten mit dem Kreis entstehen vier Sekantenabschnitte, deren Längen gemessen werden.

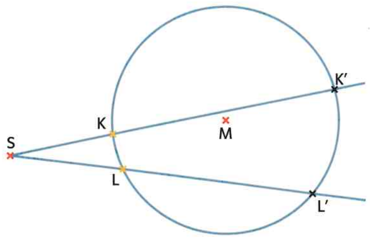


Fig. 2

Experimentieren mit Geometrie

7 Konstruiere mit einem Geometrieprogramm einen Kreis mit zwei Sekanten wie in Fig. 2 auf der vorhergehenden Seite. Miss die Längen der Sekantenabschnitte $\overline{SK}$, $\overline{SL}$, $\overline{SK'}$, $\overline{SL'}$ und versuche durch das Verändern der Figur Zusammenhänge zu erkennen.

8 Formuliere den Sekantensatz als Ergebnis der Beobachtung der Sekantenabschnitte mithilfe einer Verhältnisgleichung. Vergleiche deine Formulierung zum Sekantensatz mit den Informationen aus einer Formelsammlung.

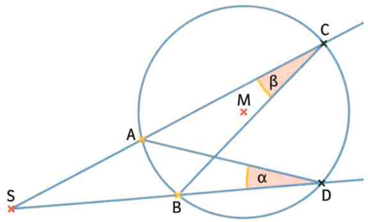


Fig. 1

9 Beweise den Sekantensatz. Nutze dazu die Hilfslinien aus Fig. 1 und zeige im ersten Schritt, dass die Dreiecke SAD und SBC ähnlich sind.

10 Wie verändert sich die Aussage vom Sekantensatz, wenn eine Sekante die spezielle Lage einer Tangente annimmt? Formuliere den Sekanten-Tangenten-Satz als Spezialfall des Sekantensatzes.

11 Beobachte den Übergang der Gültigkeit des Sekantensatzes zur Gültigkeit des Sekanten-Tangenten-Satzes mit einem Geometrieprogramm. Zeichne eine Skizze für den Sehnen-Tangenten-Satz und veranschauliche die ähnlichen Dreiecke, auf denen die Aussage des Sehnen-Tangenten-Satzes beruht.

Die Konstruktion eines maximalen Quadrates innerhalb einer vorgegebenen Figur

Soll in eine Figur ein maximales Quadrat eingezeichnet werden, so kann dies durch eine zentrische Streckung erfolgen. Streckzentrum und Ausgangsquadrat werden dabei so platziert, dass beim Zeichnen der gestreckten Figur ein maximales Quadrat innerhalb der vorgegebenen Figur entsteht. Um auf die richtige Lage des Ausgangsquadrates und des Streckzentrums zu kommen, kann man mit einem Geometrieprogramm experimentieren.

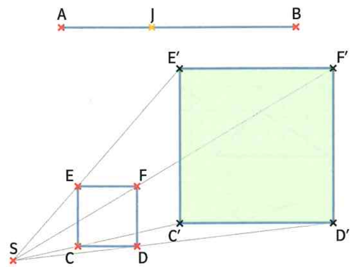
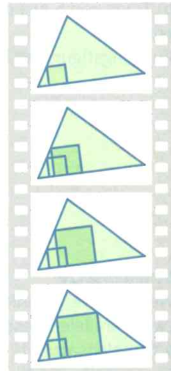


Fig. 2



12 Konstruiere eine zentrische Streckung eines Quadrates (Fig. 2), bei der der Streckfaktor k durch Verändern des Streckenverhältnisses $k = \frac{\overline{JB}}{\overline{AJ}}$ eingestellt werden kann.

13 Suche für die Figuren Dreieck, Halbkreis, Kreissektor und Parallelogramm passende Streckzentren und Lagen des Ausgangsquadrates, um ein maximales Quadrat durch zentrische Streckung in die Figur zu konstruieren.

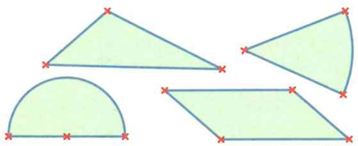
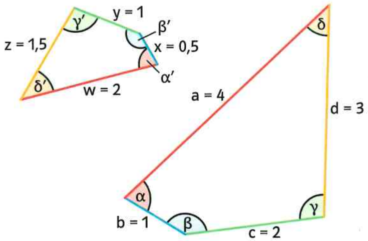


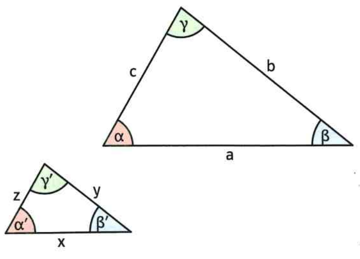
Fig. 3

Rückblick

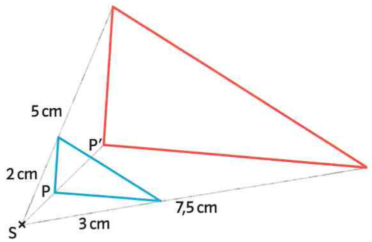
Ähnliche Vielecke
Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn die Längenverhältnisse entsprechender Seiten und die entsprechenden Winkel gleich sind.
$\frac{a}{w} = \frac{b}{x} = \frac{c}{y} = \frac{d}{z}$ und $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$



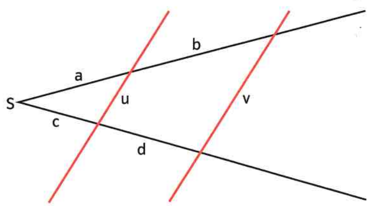
Ähnliche Dreiecke
Bei Dreiecken genügt zum Nachweis der Ähnlichkeit der Nachweis, dass sich entsprechende Winkel gleich groß sind:
$\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$
oder
der Nachweis von gleichen Seitenverhältnissen:
$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.



Zentrische Streckung
a) Zeichne einen Strahl von S durch P.
b) Trage von S aus das k-fache der Länge der Strecke $\overline{SP}$ ab und erhalte P'.
Ausgangsfigur und Bild einer zentrischen Streckung sind ähnlich.



Strahlensätze
Werden zwei Strahlen mit gemeinsamem Anfangspunkt S von zwei Parallelen geschnitten, dann gilt:
1. Strahlensatz:
$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$; $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$
2. Strahlensatz:
$\frac{u}{v} = \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

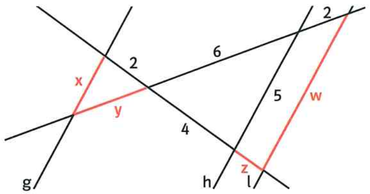


Training

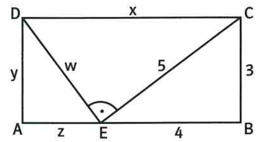
Runde 1

1 Zeichne in ein Koordinatensystem den Punkt S(1|1) und das Fünfeck ABCDE mit A(4|1), B(2|4), C(4|6), D(6|5) und E(7|3). Führe eine zentrische Streckung mit dem Streckzentrum S und dem Streckfaktor k = 2,5 für das Fünfeck aus.

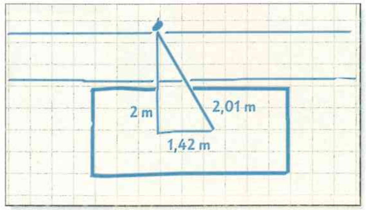
2 Die Geraden g, h und l sind parallel. Berechne die fehlenden Geradenabschnitte x, y, z und w.



3 In das Rechteck ABCD wurde ein rechter Winkel eingezeichnet.
a) Zeige, dass die Dreiecke ADE, DEC und EBC ähnlich sind.
b) Berechne die fehlenden Längenangaben.

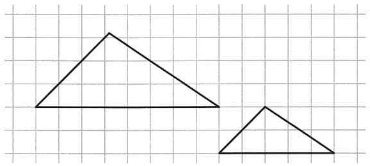


4 Kathrin und Bernd peilen aus ihrem Zimmer heraus einen Lichtmast auf der anderen Straßenseite an. Um die Entfernung zu berechnen haben sie die Strecken im Zimmer gemessen. Die Fensteröffnung beträgt 1,20 m. Welche Entfernung können die beiden für den Mast bestimmen?

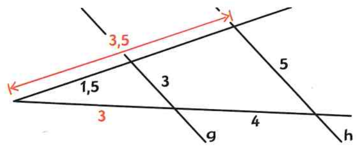


Runde 2

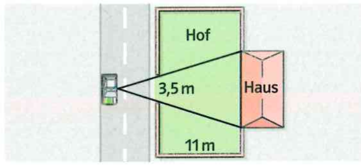
1 a) Begründe, dass die Dreiecke ähnlich sind.
b) Die Dreiecke sind das Ergebnis einer zentrischen Streckung. Bestimme den Streckfaktor k.
c) Übernimm die Dreiecke in dein Heft und konstruiere dann das Streckzentrum.



2 Jana hat in der Zeichnung geprüft, dass g∥h ist, und sie hat die schwarz beschrifteten Längen gemessen. Die mit Rot notierten Zahlen sind Ergebnisse ihrer Berechnung. Doch etwas kann nicht stimmen. Wo hat sich Jana verrechnet? Gib den Fehler möglichst genau an.



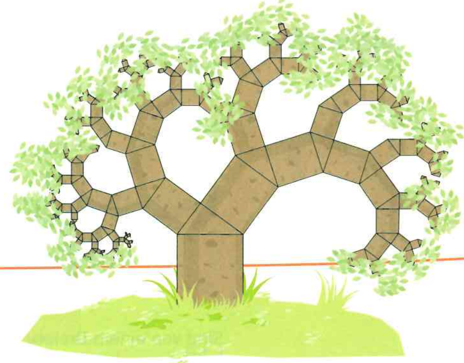
3 Gegenüber einer Toreinfahrt hat sich ein Polizeiauto platziert, um das im Hof befindliche 10 m breite Hinterhaus zu observieren. In welcher Entfernung von der Toreinfahrt muss das Fahrzeug stehen, damit die gesamte Hausfront eingesehen wird?



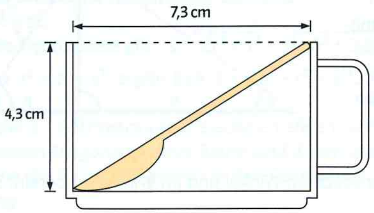
Das kannst du schon

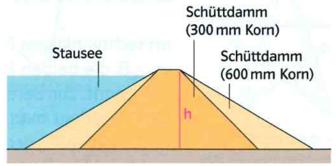
- Streckenlängen und Winkel in einem beliebigen Dreieck zeichnerisch ermitteln
- Kongruenzsätze bei Dreieckskonstruktionen und Beweisen nutzen
- Strahlensätze einsetzen

Pythagoras und noch viel mehr



In Flugzeugen ist das Bordgeschirr aus Gewichts- und Sicherheitsgründen aus Kunststoff. Eine Fluggesellschaft hat einen Kaffeelöffel herstellen lassen, der nur so groß ist wie unbedingt nötig.

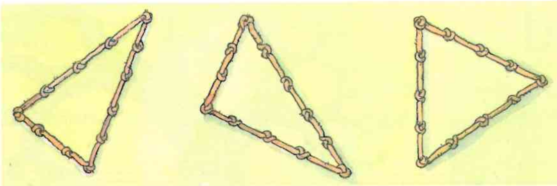




Das kannst du bald

- In rechtwinkligen Dreiecken einen rechnerischen Zusammenhang zwischen den drei Seiten herstellen
- In rechtwinkligen Dreiecken einen rechnerischen Zusammenhang zwischen Winkeln und Seitenverhältnissen herstellen
- In rechtwinkligen Dreiecken aus zwei geeigneten Größen alle weitere Größen berechnen
- Rechnerische Zusammenhänge zwischen Seiten und Winkeln in weiteren Figuren und Körpern nutzen

1 Der Satz des Pythagoras



12-Knoten-Seil

Es ist überliefert, dass vor mehr als 3000 Jahren im alten Ägypten so genannte Seilspanner nach den jährlichen Überschwemmungen des Nils die Felder neu vermessen haben. Dabei nimmt man an, dass sie mit Knoten-Seilen rechte Winkel gebildet haben.

Sind von einem Dreieck drei geeignete Größen bekannt, z. B. zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, so kann man es konstruieren und weitere Größen dieses Dreiecks anschließend durch Messen bestimmen.
Es stellt sich die Frage, ob man aus drei Größenangaben eines Dreiecks weitere Größen dieses Dreiecks nicht nur konstruieren und messen, sondern auch berechnen kann. Zunächst wird dies an rechtwinkligen Dreiecken untersucht.

Im rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 1) seien z. B. die beiden kürzeren Seiten a und b bekannt. Zur Berechnung der längeren Seite c zerlegt man das Dreieck ABC mithilfe der Höhe auf der längsten Seite in zwei rechtwinklige Dreiecke ADC und DBC.
Dreieck ADC und Dreieck ABC stimmen im rechten Winkel und im Winkel α überein.
Sie sind also ähnlich. Daher gilt: $\frac{b}{q} = \frac{c}{b}$.

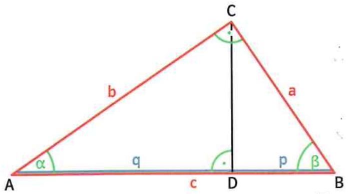


Fig. 1

Dreieck ABC und Dreieck DBC stimmen im rechten Winkel und im Winkel β überein. Sie sind also auch ähnlich. Es gilt: $\frac{a}{p} = \frac{c}{a}$.

Diese beiden Zusammenhänge nennt man auch ***Kathetensätze*** *(vgl. Aufgabe 14).*

Durch Umformen erhält man $a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$.
Damit ist $a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q = c \cdot (p + q) = c^2$, kurz $a^2 + b^2 = c^2$.
Das bedeutet, dass man in einem rechtwinkligen Dreieck die dritte Seite berechnen kann, wenn man zwei Seiten kennt. Es gilt z. B. für die längste Seite c: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

hypoteínusa *(griech.): die sich darunter hinziehene Linie*

káthetos *(griech.): senkrechte Linie*

Die dem rechten Winkel gegenüber liegende längste Seite bezeichnet man als **Hypotenuse** und die beiden anderen Seiten als **Katheten** (Fig. 2). Mithilfe dieser Bezeichnungen kann man wie folgt formulieren:

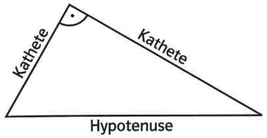
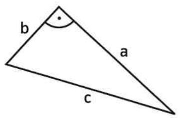


Fig. 2

Pythagoras (um 570 v. Chr. – um 475 v. Chr.), vgl. „Alles ist Zahl", Seite 55.

Satz des Pythagoras:
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c, dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$.



Wenn man im Satz des Pythagoras die Voraussetzung und die Behauptung vertauscht, dann entsteht eine neue Aussage. Man kann beweisen, dass auch sie wahr ist. Sie lautet: Wenn in einem Dreieck für die Seitenlängen $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig. Dies ist die **Umkehrung des Satzes von Pythagoras**. Mit ihr lässt sich also ohne Winkelmessung entscheiden, ob ein Dreieck rechtwinklig ist oder nicht.
Interpretiert man in der Formel
$a^2 + b^2 = c^2$
die Terme a^2, b^2 und c^2 als Flächeninhalte, dann lautet der Satz des Pythagoras:
Die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten a und b ist gleich dem Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse c (Fig. 1).

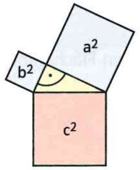
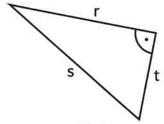


Fig. 1

Beispiel 1 Katheten und Hypotenuse erkennen und berechnen
a) Formuliere den Satz des Pythagoras für die abgebildete Figur 2. Berechne s, wenn $r = 6{,}5\,cm$ und $t = 3{,}8\,cm$ ist.
b) Berechne t, wenn $r = 4{,}3\,cm$ und $s = 12{,}1\,cm$ ist.



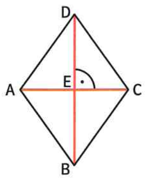
Hypotenuse: s, Katheten: r und t

Fig. 2

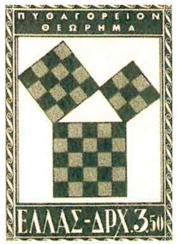
Das Pentagramm war das Geheimzeichen der Pythagoreer.

Lösung:
a) Das Dreieck ist rechtwinklig, damit ist: $r^2 + t^2 = s^2$.
Für die Hypotenuse gilt: $s = \sqrt{r^2 + t^2} = \sqrt{6{,}5^2 + 3{,}8^2}\,cm \approx 7{,}5\,cm$.
b) Aus $r^2 + t^2 = s^2$ ergibt sich $t = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{12{,}1^2 - 4{,}3^2}\,cm \approx 11{,}3\,cm$.

Beispiel 2 Rechtwinklige Dreiecke erkennen, Seitenlänge berechnen
Die beiden Diagonalen einer Raute sind 2,3 cm und 3,2 cm lang. Zeichne die Raute und berechne ihre Seitenlänge.
Lösung:



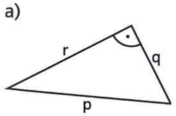
Die Diagonalen der Raute stehen senkrecht aufeinander und halbieren sich.
Das Dreieck ECD ist rechtwinklig. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:
$\overline{CD}^2 = \overline{EC}^2 + \overline{ED}^2$.
Also ist:
$\overline{CD} = \sqrt{\overline{EC}^2 + \overline{ED}^2} = \sqrt{1{,}15^2 + 1{,}6^2}\,cm \approx 2{,}0\,cm$.



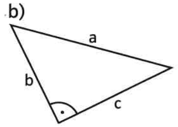
Aufgaben

1 Formuliere den Satz des Pythagoras für die abgebildeten Figuren.

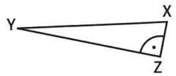
a)



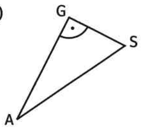
b)



c)



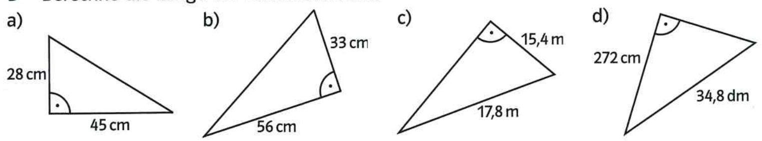
d)



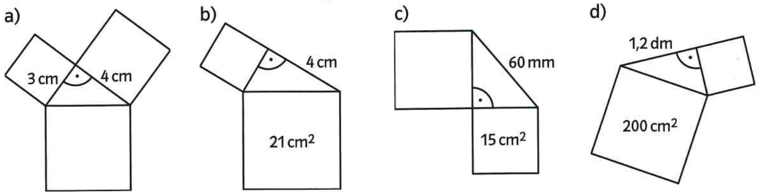
2 Berechne x im Kopf: $3^2 + x^2 = 10$; $5 + x^2 = 3^2$; $20 + 4^2 = x^2$; $x^2 + 12^2 = 13^2$.

Mit dem Satz des Pythagoras kann man Längen oder Flächeninhalte berechnen.

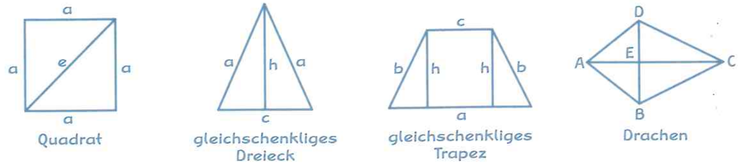
3 Berechne die Länge der fehlenden Seite.



4 Berechne den Flächeninhalt aller Quadrate.



5 Petra hat verschiedene Figuren skizziert. Suche in diesen Figuren rechtwinklige Dreiecke und formuliere für diese den Satz des Pythagoras.



6 a) In einem rechtwinkligen Dreieck sind die beiden Katheten 4,5 cm und 7,9 cm lang. Wie lang ist die Hypotenuse?
b) In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete 4,5 cm lang und die Hypotenuse 7,9 cm. Wie lang ist die zweite Kathete?

Bist du sicher?

1 a) In einem rechtwinkligen Dreieck sind die beiden Katheten 6,5 cm und 15,6 cm lang. Wie lang ist die Hypotenuse?
b) In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete 6,5 cm lang und die Hypotenuse 15,6 cm. Wie lang ist die zweite Kathete?

2 Eine Raute hat die Seitenlänge 5,1 cm. Eine Diagonale ist 4,5 cm lang. Wie lang ist die andere Diagonale?

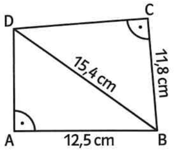


Fig. 1

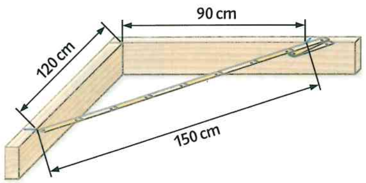
7 Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Vierecks ABCD in Fig. 1.

8 a) Begründe, dass das Dreieck mit den Seitenlängen 16 cm, 62 cm, 64 cm nicht rechtwinklig ist. Ändere eine Seite so ab, dass es rechtwinklig wird. Gibt es verschiedene Möglichkeiten?
b) Überprüfe rechnerisch, ob Dreiecke mit diesen Seitenlängen rechtwinklig sind.
(I) 8 cm, 15 cm, 17 cm (II) 1 dm, 13 cm, 17 cm (III) 20 m, 99 m, 101 m (IV) 36 km, 77 km, 83 km

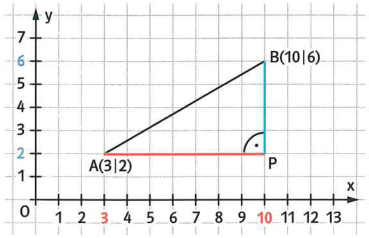
9 Wahr oder falsch?
a) Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann gilt der Zusammenhang $a^2 + b^2 = c^2$ nie.
b) Wenn in einem Dreieck der Zusammenhang $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann kann das Dreieck nicht gleichseitig sein.

Warum kann die Summe der beiden Katheten nicht so groß wie die Hypotenuse sein?

10 Um zwei sich berührende Leisten rechtwinklig auszurichten, misst der Tischler auf der einen Leiste 90 cm und auf der anderen 120 cm ab und markiert diese Stellen. Dann werden die beiden Leisten so ausgerichtet, dass die Markierungen 150 cm Abstand haben. Erkläre dieses Verfahren.

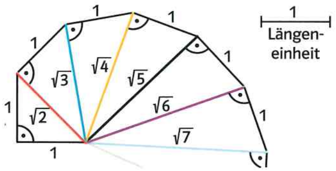


11 Punkte im Koordinatensystem
a) Wenn zwei Punkte A und B in einem Koordinatensystem angegeben sind, kann man ihren Abstand aus ihren Koordinaten berechnen.
Ermittle für A(3|2) und B(10|6) zunächst die Streckenlängen $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$. Berechne damit den Abstand von A und B.
b) Berechne den Abstand der Punkte C(−2|5) und D(−11|−3).

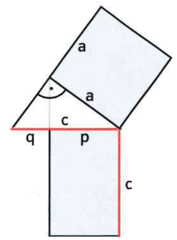


12 a) In einer Formelsammlung findet man für den Abstand zweier Punkte $A(x_a|y_a)$ und $B(x_b|y_b)$ die Formel $\overline{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$.
Erkläre die Formel anhand einer Skizze. Trage darin auch die Strecken der Länge $x_b - x_a$ und $y_b - y_a$ ein.
b) Berechne den Umfang des Dreiecks ABC mit A(1|1), B(10|2), C(6|8).

13 Mithilfe des Satzes von Pythagoras können Wurzeln aller natürlichen Zahlen als Strecken konstruiert werden. Es entsteht eine „pythagoreische Schnecke". Zeichne die Schnecke, bis sich die Dreiecke überschneiden.



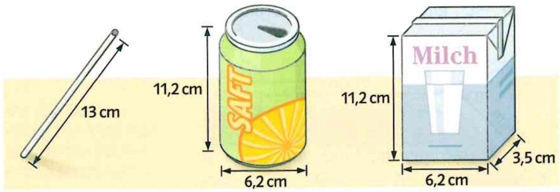
14 Die zwei Formeln $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$ werden unter dem Namen **Kathetensatz** zusammengefasst (vgl. Seite 36). Wenn man die Terme als Flächeninhalte interpretiert, dann lautet er:
In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über einer Kathete den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.
a) Fertige eine Skizze an, die die Gleichung $b^2 = q \cdot c$ veranschaulicht.
b) Berechne im Dreieck ABC ($\gamma = 90°$) die beiden Katheten aus $p = 5{,}7$ cm und $q = 7{,}2$ cm.



*p und q bilden zusammen die Hypotenuse. Sie heißen **Hypotenusenabschnitte**.*

15 Patrik hat bei der Berechnung von Streckenlängen in einem Viereck Folgendes notiert: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Wie könnte das Viereck aussehen? Zeichne verschiedene Vierecke.

2 Pythagoras in Figuren und Körpern



Hoffentlich fällt der Trinkhalm nicht in das Gefäß.

Mit dem Satz des Pythagoras kann man in vielen Figuren Streckenlängen berechnen, wenn es gelingt, in diese Figuren geeignete rechtwinklige Dreiecke einzuzeichnen.

In einem gleichseitigen Dreieck kann man den Satz des Pythagoras anwenden, wenn man die Höhe h einzeichnet (Fig. 1). Es entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke ADC bzw. DBC. Nach dem Satz des Pythagoras gilt:

$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ bzw. $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2$.

Also gilt für die Höhe im gleichseitigen Dreieck $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Damit kann man auch den Flächeninhalt berechnen. Es ist

$A = \frac{1}{2}a\,h = \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

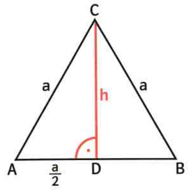


Fig. 1

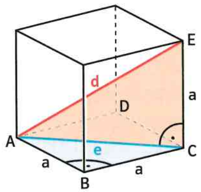


Fig. 2

Bei Körpern können ebenfalls Streckenlängen berechnet werden, wenn es gelingt, geeignete rechtwinklige Dreiecke in die Figur einzuzeichnen.

Der Winkel bei B ist ein rechter Winkel. Er erscheint im Schrägbild jedoch nicht als rechter Winkel.

Um in einem Würfel mit Kantenlänge a die Raumdiagonale d zu bestimmen, kann man folgendermaßen vorgehen:

Man zeichnet zunächst auf einer Seitenfläche die Flächendiagonale e ein und erhält somit zwei rechtwinklige Dreiecke ABC und ACD (Fig. 2). Die Raumdiagonale d bildet dann zusammen mit der Flächendiagonalen e und einer Kante a ebenfalls ein rechtwinkliges Dreieck ACE. Im rechtwinkligen Dreieck ABC gilt:

$e^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. Also ist $e = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Im rechtwinkligen Dreieck ACE kann man den Satz des Pythagoras noch einmal anwenden und erhält für die Raumdiagonale

$d^2 = e^2 + a^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$, also $d = a\sqrt{3}$.

Berechnung von Streckenlängen in der Ebene und im Raum:

1. Fertige eine Skizze an. Trage alle gegebenen und gesuchten Streckenlängen ein.
2. Suche nach rechtwinkligen Dreiecken, die diese Strecken enthalten. Eventuell sind zusätzliche Hilfslinien nötig.
3. Berechne mithilfe des Satzes von Pythagoras die gesuchte Strecke.

Beispiel Rechtwinklige Dreiecke suchen – Lösungsweg beschreiben

Das Dach eines Kirchturms hat die Form einer quadratischen Pyramide mit den Grundkanten a und den Seitenkanten b (vgl. Fig. 1).

a) Zeichne ein geeignetes rechtwinkliges Dreieck ein, mit dessen Hilfe man die Dachfläche berechnen kann. Berechne die Dachfläche, wenn a = 2,60 m ist und b = 21,10 m.

b) Gib zwei Möglichkeiten an, wie man mithilfe von a und b die Höhe h des Daches berechnen kann.

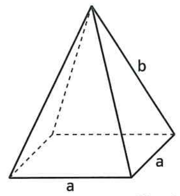
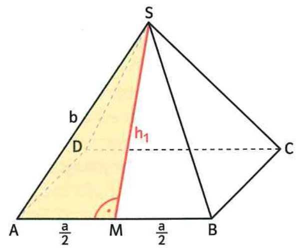


Fig. 1

Lösung:

a)



Im rechtwinkligen Dreieck AMS gilt:

$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_1^2 = b^2$.

Daraus lässt sich die Höhe h_1 des Dreiecks ABS berechnen. Es ist

$h_1 = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}$

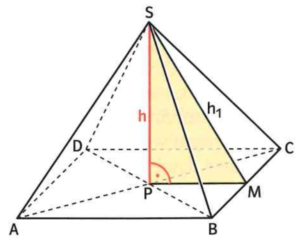
$= \sqrt{21{,}10^2 - \frac{1}{4} \cdot 2{,}60^2}\,\text{m} \approx 21{,}06\,\text{m}$.

Für den Flächeninhalt der Dachfläche gilt damit:

$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 = 2 \cdot a \cdot h_1$

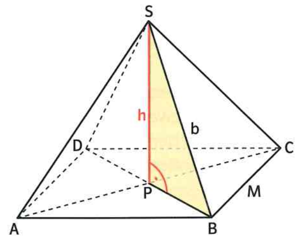
$\approx 2 \cdot 2{,}60 \cdot 21{,}06\,\text{m}^2 \approx 109{,}5\,\text{m}^2$.

b) 1. Möglichkeit



Das Dreieck MSP ist rechtwinklig. Eine Seite ist die gesuchte Höhe h. Es ist $\overline{MP} = \frac{a}{2}$ und $\overline{MS} = h_1$ (ist aus Teilaufgabe a bekannt).

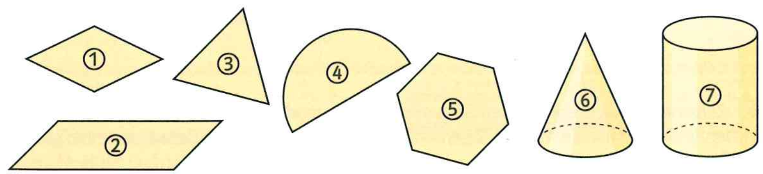
2. Möglichkeit



Das Dreieck BSP ist rechtwinklig. Eine Seite ist die gesuchte Höhe h. Die Seite $\overline{BS} = b$ ist gegeben, $\overline{BP}$ ist die halbe Diagonale im Quadrat ABCD und kann berechnet werden.

Aufgaben

1 Formuliere zu jeder Figur eine Aufgabe, die man mit dem Satz des Pythagoras berechnen kann. Zeichne dazu geeignete rechtwinklige Dreiecke ein.



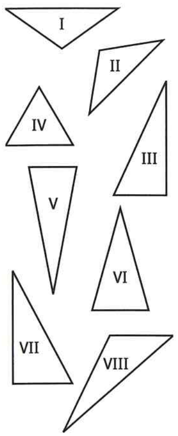


Fig. 1

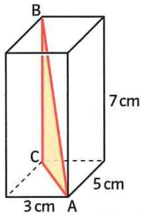


Fig. 2

2 a) Die Diagonalen eines Quadrats sind 7cm lang. Zeichne das Quadrat. Miss seine Seitenlänge. Kontrolliere dein Ergebnis durch eine Rechnung.
b) Ein Rechteck ist 15,5cm lang und 7,2cm breit. Wie lang sind seine Diagonalen?

3 a) Welche Skizzen passen zu welcher Aufgabe? Ordne jeder Aufgabe mögliche Dreiecke aus Fig. 1 zu und löse die Aufgabe.
A Eine Leiter ist 4,50m lang. Sie muss mindestens 1,50m von der Wand entfernt aufgestellt werden. Wie hoch reicht die Leiter?
B Eine Klappleiter ist 2,50m lang. Für einen sicheren Stand ist eine Standbreite von 1,20m vorgeschrieben. Wie hoch reicht die Leiter?
C Zwischen zwei Häusern wird ein Seil gespannt. In die Seilmitte wird eine Lampe gehängt. Die beiden Haken sind auf gleicher Höhe angebracht und 4,50m voneinander entfernt. Das Seil ist 5,10m lang. Wie groß ist der Durchhang?
D Ein Fahnenmast wird mit Drahtseilen gegen die Erde verspannt. Sie sind 5,10m lang und werden am Mast in einer Höhe von 4,50m angebracht. Wie groß muss der Platz um den Mast mindestens sein?
b) Erfinde zu Dreieck Nr. IV eine Textaufgabe, bei der man den Satz des Pythagoras braucht.

4 Konstruiere das Dreieck ABC (Fig. 2) in wahrer Größe. Überprüfe deine Konstruktion rechnerisch.

5 Zeichne das Schrägbild eines Quaders mit den Kantenlängen 8cm, 5cm und 3cm.
a) Zeichne eine Flächendiagonale ein. Wie viele verschiedene gibt es? Berechne ihre Längen.
b) Zeichne eine Raumdiagonale ein. Berechne ihre Länge.
c) Gib einen Schätzwert für die längste Strecke in deinem Klassenzimmer an. Miss die nötigen Größen und berechne sie anschließend. Um wie viel Prozent weicht dein Schätzwert vom errechneten Wert ab?

Bist du sicher?

1 In Fig. 3 ist der Querschnitt eines 3,20m hohen Damms dargestellt. Die Dammkrone ist 8,50m breit, die Böschungslinien sind 5,25m lang. Wie breit ist die Dammsohle?

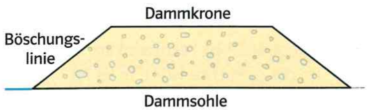


Fig. 3

2 Eine Tür ist 2m hoch und 80cm breit. Kann man durch sie eine 5,20m lange und 2,10m breite Holzplatte transportieren?

3 Der Quader wird durch einen Schnitt (Fig. 4) in zwei Hälften geteilt. Wie groß ist die „Schnittfläche"?

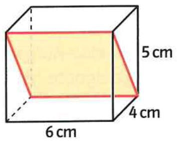


Fig. 4

6 Zeichne ein Rechteck mit den Seitenlängen 6cm und 4cm. Markiere die vier Seitenmitten und verbinde sie. Welche Eigenschaft hat das neue Viereck? Berechne seine Seitenlängen.

7 a) Gib für den Flächeninhalt des Trapezes in Fig. 1 eine Formel an.
b) Wie groß ist a, wenn der Flächeninhalt des Trapezes 13,5cm² ist?

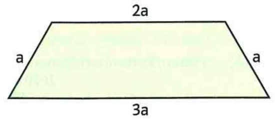


Fig. 1

8 In einem Quadrat mit der Seitenlänge a wird die Diagonale verdoppelt. Wie verändert sich die Seitenlänge und der Flächeninhalt?
Begründe auf verschiedene Arten.

9 Ein Tetraeder besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken (Fig. 2). Berechne seine Oberfläche, wenn $a = 7{,}2\,dm$ ist.

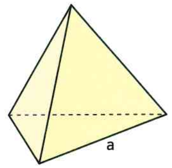


Fig. 2

10 Ein Quadrat wird durch einen Schnitt in zwei kongruente Flächen geteilt (Fig. 3).
a) Berechne die Länge der Schnittlinie, wenn mit 1cm und 9cm geteilt wird.
b) Berechne bei anderen Schnitten die Länge der Schnittlinie. Bei welcher Teilung ist die Schnittlinie 12cm lang?

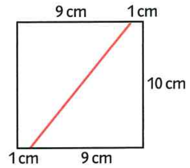


Fig. 3

11 Im Viereck ABCD stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander (Fig. 4). Überprüfe, ob für ein solches Viereck der Zusammenhang $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ gilt.

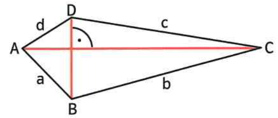


Fig. 4

Bei den Aufgaben 10 und 12 ist der GTR nützlich.

12 Zwei Gärten sind durch einen 5m breiten Weg getrennt (Fig. 5). Am Wegrand des Gartens von Familie Maier steht eine 7m hohe Fichte, die so gefällt werden soll, dass sie auf keinen Fall in den Garten von Familie Müller fällt. Berechne für verschiedene Absägehöhen die Entfernung der gefällten Baumspitze vom Stamm. Notiere deine Ergebnisse in einer Tabelle.
Veranschauliche die Tabellenwerte in einem Koordinatensystem. In welcher Höhe sollte die Fichte abgesägt werden?

Absägehöhe in m				
Entfernung Spitze – Stamm in m				

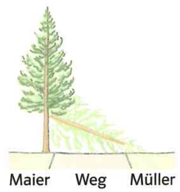


Fig. 5

13 Von einem Walmdach kennt man die Kantenlängen a, b, c und d (Fig. 6).
a) Skizziere das Walmdach. Zeichne geeignete rechtwinklige Dreiecke ein, mit deren Hilfe man die Dachfläche berechnen kann. Beschreibe den Rechenweg in Worten.
b) Wie kann die Höhe des Dachs berechnet werden?

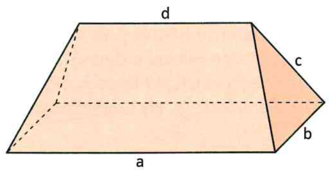


Fig. 6

14 **Würfelturm** (Fig. 7)
Ergänze die Tabelle. Suche eine Gesetzmäßigkeit. Beschreibe sie in Worten und mithilfe einer Formel.

Anzahl der Würfel	1	2	3	4
Länge der Raumdiagonalen				

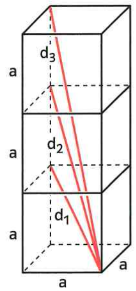
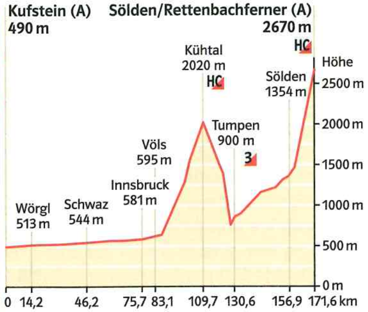


Fig. 7

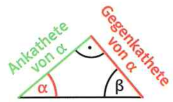
3 Sinus

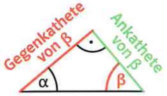
18.08.2005



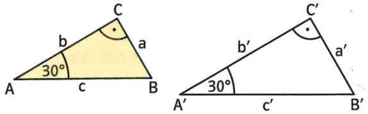
Die Königsetappe der Deutschland-Tour: Steil – Anspruchsvoll – Hochalpin
Die Königsetappe ist eine Beute des US-Amerikaners Levy Leipheimer geworden. Er feierte beim Rettenbach-Gletscher oberhalb von Sölden einen Solosieg. In der Schlussphase des ca. 14 km langen Anstiegs hinauf zum Ziel auf 2670 m Meereshöhe – für den Profiradsport stellte eine Ankunft in dieser Höhenlage ein Novum dar – war Leipheimer der klar stärkste Fahrer …
SFDRS Schweizer Fernsehen

Der Satz des Pythagoras beschreibt einen rechnerischen Zusammenhang zwischen Seiten im rechtwinkligen Dreieck. Nun wird untersucht, ob es im rechtwinkligen Dreieck auch rechnerische Zusammenhänge zwischen Seiten und Winkeln gibt.





Stimmen verschiedene rechtwinklige Dreiecke zusätzlich im Winkel α überein, so sind sie ähnlich und entsprechende Seitenverhältnisse sind gleich.



Es gilt z. B. $\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$

bzw. $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$.

Dieses Seitenverhältnis kann man z. B. bei $\alpha = 30°$ berechnen. Ergänzt man das Dreieck ABC wie in Fig. 1 zu einem gleichseitigen Dreieck ABD, so ist $\frac{a}{c} = \frac{\frac{1}{2}c}{c} = \frac{1}{2}$. Das Seitenverhältnis $\frac{a}{c}$ hat also für alle rechtwinkligen Dreiecke mit $\alpha = 30°$ denselben Wert $\frac{1}{2}$.

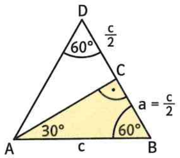


Fig. 1

Weiß man umgekehrt von einem rechtwinkligen Dreieck, dass das Verhältnis $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}$ ist, so ist $\alpha = 30°$. Ändert sich in einem rechtwinkligen Dreieck der Winkel α, so ändert sich auch das Seitenverhältnis $\frac{a}{c}$. Es ist jedoch für jeden Winkel α fest. Man kann dieses Verhältnis für jeden Winkel α dem GTR entnehmen.
In einem rechtwinkligen Dreieck mit Winkel α bezeichnet man die Kathete, die dem Winkel α gegenüberliegt, als **Gegenkathete** von α, die andere als **Ankathete** von α.

In allen rechtwinkligen Dreiecken, die in einem weiteren Winkel α übereinstimmen, ist das Seitenverhältnis $\frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ gleich.
Man nennt diese Zahl **Sinus von α** und schreibt $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$.

Die Zahl sin(α) liefert der GTR. Meist rundet man sie auf vier Dezimalen. Umgekehrt liefert der GTR durch den Befehl $\sin^{-1}$ den zum Seitenverhältnis gehörenden Winkel α (Fig. 1).

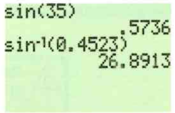


Fig. 1

Achtung: Der GTR muss auf „Degree" eingestellt sein.

Beispiel 1 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck
Gegeben ist das Dreieck ABC mit $\beta = 90°$.
a) Berechne den Winkel α, wenn $a = 6{,}7\,\text{cm}$ ist und $b = 7{,}3\,\text{cm}$.
b) Berechne die Seite c, wenn $b = 6{,}7\,\text{cm}$ und $\gamma = 43°$ ist.

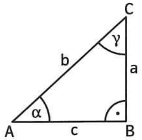
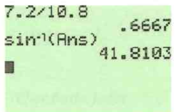


Fig. 2

Lösung:
a) $\sin(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{6{,}7}{7{,}3} \approx 0{,}9178$.
Mit dem GTR erhält man $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{6{,}7}{7{,}3}\right) \approx 66{,}6°$.
b) $\sin(\gamma) = \frac{c}{b}$, also ist $c = b \cdot \sin(\gamma) = 6{,}7\,\text{cm} \cdot \sin(43°) \approx 4{,}6\,\text{cm}$.

Will man mit einem genaueren Wert weiterrechnen, so kann man die ANS-Taste verwenden.



Beispiel 2 Winkel und Seiten berechnen – Seitenverhältnisse angeben
a) Berechne in Fig. 3 den Winkel α, wenn $\gamma = 90°$, $a = 7{,}2\,\text{cm}$ und $c = 10{,}8\,\text{cm}$ ist.
Wie groß ist die Höhe h?
b) Gib sin(α), sin(β), $\sin(\gamma_1)$ und $\sin(\gamma_2)$ mithilfe der Variablen a; b; … aus Fig. 3 an.

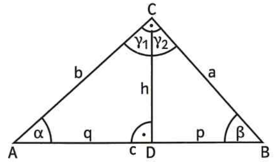
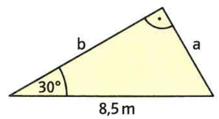


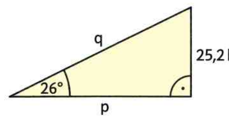
Fig. 3

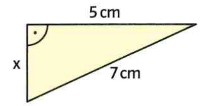
Lösung:
a) $\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{7{,}2}{10{,}8} \approx 0{,}6667$. Mit dem GTR erhält man $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) \approx 41{,}8°$.
Da die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, ist $\beta = 180° - 90° - \alpha \approx 48{,}2°$.
Im Dreieck DBC ist $\sin(\beta) = \frac{h}{a}$, also $h = a \cdot \sin(\beta) \approx 7{,}2\,\text{cm} \cdot \sin(48{,}2°) \approx 5{,}4\,\text{cm}$.
b) $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ bzw. $\sin(\alpha) = \frac{h}{b}$, $\sin(\beta) = \frac{b}{c}$ bzw. $\sin(\beta) = \frac{h}{a}$, $\sin(\gamma_1) = \frac{q}{b}$ und $\sin(\gamma_2) = \frac{p}{a}$.

Aufgaben

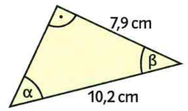
1 a) Berechne die fehlenden Seitenlängen.

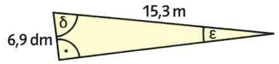


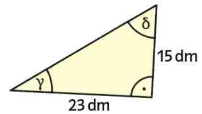




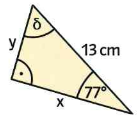
b) Berechne die fehlenden Winkel.

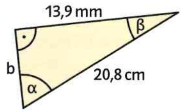


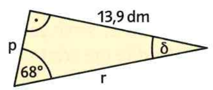




c) Berechne die fehlenden Größen.

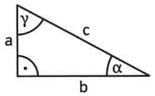




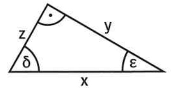


2 Ergänze.

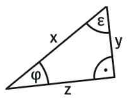
a) $\sin(\alpha) = \square$
$\sin(\gamma) = \square$



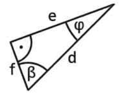
b) $\sin(\delta) = \square$
$\sin(\varepsilon) = \square$

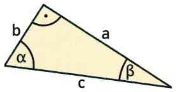


c) $\frac{z}{x} = \sin(\square)$
$\frac{y}{x} = \sin(\square)$



d) $\frac{f}{d} = \sin(\square)$
$\frac{e}{\square} = \sin(\square)$





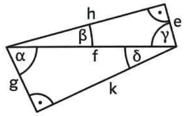
3 In einem Dreieck ist $\gamma = 90°$.
a) Berechne für $a = 13{,}2\,cm$ und $c = 25{,}6\,cm$ den Winkel α und die Seite b.
b) Berechne für $b = 3{,}25\,m$ und $c = 7{,}6\,m$ alle Seiten und Winkel des Dreiecks.

Bist du sicher?

1 Berechne die fehlenden Größen in dem Dreieck.

	a	b	c	α	β	γ
a)	4,5 cm		7,6 cm			90°
b)		8,61 dm		26°	90°	
c)		3,6 m	13,2 dm	90°		

2 Ergänze.
$\frac{e}{f} = \sin(\square)$, $\sin(\gamma) = \square$
$\frac{k}{\square} = \sin(\square)$, $\frac{g}{\square} = \sin(\square)$



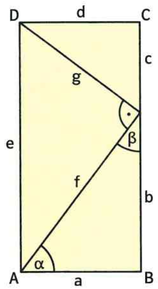


Fig. 1

4 Gib für das Rechteck in Fig. 1 drei Seitenverhältnisse für $\sin(\alpha)$ bzw. $\sin(\beta)$ an.

5 a) Eine 7,5 m lange Leiter lehnt in 6,6 m Höhe an der Wand. Wie groß ist der Anstellwinkel?
b) Ein Mast soll mit 20 m langen Seilen gesichert werden. In welcher Höhe müssen sie angebracht werden, wenn ihr Neigungswinkel ca. 65° sein soll?

6 a) Bestimme $\sin(45°)$ und $\sin(60°)$ ohne GTR. Zeichne dazu ein geeignetes Dreieck.
b) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse c dreimal so lang wie die Kathete a. Ermittle $\sin(\alpha)$ und $\sin(\beta)$.

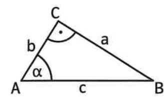
7 Die Gondel eines Riesenrads (Durchmesser 60 m) startet in Position 1 und ist nach 9 Minuten am höchsten Punkt.
a) Ermittle die Höhenzunahme h nach 1 min, 2 min … 9 min zeichnerisch.
b) Überprüfe die Werte rechnerisch. Stelle das Ergebnis in einer Tabelle und in einem geeigneten Koordinatensystem dar.

4 Kosinus und Tangens

Österreichs steilste Piste mit 78 Prozent
„Hau di runter" – so schallt es im Winter auf Österreichs steilster Skipiste. Das Skigebiet Mayrhofen gibt schneidigen Pistenflitzern eine harte Nuss zu knacken. Mit einem Gefälle von 78 Prozent verlangt der Harakiri-Steilhang eine Extraportion Standfestigkeit und Technik, um unten anzukommen …
GEA 29.10.2005

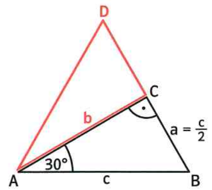
Mit dem Satz des Pythagoras und dem Seitenverhältnis $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ lassen sich alle Seiten und Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck berechnen. Manchmal ist es jedoch günstiger, wenn man auch andere Seitenverhältnisse verwendet.

In einem rechtwinkligen Dreieck nennt man das Seitenverhältnis $\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$ den **Kosinus von α** bzw. $\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$ den **Tangens von α** und schreibt $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ bzw. $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$.



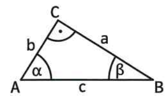
Früher hatte jedes Seitenverhältnis einen Namen:
Sinus
Kosinus
Tangens
Kotangens
Sekans
Kosekans

In einem rechtwinkligen Dreieck mit $\alpha = 30°$ kann man $\cos(30°)$ bzw. $\tan(30°)$ berechnen. Ergänzt man das Dreieck ABC zu einem gleichseitigen Dreieck ABD mit der Seitenlänge c, dann ist b die Höhe in diesem Dreieck. Es ist also $b = \frac{c}{2}\sqrt{3}$.
Somit ist $\cos(30°) = \frac{b}{c} = \frac{c}{2}\sqrt{3} : c = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.
Für $\tan(30°)$ ergibt sich $\tan(30°) = \frac{a}{b} = \frac{c}{2} : \frac{c}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.



Wie beim Sinus lassen sich $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ für jeden beliebigen Winkel α mit dem GTR bestimmen.

Beispiel 1 Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck
a) Berechne a und b, wenn $\alpha = 37°$, $c = 5{,}3\,cm$ und $\gamma = 90°$ ist.
b) Berechne α und β, wenn $a = 6{,}1\,cm$, $b = 3{,}4\,cm$ und $\gamma = 90°$ ist.



Lösung:
a) $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$, $b = c \cdot \cos(\alpha) = 5{,}3\,cm \cdot \cos(37°) \approx 4{,}2\,cm$,
$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $a = c \cdot \sin(\alpha) = 5{,}3\,cm \cdot \sin(37°)\,cm \approx 3{,}2\,cm$.
b) $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{6{,}1}{3{,}4} \approx 1{,}7941$, $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{6{,}1}{3{,}4}\right) \approx 60{,}9°$, $\beta = 90° - \alpha \approx 29{,}1°$.

Beispiel 2 Seitenverhältnis bzw. Winkel angeben
a) Drücke in Fig. 1 $\cos(\alpha)$ und $\tan(\gamma)$ jeweils auf verschiedene Weisen als Seitenverhältnis aus.
b) Drücke in Fig. 1 $\frac{t}{u}$; $\frac{s}{t}$; $\frac{h}{r}$ und $\frac{t}{r+s}$ als Kosinus oder Tangens aus.

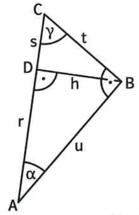


Fig. 1

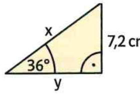
Lösung:
a) $\cos(\alpha) = \frac{u}{r+s}$ *Dreieck ABC: u: Ankathete von α, r + s: Hypotenuse*
$\cos(\alpha) = \frac{r}{u}$ *Dreieck ABD: r: Ankathete von α, u: Hypotenuse*
$\tan(\gamma) = \frac{u}{t}$ *Dreieck ABC: u: Gegenkathete von γ*
t: Ankathete von γ
$\tan(\gamma) = \frac{h}{s}$ *Dreieck BCD: h: Gegenkathete von γ, s: Ankathete von γ*

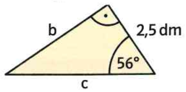
Im Dreieck ABC gilt auch: $\frac{t}{r+s} = \sin(\alpha)$.

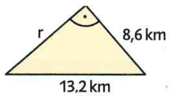
b) $\frac{t}{u} = \tan(\alpha)$ *im Dreieck ABC* | $\frac{s}{t} = \cos(\gamma)$ *im Dreieck BCD* | $\frac{h}{r} = \tan(\alpha)$ *im Dreieck ABD* | $\frac{t}{r+s} = \cos(\gamma)$ *im Dreieck ABC*

Aufgaben

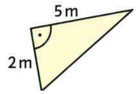
1 a) Berechne die fehlenden Seitenlängen.

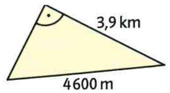


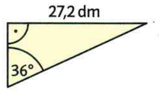




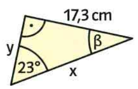
b) Berechne die fehlenden Winkel.

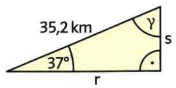


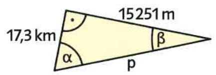




2 Berechne die fehlenden Größen.







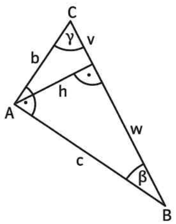


Fig. 4

3 a) Drücke $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\tan(\beta)$ als Seitenverhältnis aus (Fig. 2).
b) Drücke $\frac{z}{y}$; $\frac{z}{x}$; $\frac{x}{y}$ durch Sinus, Kosinus oder Tangens aus (Fig. 3).

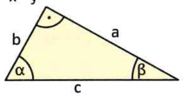


Fig. 2

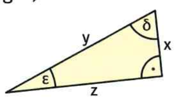
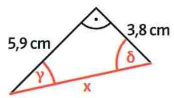


Fig. 3

4 a) In einem Dreieck ist $\alpha = 37°$, $\beta = 90°$ und $b = 7{,}2\,cm$. Berechne a und c.
b) In einem Dreieck ist $\alpha = 90°$, $c = 3{,}2\,cm$ und $a = 8{,}6\,cm$. Berechne β und γ.

Bist du sicher?

1 a) Berechne die fehlenden Größen.
b) Drücke in Fig. 4 $\tan(\beta)$ und $\cos(\gamma)$ jeweils auf verschiedene Weisen als Seitenverhältnis aus.



5 Tom notiert: $\cos(\varphi) = \frac{x}{z}$. Wie könnte ein zugehöriges Dreieck aussehen?

6 Was gehört in Figur 1 zusammen?

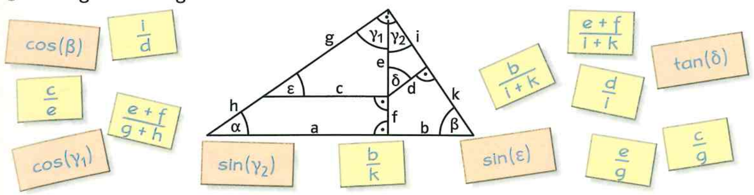


Fig. 1

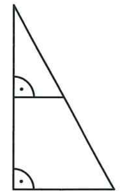


Fig. 2

7 Führe in Fig. 2 geeignete Bezeichnungen ein. Notiere vier verschiedene Seitenverhältnisse. Deine Partnerin bzw. dein Partner muss sie durch Sinus, Kosinus bzw. Tangens geeigneter Winkel ausdrücken.

Merkhilfe:

α	sin(α)	cos(α)
0°	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
30°	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$
90°	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

α	tan(α)
0°	0
30°	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	1
60°	$\sqrt{3}$
90°	–

8 Kosinus- und Tangenswerte für 45° und 60° kann man leicht berechnen.
a) Zeichne ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Bestätige damit die Angaben in der Tabelle (Fig. 3) für cos(45°) und tan(45°).
b) Zeichne ein gleichseitiges Dreieck. Zeichne eine geeignete Hilfslinie ein und bestätige damit weitere Angaben aus der Tabelle.

9 Die Steigung einer Straße ist das Verhältnis des Höhenunterschieds h zur horizontalen Strecke s. Eine 320,5 m lange gerade Straße hat die Steigung 7,5 %.
a) Berechne den Steigungswinkel dieser Straße.
b) Wie groß ist der Höhenunterschied, den die Straße überwindet?
c) Wie lang ist dieses Straßenstück auf einer Karte im Maßstab 1 : 25 000?

10 Wahr oder falsch?
a) Wenn man den Winkel α verdoppelt, dann verdoppelt sich auch tan(α).
b) Wenn man die Ankathete des Winkels α halbiert und die Hypotenuse c fest lässt, so halbiert sich auch cos(α).
c) Je kleiner der Winkel α ist, umso kleiner ist auch cos(α).

Kannst du das noch?

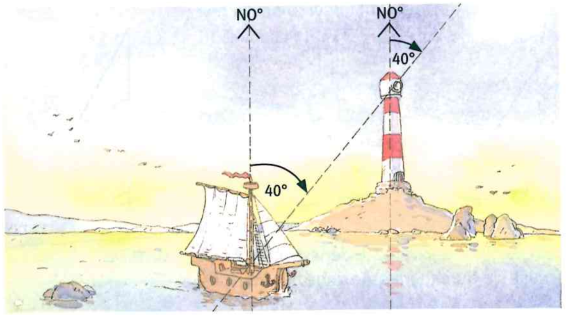
11 Berechne ohne Taschenrechner: 10^5; $5 \cdot 2^5$; $3 \cdot 4 - 3^4$; $(-10)^6 - 10^5$; $-10^6 - 10^5$.

12 Gegeben sind die Funktionsgleichungen $y = \frac{1}{4}x^3$, $y = -\frac{1}{4}x^3$, $y = \frac{1}{4}x^4$, $y = -x^2 + 2$ und die Punkte $A(2|y)$, $B(-2|y)$, $C(-\frac{1}{2}|y)$ und $D(0{,}1|y)$.
a) Bestimme für jeden Graphen die y-Koordinaten der Punkte A, B, C und D.
b) Skizziere die Graphen.

13 a) Bestimme die Wurzel: $\sqrt{144}$, $\sqrt{1{,}44}$, $\sqrt{0{,}01}$, $\sqrt{0{,}25}$, $(\sqrt{2{,}5})^2$, $(-\sqrt{2{,}5})^2$, $(\sqrt{2{,}5})^4$.
b) Berechne: $6\sqrt{2} + 13\sqrt{2}$, $5\sqrt{3} - 7\sqrt{12} + \sqrt{75}$, $\sqrt{5} \cdot (\sqrt{50} - \sqrt{2}) - \sqrt{10}$, $(\sqrt{3} - \sqrt{7})(\sqrt{3} + \sqrt{7})$.

14 Multipliziere aus und fasse so weit wie möglich zusammen.
a) $(x - 3)(5 + x)$ b) $(a + 3)(2a + 5)$ c) $-(2 + b)(4b + 7)$ d) $(4 - b)(4 - b)$

5 Winkel- und Längenberechnungen

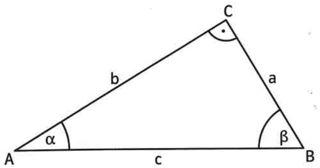


In der Schifffahrt wird die Fahrtrichtung Kurs genannt. Der Kurs wird in Grad und Minuten als Abweichung von der Nordrichtung im Uhrzeigersinn angegeben.

Ein Schiff fährt auf dem Kurs 90°. Der Kapitän nimmt die erste Peilung bei 40° vor. Wenn er die zweite Peilung geschickt macht, kann er bei bekannter Geschwindigkeit berechnen, wie weit er vom Leuchtturm entfernt ist.

Sind in einem rechtwinkligen Dreieck eine Seite und ein weiterer Winkel oder zwei Seiten bekannt, dann lassen sich alle restlichen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Sind Winkel gesucht, so kann man Seitenverhältnisse wie z. B. $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ oder den Winkelsummensatz verwenden.
Sind Seiten gesucht, dann sind der Satz des Pythagoras oder ein umgeformtes Seitenverhältnis wie z. B. $a = b \cdot \tan(\alpha)$ nützlich.

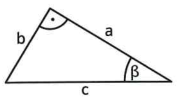


Winkel gesucht

- $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$, …
- $\gamma = 90°$, $\alpha + \beta = 90°$

Seite gesucht

- $a^2 + b^2 = c^2$
- $\frac{a}{b} = \tan(\alpha)$, $\frac{a}{c} = \sin(\alpha)$, …



Genauer geht's mit dem Speicher!

```
3.8/7.3
               .5205
cos⁻¹(Ans)
             58.6310
Ans→A
             58.6310
```

```
3.8/7.3
               .5205
sin⁻¹(Ans)
             31.3690
7.3*sin(58.6310)
              6.2330
```

Beispiel 1 Hypotenuse und eine Kathete gegeben
Im Dreieck ABC ist $\gamma = 90°$, $c = 7{,}3\,\text{cm}$ und $b = 3{,}8\,\text{cm}$. Berechne β und a. Rechne dabei zunächst nur mit Seitenverhältnissen.
Gib einen zweiten Lösungsweg an, bei dem du auch andere bekannte Sätze verwendest.
Lösung:

1. Möglichkeit (nur mit Seitenverhältnissen):
α berechnen aus $\cos(\alpha) = \frac{3{,}8}{7{,}3}$, $\alpha \approx 58{,}6°$.
β berechnen aus $\sin(\beta) = \frac{3{,}8}{7{,}3}$, $\beta \approx 31{,}4°$.
a berechnen aus $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $a = c \cdot \sin(\alpha)$
$a \approx 7{,}3\,\text{cm} \cdot \sin(58{,}6°) \approx 6{,}2\,\text{cm}$.

2. Möglichkeit:
α berechnen aus $\cos(\alpha) = \frac{3{,}8}{7{,}3}$, $\alpha \approx 58{,}6°$.
β berechnen mit dem Winkelsummensatz:
$\beta \approx 180° - (90° + 58{,}6°) = 31{,}4°$.
a berechnen nach dem Satz des Pythagoras:
$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{7{,}3^2 - 3{,}8^2}\,\text{cm} \approx 6{,}2\,\text{cm}$.

Beispiel 2
Von einem Dach kennt man die Maße (vgl. Fig. 1).
a) Wie lang ist der Träger? Wie weit ist sein Fußpunkt vom Eckpunkt B entfernt? Fertige eine Skizze an, führe geeignete Bezeichnungen ein und rechne anschließend.
b) Wie lang ist der andere Dachsparren?

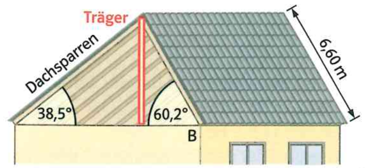
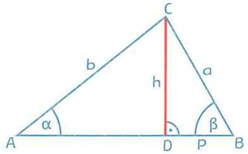


Fig. 1

Lösung:
a) Länge des Trägers:
Im Dreieck DBC ist $\sin(\beta) = \frac{h}{a}$, also ist
$h = a \cdot \sin(\beta) = 6{,}60\,\text{m} \cdot \sin(60{,}2°) \approx 5{,}73\,\text{m}$.
Entfernung Fußpunkt D - Eckpunkt B:
$h^2 + p^2 = a^2$, also $p = \sqrt{a^2 - h^2}$
$\approx \sqrt{6{,}60^2 - 5{,}73^2}\,\text{m} \approx 3{,}28\,\text{m}$.



b) Länge des zweiten Dachsparrens b: Im Dreieck ADC ist $\sin(\alpha) = \frac{h}{b}$,
also $b = \frac{h}{\sin(\alpha)} \approx \frac{5{,}73\,\text{m}}{\sin(38{,}5°)} \approx 9{,}20\,\text{m}$.

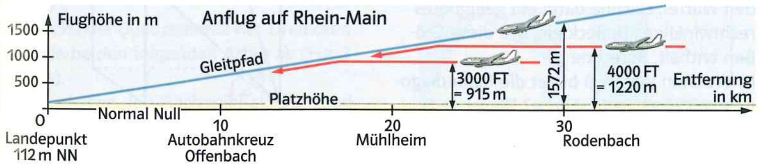
Warum gilt hier nicht $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$?

Aufgaben

1 Berechne die fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks ABC mit $\gamma = 90°$. Beschreibe anschließend in Worten einen alternativen Rechenweg.
a) $a = 6{,}2\,\text{cm}$, $b = 2{,}5\,\text{cm}$ b) $a = 6{,}2\,\text{m}$, $\beta = 38°$ c) $a = 6{,}2\,\text{m}$, $\alpha = 41°$

2 a) Wie hoch ist eine Tanne, wenn ihr Schatten 27,5 m lang ist und die Sonnenstrahlen unter dem Winkel 38,5° einfallen?
b) Otto Lilienthal (1840–1896) flog mit seinem „Drachenflieger" aus ca. 25 m Höhe unter einem Gleitwinkel von 8°. Wie lang war seine Gleitstrecke?

3 Der Gleitpfad des Instrumenten-Lande-Systems führt die Flugzeuge automatisch zur Landebahn.



a) Gib die Steigung des Gleitpfads in Grad und Prozent an.
b) Wie viele Kilometer gleitet ein Flugzeug auf dem Gleitpfad, das in 3000 Fuß Höhe auf die Bahn einschwenkt (1 Fuß = 30,5 cm)?
c) Welche Höhe hat ein Flugzeug auf dem Gleitpfad, das 25 km vom Flughafen entfernt ist?

4 Berechne im gleichschenkligen Dreieck ABC mit Basis $\overline{AB}$ die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt. Skizziere zunächst das Dreieck ABC und berechne zuerst die Höhe.
a) $b = 58{,}6\,\text{m}$, $\alpha = 62°$ b) $a = 45{,}2\,\text{cm}$, $\gamma = 98°$ c) $a = 65{,}4\,\text{m}$, $c = 547\,\text{dm}$

Bist du sicher?

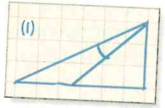
1 Ein symmetrischer Dachgiebel ist 8,4 m breit und 5,4 m hoch. Berechne die Dachneigung.

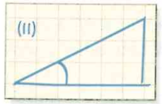
2 Ein Parallelogramm hat die Seitenlängen 12,0 m und 7,2 m. Die Seiten schließen einen Winkel von 30° ein.
a) Berechne die Höhe.
b) Wie groß ist der Flächeninhalt? Wie verändert sich der Flächeninhalt, wenn eine Seite verdoppelt wird?

5 Der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks ist 6 cm^2. Die Basis und die Höhe ist ganzzahlig (in cm). Wie viele Dreiecke gibt es? Wie groß ist der kleinste bzw. größte Basiswinkel?

6 **Rund um den Turm**

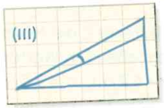
Ein Turm ist 28,6 m hoch und 6,0 m vom Ufer eines Flusses entfernt. Vom Turm aus erscheint die Flussbreite unter dem Sehwinkel von 17°. Wie breit ist der Fluss? **C**





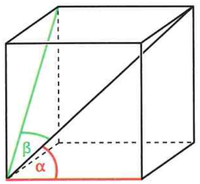
Eine Turmspitze erscheint von einer Stelle aus, die in horizontaler Richtung 141 m vom Fuß des Turms entfernt ist, unter einem Erhebungswinkel von 48,5°. Berechne die Turmhöhe (Augenhöhe 1,5 m). **A**

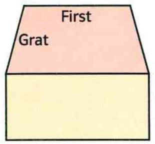
Auf einem 15,0 m hohen Turm ist ein Fahnenmast befestigt. Ein Beobachter ist 12,0 m vom Turm entfernt. Ihm erscheinen die beiden Enden des Mastes unter einem Sehwinkel von 6,5°. Seine Augenhöhe beträt 1,6 m. Wie lang ist der Fahnenmast? **B**

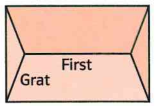


a) Ordne jeder Aufgabe eine Skizze zu. Besprich dich mit deinem Partner. Bearbeitet eine Aufgabe gemeinsam.
b) Jeder berechnet nun eine weitere Aufgabe. Erklärt euch gegenseitig den Lösungsweg.

7 Ein Würfel hat die Kantenlänge 6 cm.
a) Die Raumdiagonale schließt mit jeder Kante denselben Winkel α ein. Skizziere den Würfel. Zeichne darin ein geeignetes rechtwinkliges Dreieck ein, das diese Größen enthält. Berechne α.
b) Welchen Winkel β bildet die Raumdiagonale mit einer Seitenfläche? Berechne β.







8 Ein Turmdach hat die Form einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide. Die Grundkante ist 4,28 m lang und die Höhe beträgt 6,45 m. Skizziere die Pyramide.
a) Nun soll die Länge einer Seitenkante bestimmt werden. Zeichne ein geeignetes rechtwinkliges Dreieck ein und rechne anschließend.
b) Man unterscheidet zwischen dem Winkel, den eine Seitenkante der Pyramide mit der Grundfläche einschließt, und dem Winkel, den die Höhe einer Seitenfläche mit der Grundfläche bildet. Markiere beide Winkel in der Skizze und berechne sie. Welcher der beiden Winkel bezeichnet die Dachneigung?

9 Ein Walmdach ist 12,4 m lang und 8,3 m breit. Die viereckigen Dachflächen sind unter 35°, die dreieckigen unter 50° geneigt. Bestimme die Höhe des Daches und die Firstlänge.

1 **Rechtwinklig oder nicht – das ist die Frage!**
Schneide aus gelbem kariertem Papier Quadrate unterschiedlicher Größe und notiere darauf jeweils die Anzahl der Kästchen, aus denen sie bestehen. Erstelle aus blauem kariertem Papier zwei weitere Sätze solcher Quadrate.
a) Lege aus einem gelben und zwei blauen Quadraten Dreiecke wie in Fig. 1.
b) Lege möglichst viele Dreiecke und fülle die Tabelle aus.

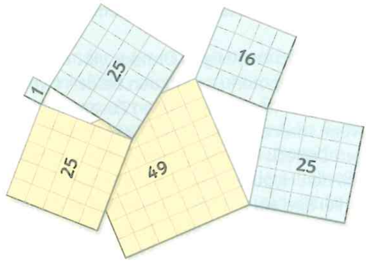
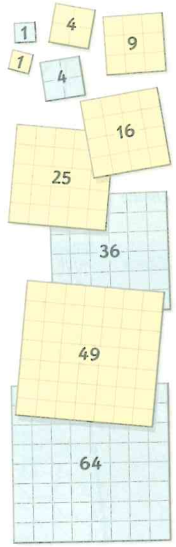


Fig. 1



1. blaues Quadrat a^2	2. blaues Quadrat b^2	Gesamt $a^2 + b^2$	Gelbes Quadrat c^2	Art des Dreiecks
1	25	26	25	spitzwinklig
16	25	41	49	stumpfwinklig
...	...			

Was stellst du fest? Formuliere dein Ergebnis in Worten.

2 In einem Dreieck ist die erste Seite 18 cm lang und die zweite Seite ist 24 cm. Finde eine passende dritte Seite, sodass ein rechtwinkliges, spitzwinkliges bzw. stumpfwinkliges Dreieck entsteht.

3 **Ein Satz – viele Beweise**
Ein Beweis zum Legen:
a) Schneide aus Papier acht kongruente rechtwinklige Dreiecke aus. Beschrifte die Seiten mit a, b und c. Stelle zwei Quadrate her mit jeweils der Seitenlänge a + b (Fig. 2).
b) Decke die Quadrate mit vier Dreiecken auf die beiden folgenden Arten ab (Fig. 3 und 4).
c) Vergleiche den Flächeninhalt der Quadrate in beiden Figuren. Drücke sie durch Terme aus. Erkläre, weshalb damit der Satz des Pythagoras bewiesen werden kann.

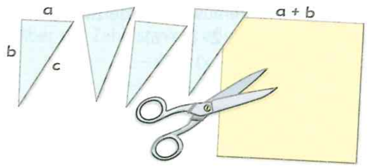


Fig. 2

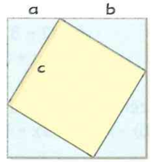


Fig. 3

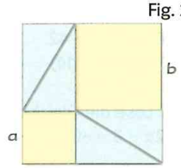


Fig. 4

4 **Wie ein Präsident beweist**
James Abram Garfield (1831–1881) war der 20. Präsident der Vereinigten Staaten von Amerika. Während seiner Zeit als Kongressabgeordneter entdeckte er einen Beweis des Satzes von Pythagoras. Dabei werden zwei kongruente Dreiecke wie in Fig. 5 aneinander gelegt.
a) Begründe, dass $\gamma = 90°$ ist.
b) Das Viereck ABCD ist ein Trapez. Gib seinen Flächeninhalt auf zwei verschiedene Arten an. Gelingt es dir, damit die bekannte Pythagorasgleichung herzuleiten?

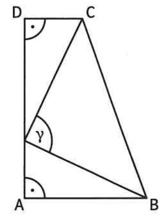


Fig. 5

Bist du sicher?

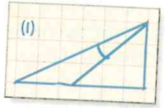
1 Ein symmetrischer Dachgiebel ist 8,4 m breit und 5,4 m hoch. Berechne die Dachneigung.

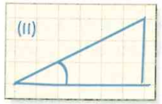
2 Ein Parallelogramm hat die Seitenlängen 12,0 m und 7,2 m. Die Seiten schließen einen Winkel von 30° ein.
a) Berechne die Höhe.
b) Wie groß ist der Flächeninhalt? Wie verändert sich der Flächeninhalt, wenn eine Seite verdoppelt wird?

5 Der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks ist 6 cm^2. Die Basis und die Höhe ist ganzzahlig (in cm). Wie viele Dreiecke gibt es? Wie groß ist der kleinste bzw. größte Basiswinkel?

6 **Rund um den Turm**

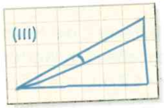
Ein Turm ist 28,6 m hoch und 6,0 m vom Ufer eines Flusses entfernt. Vom Turm aus erscheint die Flussbreite unter dem Sehwinkel von 17°. Wie breit ist der Fluss? **C**





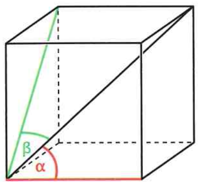
Eine Turmspitze erscheint von einer Stelle aus, die in horizontaler Richtung 141 m vom Fuß des Turms entfernt ist, unter einem Erhebungswinkel von 48,5°. Berechne die Turmhöhe (Augenhöhe 1,5 m). **A**

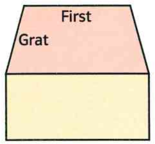
Auf einem 15,0 m hohen Turm ist ein Fahnenmast befestigt. Ein Beobachter ist 12,0 m vom Turm entfernt. Ihm erscheinen die beiden Enden des Mastes unter einem Sehwinkel von 6,5°. Seine Augenhöhe beträt 1,6 m. Wie lang ist der Fahnenmast? **B**

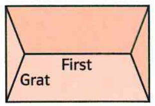


a) Ordne jeder Aufgabe eine Skizze zu. Besprich dich mit deinem Partner. Bearbeitet eine Aufgabe gemeinsam.
b) Jeder berechnet nun eine weitere Aufgabe. Erklärt euch gegenseitig den Lösungsweg.

7 Ein Würfel hat die Kantenlänge 6 cm.
a) Die Raumdiagonale schließt mit jeder Kante denselben Winkel α ein. Skizziere den Würfel. Zeichne darin ein geeignetes rechtwinkliges Dreieck ein, das diese Größen enthält. Berechne α.
b) Welchen Winkel β bildet die Raumdiagonale mit einer Seitenfläche? Berechne β.







8 Ein Turmdach hat die Form einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide. Die Grundkante ist 4,28 m lang und die Höhe beträgt 6,45 m. Skizziere die Pyramide.
a) Nun soll die Länge einer Seitenkante bestimmt werden. Zeichne ein geeignetes rechtwinkliges Dreieck ein und rechne anschließend.
b) Man unterscheidet zwischen dem Winkel, den eine Seitenkante der Pyramide mit der Grundfläche einschließt, und dem Winkel, den die Höhe einer Seitenfläche mit der Grundfläche bildet. Markiere beide Winkel in der Skizze und berechne sie. Welcher der beiden Winkel bezeichnet die Dachneigung?

9 Ein Walmdach ist 12,4 m lang und 8,3 m breit. Die viereckigen Dachflächen sind unter 35°, die dreieckigen unter 50° geneigt. Bestimme die Höhe des Daches und die Firstlänge.

1 **Rechtwinklig oder nicht – das ist die Frage!**
Schneide aus gelbem kariertem Papier Quadrate unterschiedlicher Größe und notiere darauf jeweils die Anzahl der Kästchen, aus denen sie bestehen. Erstelle aus blauem kariertem Papier zwei weitere Sätze solcher Quadrate.
a) Lege aus einem gelben und zwei blauen Quadraten Dreiecke wie in Fig. 1.
b) Lege möglichst viele Dreiecke und fülle die Tabelle aus.

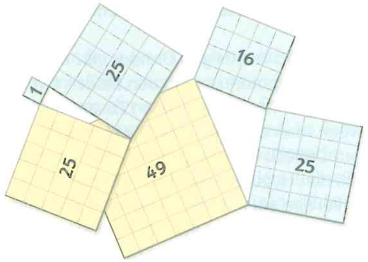
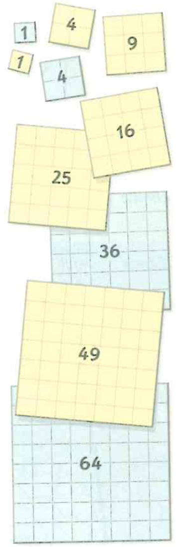


Fig. 1



1. blaues Quadrat a^2	2. blaues Quadrat b^2	Gesamt $a^2 + b^2$	Gelbes Quadrat c^2	Art des Dreiecks
1	25	26	25	spitzwinklig
16	25	41	49	stumpfwinklig
...	...			

Was stellst du fest? Formuliere dein Ergebnis in Worten.

2 In einem Dreieck ist die erste Seite 18 cm lang und die zweite Seite ist 24 cm. Finde eine passende dritte Seite, sodass ein rechtwinkliges, spitzwinkliges bzw. stumpfwinkliges Dreieck entsteht.

3 **Ein Satz – viele Beweise**
Ein Beweis zum Legen:
a) Schneide aus Papier acht kongruente rechtwinklige Dreiecke aus. Beschrifte die Seiten mit a, b und c. Stelle zwei Quadrate her mit jeweils der Seitenlänge a + b (Fig. 2).
b) Decke die Quadrate mit vier Dreiecken auf die beiden folgenden Arten ab (Fig. 3 und 4).
c) Vergleiche den Flächeninhalt der Quadrate in beiden Figuren. Drücke sie durch Terme aus. Erkläre, weshalb damit der Satz des Pythagoras bewiesen werden kann.

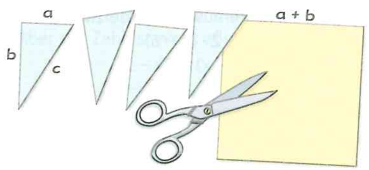


Fig. 2

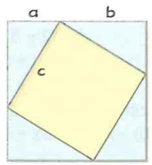


Fig. 3

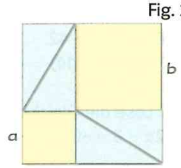


Fig. 4

4 **Wie ein Präsident beweist**
James Abram Garfield (1831–1881) war der 20. Präsident der Vereinigten Staaten von Amerika. Während seiner Zeit als Kongressabgeordneter entdeckte er einen Beweis des Satzes von Pythagoras. Dabei werden zwei kongruente Dreiecke wie in Fig. 5 aneinander gelegt.
a) Begründe, dass $\gamma = 90°$ ist.
b) Das Viereck ABCD ist ein Trapez. Gib seinen Flächeninhalt auf zwei verschiedene Arten an. Gelingt es dir, damit die bekannte Pythagorasgleichung herzuleiten?

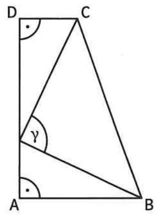


Fig. 5

Ein weiterer Zusammenhang am rechtwinkligen Dreieck

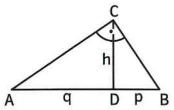


Fig. 1

p, q: Hypotenusenabschnitte

5 Im rechtwinkligen Dreieck gibt es auch einen Zusammenhang zwischen der Höhe h auf der Hypotenuse und den beiden Hypotenusenabschnitten p und q (vgl. Fig. 1).
Er lautet: $h^2 = p \cdot q$. Diesen Zusammenhang nennt man **Höhensatz**.
Wenn man die Terme als Flächeninhalte interpretiert, so lautet er: In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.
a) Fertige eine Skizze an, die den Höhensatz veranschaulicht.
b) Formuliere den Satz des Pythagoras für das Dreieck ADC und den Kathetensatz (vgl. Seite 39) für das Dreieck ABC mit dem Hypotenusenabschnitt q. Leite damit den Höhensatz her.

6 Im Dreieck ABC ist $\gamma = 90°$ (vgl. Fig. 1).
a) Berechne die Höhe h und die fehlenden Winkel, wenn $p = 4{,}3\,\text{cm}$ und $q = 6{,}8\,\text{cm}$ ist.
b) Berechne c und α, wenn $q = 6{,}5\,\text{cm}$ und $h = 4{,}5\,\text{cm}$ ist.
c) Berechne alle Seiten und Winkel, wenn $h = 4{,}5\,\text{cm}$ und $p = 2{,}7\,\text{cm}$ ist.

7 Die Zugspitzbahn ist die längste Seilbahn in Deutschland. Sie führt von der Talstation am Eibsee auf den Gipfel der Zugspitze.
Berechne die Mindestlänge des Seils und die durchschnittliche Neigung des Seils. Entnimm dazu der Karte in Fig. 2 alle nötigen Angaben (Maßstab 1:50 000).

Fig. 2

Maßstab 1:50 000

Kannst du das noch?

8 Multipliziere aus und fasse zusammen.
a) $(5 - x) \cdot (-3) + 2 \cdot (x - 6)$
b) $(2 + x) \cdot (3 + x) + 2x^2$
c) $x + (2x - 5)(1 - x) + 2x - x^2$
d) $(2 - 3b)(a + 3b) - (a^2 + 9b)$

9 Klammere aus.
a) $15x + 20x^2$
b) $-24b^2 + 40b^3$
c) $27x - 30x^2 - 9x^3$
d) $-3a + 33a^2$

10 Überprüfe rechnerisch, ob die Terme äquivalent sind.
a) $6 \cdot (x + 7) - 42$ und $3x + 3(x + 14)$
b) $42 - 3 \cdot (m + 1) - 7m$ und $4m + 2(3m - 21) + 3$
c) $d \cdot 9{,}2 + 3 - 3{,}2d - 9$ und $2 + 8 \cdot d - 8 + 3 \cdot d - 5d$

11 Löse die Gleichung zeichnerisch und rechnerisch.
a) $2x - 3 = -0{,}25x$
b) $-x + 3 = 3x - 5$
c) $x^2 - x - 6 = 0$
d) $x^2 + 2 = 3x + 6$

12 Zeichne die Graphen der Funktionen und vergleiche sie. Gib charakteristische Eigenschaften an.
a) $y = -2x$, $y = -2x + 1$, $y = \frac{1}{2}x + 1$
b) $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}x - x^2$, $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$
c) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = -\frac{1}{2}x^3$, $y = \frac{1}{2}x^4$

13 Gegeben sind die Punkte $A(-2|4)$, $B(-1|\frac{1}{4})$, $C(0|\frac{3}{2})$, $D(1|\frac{1}{4})$.
Überprüfe rechnerisch, ob sie auf dem Graphen liegen mit
a) $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$,
b) $y = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}$,
c) $y = \frac{1}{4}x^4$.

Alles ist Zahl

Felicitas Hoppe

Jedes Mal, wenn ich ein Dreieck sehe, das einen rechten Winkel hat, muss ich an Pythagoras denken. Auch mir kommen Dreiecke einfach vor, eine klare und leicht zu begreifende Form. Nur der Mann, der hinter der Sache steckt, wird mir für immer ein Rätsel bleiben, das man mithilfe von Formeln nicht löst. Jedenfalls nicht nach dem ABC im Quadrat. Statt dessen liest man verrückte Geschichten und stößt auf lauter offene Fragen: Hatte Pythagoras, wie die Legende berichtet, wirklich einen goldenen Schenkel? Und wenn ja, wem hat er den Schenkel gezeigt, wer hat den Schenkel wirklich gesehen? War es der linke oder der rechte? Wenn ich einen goldenen Schenkel hätte, dann würde ich ihn für mich behalten.

Aber ich bin nicht Pythagoras. Ich habe keinen goldenen Schenkel. Ich bin noch nicht tot und schon gar nicht berühmt, und mein Wissen hält sich ziemlich in Grenzen. Dafür wusste Pythagoras **alles**. Über die Menschen und über die Zahlen, über das Dreieck und über Musik. Und über die Tiere, mit denen er übrigens sprechen konnte, weil er sich vollkommen sicher war, dass Tiere, wie wir, eine Seele haben und alles verstehen, sobald jemand ernsthaft mit ihnen spricht. Wie zum Beispiel die wilde griechische Bärin, die Pythagoras auf die Seite nimmt, die er streichelt und mit Waldbeeren füttert, bis sie zahm und friedlich im Wald verschwindet.

Ein Wunder oder ein Zirkustrick? Kein Wunder, kein Trick, sondern nur die Geschichte von einem, der weiß, dass es im Leben nützlich ist, wenn man verschiedene Sprachen spricht. Also nicht nur die Sprache der Zahlen und Formeln, sondern nebenbei auch die Sprache der Bären. Und die Sprache der Menschen, die Fische fangen und nicht daran denken, dass ein Fisch lieber schwimmt als gefangen und dann gegessen zu werden.

Weshalb Pythagoras eine Wette abschließt: Wenn ich euch in ganzen Zahlen sagte, auf die Zahl genau, wie viele Fische ihr fangt, versprecht ihr mir dann, sie frei zu lassen? Was die Fischer aus Neugier sofort versprechen. Und als die den Fang schließlich ausgezählt haben, stellen sie plötzlich erschrocken fest, dass der Fang mit der Wettzahl zur Deckung kommt. Und werfen, weil sie verloren haben, die zappelnden Fische zurück ins Meer. Wo sie bis heute unzählbar schwimmen. Denn alles ist Zahl. Aber die Zahl ist nicht alles!

Jetzt geht's rund

Auf dem kreisförmigen Radarschirm eines Schiffs werden Objekte, die sich im Erfassungsbereich der Radaranlage befinden, als leuchtende Punkte angezeigt. Im Mittelpunkt des Schirms ist immer das Schiff selbst. Nähert sich ein leuchtender Punkt dem Mittelpunkt des Schirms, so kann das bedeuten, dass ein anderes Schiff auf Kollisionskurs fährt. In diesem Augenblick muss man wissen, wie weit die beiden Schiffe noch voneinander entfernt sind und aus welcher Richtung das Schiff, das beobachtet wird, anfährt.

Zur Darstellung dieser Informationen ist ein Koordinatensystem geeignet, in dem man die Lage eines Punktes durch die Entfernung von einem ausgezeichneten Punkt (dem Pol) und einem Winkel zu einer Bezugsrichtung (der Achse) beschrieben wird. Es heißt **Polarkoordinatensystem**. Ein Punkt P hat die **Polarkoordinaten** $P(r\,|\,\varphi)$ mit $0° \leqq \varphi < 360°$ (Fig. 1). Dabei ist r die Entfernung des Punktes P vom Pol O und φ der Winkel zwischen der Achse und der Halbgeraden OP.

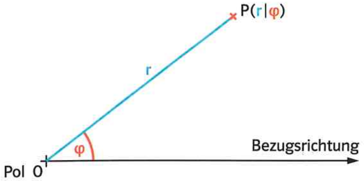


Fig. 1

Zu Beginn der Beobachtung erfasst das Beobachterschiff zwei Versorgungsschiffe und ein Sicherungsschiff. Eines der Versorgungsschiffe befindet sich am Punkt P. Seine Position kann beschrieben werden durch $P(3\,|\,60°)$. Das bedeutet, dass es 3 Längeneinheiten vom Beobachterschiff entfernt ist und mit der Bezugsrichtung einen Winkel von 60° einschließt. Das andere Versorgungsschiff befindet sich am Punkt $Q(2\,|\,150°)$ und das Sicherungsschiff in $R(2{,}5\,|\,240°)$.

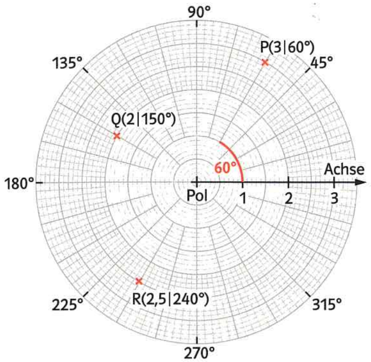


Fig. 2

Auf dem Radarschirm ist es möglich, den Wegeverlauf der beobachteten Schiffe als leuchtende Punkte zu speichern. Nun wird beobachtet, dass sich das erste Versorgungsschiff von P aus geradlinig auf das Beobachterschiff zubewegt. Alle Punkte des Weges haben die Form $P(x\,|\,60°)$. Zur Beschreibung des Weges genügt also die Angabe $\varphi = 60°$.
Das zweite Versorgungsschiff bewegt sich geradlinig von Q aus auf 0 zu. Sein Weg kann beschrieben werden durch $\varphi = 150°$.
Das Sicherungsschiff umfährt das Beobachterschiff von R aus immer im gleichen Abstand. Es bewegt sich also entlang einer Kreislinie. Alle Punkte der Kreislinie haben die Form $R(2{,}5\,|\,\varphi)$. Sein Weg kann daher beschrieben werden durch die Gleichung $r = 2{,}5$.

1 Welche Koordinaten hat der Punkt $P(3\,|\,60°)$ in einem rechwinkligen Koordinatensystem?

2 Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die Punkte P und 0 in einem rechtwinkligen Koordinatensystem?

3 Zeichne in einem rechtwinkligen Koordinatensystem einen Kreis mit Radius 2,5 cm und Mittelpunkt $O(0\,|\,0)$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinaten eines Kreispunktes und dem Radius?

Ein weiteres Schiff umfährt das Beobachterschiff auf einer spiralförmigen Bahn. Seinen Weg kann man ebenfalls mithilfe von Abständen und Winkeln beschreiben. Dazu braucht man nun auch Winkel, die größer als 360° sind.
Die Beobachtung beginnt, wenn sich das Schiff im Punkt A befindet. Aus Fig. 1 entnimmt man $\overline{OA} = r = 1\,\text{cm}$ und $\varphi = 0°$, $\overline{OB} = 1{,}3\,\text{cm}$ und $\varphi = 60°$.
Ergänze die Tabelle entsprechend.

Punkt	A	B	C	D	E	F
φ	0°	60°	120°	180°	240°	300°
r in cm	1	1,3				

Punkt	G	H	I	K	L	M	N
φ	360°	420°	480°	540°	600°	660°	720°
r in cm							

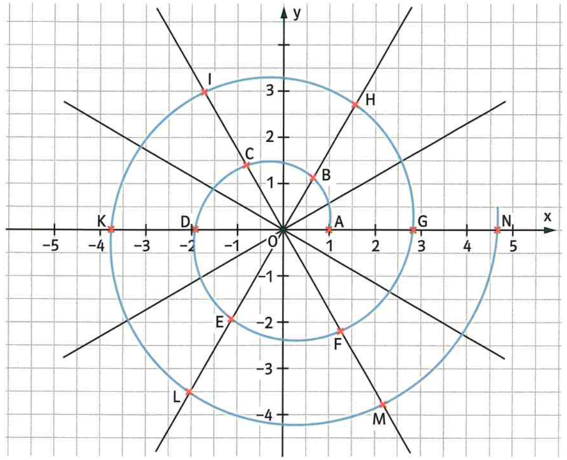
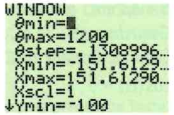
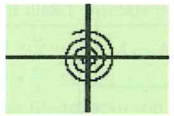


Fig. 1

4 Was kann man über den Abstand zwischen den Punkten A und G, B und H bzw. C und I sagen? Bestätige, dass in der Tabelle der Zusammenhang $r = 0{,}005 \cdot \varphi + 1$ gilt, wenn man für r und φ die Maßzahlen einsetzt.

Spiralen kann man mit dem GTR zeichnen, wenn man den Polarmodus wählt.

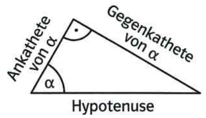




5 Zeichne weitere Spiralen mit $r = 0{,}004 \cdot \varphi^2$ bzw. $r = 0{,}04 \cdot \sqrt{\varphi}$ mithilfe des GTR und vergleiche sie.

Rückblick

In einem rechtwinkligen Dreieck mit Winkel α bezeichnet man die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, als **Hypotenuse** und die beiden anderen Seiten als **Katheten**. Insbesondere heißt die Kathete, die dem Winkel α gegenüberliegt, **Gegenkathete** von α, die andere **Ankathete** von α.



Satz des Pythagoras
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c, dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$.
Umkehrung:
Wenn in einem Dreieck für die Seitenlängen $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

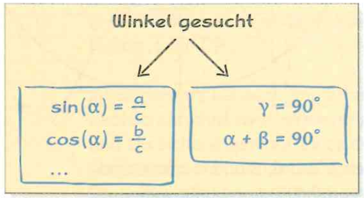
Sinus, Kosinus und Tangens
In allen rechtwinkligen Dreiecken mit Winkel α gilt

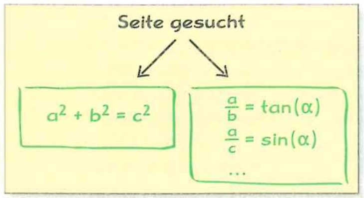
$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$$

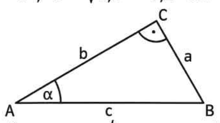
$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$$

Winkel und Seiten berechnen
Für ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$ gilt:





Seite gesucht
Gegeben: Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$,
$a = 5{,}2\,cm$, $c = 9{,}4\,cm$
Gesucht: b
Lösung: Dreieck ABC ist rechtwinklig, nach dem Satz des Pythagoras gilt:
$b = \sqrt{c^2 - a^2}$, $b = \sqrt{9{,}4^2 - 5{,}2^2}\,cm \approx 7{,}8\,cm$



$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$, $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$

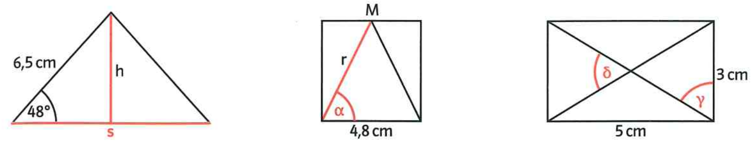
Winkel gesucht
Gegeben: Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$,
$a = 5{,}2\,cm$, $c = 9{,}4\,cm$
Gesucht: α, β
Lösung: Dreieck ABC ist rechtwinklig, es gilt:
$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{5{,}2}{9{,}4} \approx 0{,}5531$,
$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{5{,}2}{9{,}4}\right) \approx 33{,}6°$.
Nach dem Winkelsummensatz ist
$\beta \approx 90° - 33{,}6° = 56{,}4°$.

Seite und Winkel gesucht
Gegeben: Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$,
$b = 6{,}2\,cm$, $\alpha = 43°$
Gesucht: c, β
Lösung: Dreieck ABC ist rechtwinklig, es gilt:
$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$,
$c = \frac{b}{\cos(\alpha)} = \frac{6{,}2}{\cos(43°)}\,cm \approx 8{,}5\,cm$.
Nach dem Winkelsummensatz ist
$\beta = 90° - 43° = 47°$.

Training

Runde 1

1 Berechne die farbig markierten Größen.



Gleichschenkliges Dreieck — Quadrat — Rechteck

2 Die beiden parallelen Seiten des gleichschenkligen Trapezes in Fig. 1 sind 3,2 cm und 6,8 cm lang. Sie haben den Abstand 2,6 cm. Wie groß ist α? Wie lang sind die Schenkel?

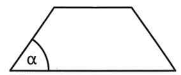


Fig. 1

3 Die Steigfähigkeit eines Autos wird in Prozent angegeben. In einer Autozeitschrift findet man: Steigfähigkeit: Mercedes G 500 80 %, Hummer H2 60 %.
a) Welchen Steigungswinkel kann ein Gelände jeweils haben, damit es von den Geländewagen gerade noch befahren werden kann? Kann man mit dem Hummer H2 auf einer Strecke von 30 m eine Höhendifferenz von 15 m überwinden?
b) Wie lang muss eine Strecke mindestens sein, damit man mit dem Mercedes G 500 eine Höhendifferenz von 50 m überwinden kann?
c) Nach weit verbreiteter Meinung entspricht eine Steigung von 100 % einer senkrechten Wand. Was sagst du dazu?

4 Die Grundfläche eines Kegels hat den Radius 25,6 cm. Der Kegel ist 50,9 cm hoch. Wie groß ist der Winkel α an der Spitze?

Runde 2

1 Berechne die fehlenden Größen des Dreiecks ABC.

α	β	γ	a	b	c
90°		23°		25,72 m	
37°	90°			37,5 km	
		90°	13,2 dm	36 cm	

2 Peter und Ina lassen auf einem ebenen Gelände einen Drachen steigen. Sie stehen 80 m voneinander entfernt. Die Drachenschnur ist 120 m lang. Ina steht direkt unter dem Drachen. Sie möchte wissen, wie hoch er ungefähr fliegt.
Fertige eine Skizze an und berechne.

3 a) Ein Drachenflieger startet am Tegelberg über Füssen. Nach einer Gleitstrecke von 8,2 km landet er im 1000 m tiefer liegenden Tal. Berechne seinen Gleitwinkel.
b) Wie lang ist seine Gleitstrecke, wenn er am Tegelberg startet und mit einem Gleitwinkel von 5° fliegt?

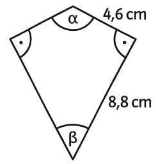


Fig. 2

4 Berechne die beiden fehlenden Winkel des Drachens in Fig. 2.

5 a) Welchen Flächeninhalt hat das Parallelogramm ABCD mit $\overline{AB} = 8\,cm$, $\overline{AD} = 10\,cm$ und $\sphericalangle BAD = 60°$? Skizziere das Parallelogramm und berechne.
b) Beschreibe in Worten, wie man die Diagonale $\overline{BD}$ berechnen kann.