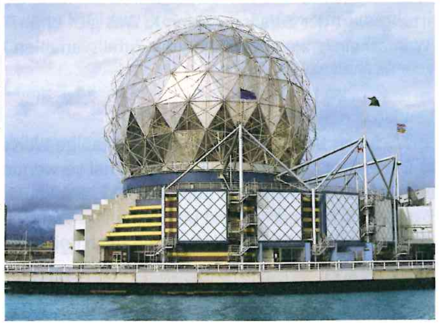
Das kannst du schon

- Umfang und Flächeninhalt bei Rechteck, Dreieck, Parallelogramm und Kreis berechnen
- Rauminhalt eines Quaders berechnen
- Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel erkennen, ihre Eigenschaften benennen

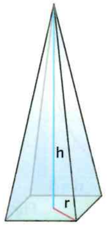


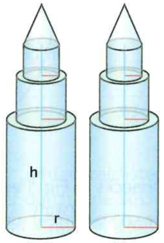
Zahl und Maß · Daten und Zufall · Beziehung und Änderung · Modell und Simulation · Muster und Struktur · Form und Raum

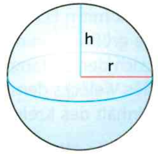
Schöne Formeln zu schönen Formen

Das entscheidende Kriterium ist Schönheit; für hässliche Mathematik ist auf dieser Welt kein beständiger Platz.

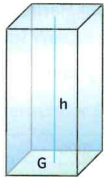
G. H. Hardy



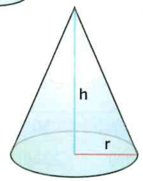




$V = \frac{4}{3}\pi r^3$



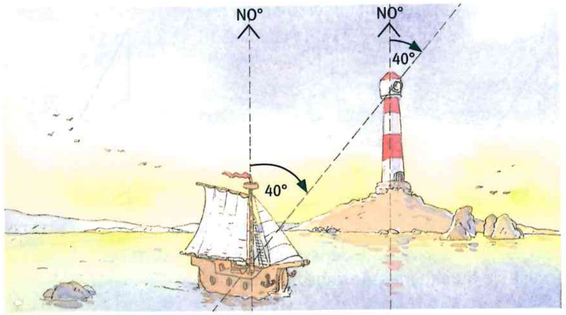
$V = G \cdot h$



Das kannst du bald

- Den Flächeninhalt von Kreisteilen berechnen
- Rauminhalt und Oberfläche von Körpern, wie Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel berechnen
- Formeln für den Rauminhalt und die Oberfläche von weiteren Körpern verstehen und anwenden
- Mit einer Formelsammlung umgehen

5 Winkel- und Längenberechnungen

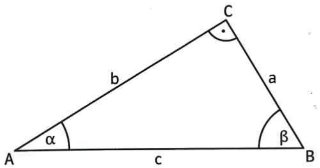


In der Schifffahrt wird die Fahrtrichtung Kurs genannt. Der Kurs wird in Grad und Minuten als Abweichung von der Nordrichtung im Uhrzeigersinn angegeben.

Ein Schiff fährt auf dem Kurs 90°. Der Kapitän nimmt die erste Peilung bei 40° vor. Wenn er die zweite Peilung geschickt macht, kann er bei bekannter Geschwindigkeit berechnen, wie weit er vom Leuchtturm entfernt ist.

Sind in einem rechtwinkligen Dreieck eine Seite und ein weiterer Winkel oder zwei Seiten bekannt, dann lassen sich alle restlichen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Sind Winkel gesucht, so kann man Seitenverhältnisse wie z. B. $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ oder den Winkelsummensatz verwenden.
Sind Seiten gesucht, dann sind der Satz des Pythagoras oder ein umgeformtes Seitenverhältnis wie z. B. $a = b \cdot \tan(\alpha)$ nützlich.

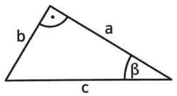


Winkel gesucht

- $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$, …
- $\gamma = 90°$, $\alpha + \beta = 90°$

Seite gesucht

- $a^2 + b^2 = c^2$
- $\frac{a}{b} = \tan(\alpha)$, $\frac{a}{c} = \sin(\alpha)$, …



Genauer geht's mit dem Speicher!

```
3.8/7.3
              .5205
cos⁻¹(Ans)
            58.6310
Ans→A
            58.6310
```

```
3.8/7.3
              .5205
sin⁻¹(Ans)
            31.3690
7.3*sin(58.6310)
             6.2330
```

Beispiel 1 Hypotenuse und eine Kathete gegeben
Im Dreieck ABC ist $\gamma = 90°$, $c = 7{,}3\,\text{cm}$ und $b = 3{,}8\,\text{cm}$. Berechne β und a. Rechne dabei zunächst nur mit Seitenverhältnissen.
Gib einen zweiten Lösungsweg an, bei dem du auch andere bekannte Sätze verwendest.
Lösung:

1. Möglichkeit (nur mit Seitenverhältnissen):
α berechnen aus $\cos(\alpha) = \frac{3{,}8}{7{,}3}$, $\alpha \approx 58{,}6°$.
β berechnen aus $\sin(\beta) = \frac{3{,}8}{7{,}3}$, $\beta \approx 31{,}4°$.
a berechnen aus $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$, $a = c \cdot \sin(\alpha)$
$a \approx 7{,}3\,\text{cm} \cdot \sin(58{,}6°) \approx 6{,}2\,\text{cm}$.

2. Möglichkeit:
α berechnen aus $\cos(\alpha) = \frac{3{,}8}{7{,}3}$, $\alpha \approx 58{,}6°$.
β berechnen mit dem Winkelsummensatz:
$\beta \approx 180° - (90° + 58{,}6°) = 31{,}4°$.
a berechnen nach dem Satz des Pythagoras:
$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{7{,}3^2 - 3{,}8^2}\,\text{cm} \approx 6{,}2\,\text{cm}$.

Beispiel 2
Von einem Dach kennt man die Maße (vgl. Fig. 1).
a) Wie lang ist der Träger? Wie weit ist sein Fußpunkt vom Eckpunkt B entfernt? Fertige eine Skizze an, führe geeignete Bezeichnungen ein und rechne anschließend.
b) Wie lang ist der andere Dachsparren?

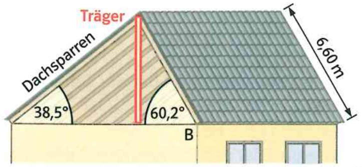
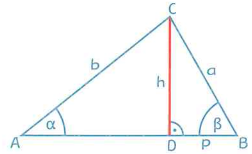


Fig. 1



Lösung:
a) Länge des Trägers:
Im Dreieck DBC ist $\sin(\beta) = \frac{h}{a}$, also ist
$h = a \cdot \sin(\beta) = 6{,}60\,\text{m} \cdot \sin(60{,}2°) \approx 5{,}73\,\text{m}$.
Entfernung Fußpunkt D – Eckpunkt B:
$h^2 + p^2 = a^2$, also $p = \sqrt{a^2 - h^2}$
$\approx \sqrt{6{,}60^2 - 5{,}73^2}\,\text{m} \approx 3{,}28\,\text{m}$.
b) Länge des zweiten Dachsparrens b: Im Dreieck ADC ist $\sin(\alpha) = \frac{h}{b}$,
also $b = \frac{h}{\sin(\alpha)} \approx \frac{5{,}73\,\text{m}}{\sin(38{,}5°)} \approx 9{,}20\,\text{m}$.

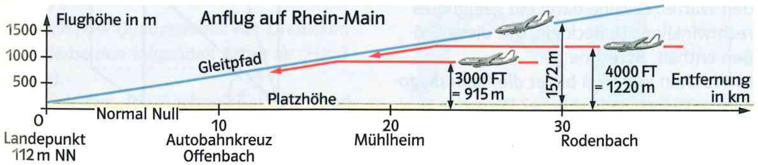
Warum gilt hier nicht $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$?

Aufgaben

1 Berechne die fehlenden Seiten und Winkel des Dreiecks ABC mit $\gamma = 90°$. Beschreibe anschließend in Worten einen alternativen Rechenweg.
a) $a = 6{,}2\,\text{cm}$, $b = 2{,}5\,\text{cm}$ b) $a = 6{,}2\,\text{m}$, $\beta = 38°$ c) $a = 6{,}2\,\text{m}$, $\alpha = 41°$

2 a) Wie hoch ist eine Tanne, wenn ihr Schatten 27,5 m lang ist und die Sonnenstrahlen unter dem Winkel 38,5° einfallen?
b) Otto Lilienthal (1840 – 1896) flog mit seinem „Drachenflieger" aus ca. 25 m Höhe unter einem Gleitwinkel von 8°. Wie lang war seine Gleitstrecke?

3 Der Gleitpfad des Instrumenten-Lande-Systems führt die Flugzeuge automatisch zur Landebahn.



a) Gib die Steigung des Gleitpfads in Grad und Prozent an.
b) Wie viele Kilometer gleitet ein Flugzeug auf dem Gleitpfad, das in 3000 Fuß Höhe auf die Bahn einschwenkt (1 Fuß = 30,5 cm)?
c) Welche Höhe hat ein Flugzeug auf dem Gleitpfad, das 25 km vom Flughafen entfernt ist?

4 Berechne im gleichschenkligen Dreieck ABC mit Basis $\overline{AB}$ die fehlenden Seiten und Winkel sowie den Flächeninhalt. Skizziere zunächst das Dreieck ABC und berechne zuerst die Höhe.
a) $b = 58{,}6\,\text{m}$, $\alpha = 62°$ b) $a = 45{,}2\,\text{cm}$, $\gamma = 98°$ c) $a = 65{,}4\,\text{m}$, $c = 547\,\text{dm}$

Bist du sicher?

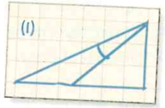
1 Ein symmetrischer Dachgiebel ist 8,4 m breit und 5,4 m hoch. Berechne die Dachneigung.

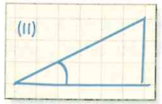
2 Ein Parallelogramm hat die Seitenlängen 12,0 m und 7,2 m. Die Seiten schließen einen Winkel von 30° ein.
a) Berechne die Höhe.
b) Wie groß ist der Flächeninhalt? Wie verändert sich der Flächeninhalt, wenn eine Seite verdoppelt wird?

5 Der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Dreiecks ist $6\,cm^2$. Die Basis und die Höhe ist ganzzahlig (in cm). Wie viele Dreiecke gibt es? Wie groß ist der kleinste bzw. größte Basiswinkel?

6 **Rund um den Turm**

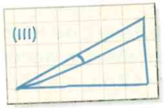
Ein Turm ist 28,6 m hoch und 6,0 m vom Ufer eines Flusses entfernt. Vom Turm aus erscheint die Flussbreite unter dem Sehwinkel von 17°. Wie breit ist der Fluss? **C**





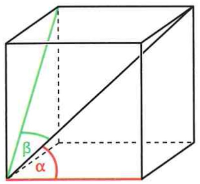
Eine Turmspitze erscheint von einer Stelle aus, die in horizontaler Richtung 141 m vom Fuß des Turms entfernt ist, unter einem Erhebungswinkel von 48,5°. Berechne die Turmhöhe (Augenhöhe 1,5 m). **A**

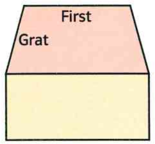
Auf einem 15,0 m hohen Turm ist ein Fahnenmast befestigt. Ein Beobachter ist 12,0 m vom Turm entfernt. Ihm erscheinen die beiden Enden des Mastes unter einem Sehwinkel von 6,5°. Seine Augenhöhe beträt 1,6 m. Wie lang ist der Fahnenmast? **B**

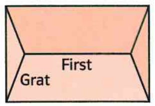


a) Ordne jeder Aufgabe eine Skizze zu. Besprich dich mit deinem Partner. Bearbeitet eine Aufgabe gemeinsam.
b) Jeder berechnet nun eine weitere Aufgabe. Erklärt euch gegenseitig den Lösungsweg.

7 Ein Würfel hat die Kantenlänge 6 cm.
a) Die Raumdiagonale schließt mit jeder Kante denselben Winkel α ein. Skizziere den Würfel. Zeichne darin ein geeignetes rechtwinkliges Dreieck ein, das diese Größen enthält. Berechne α.
b) Welchen Winkel β bildet die Raumdiagonale mit einer Seitenfläche? Berechne β.







8 Ein Turmdach hat die Form einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide. Die Grundkante ist 4,28 m lang und die Höhe beträgt 6,45 m. Skizziere die Pyramide.
a) Nun soll die Länge einer Seitenkante bestimmt werden. Zeichne ein geeignetes rechtwinkliges Dreieck ein und rechne anschließend.
b) Man unterscheidet zwischen dem Winkel, den eine Seitenkante der Pyramide mit der Grundfläche einschließt, und dem Winkel, den die Höhe einer Seitenfläche mit der Grundfläche bildet. Markiere beide Winkel in der Skizze und berechne sie. Welcher der beiden Winkel bezeichnet die Dachneigung?

9 Ein Walmdach ist 12,4 m lang und 8,3 m breit. Die viereckigen Dachflächen sind unter 35°, die dreieckigen unter 50° geneigt. Bestimme die Höhe des Daches und die Firstlänge.

1 **Rechtwinklig oder nicht – das ist die Frage!**
Schneide aus gelbem kariertem Papier Quadrate unterschiedlicher Größe und notiere darauf jeweils die Anzahl der Kästchen, aus denen sie bestehen. Erstelle aus blauem kariertem Papier zwei weitere Sätze solcher Quadrate.
a) Lege aus einem gelben und zwei blauen Quadraten Dreiecke wie in Fig. 1.
b) Lege möglichst viele Dreiecke und fülle die Tabelle aus.

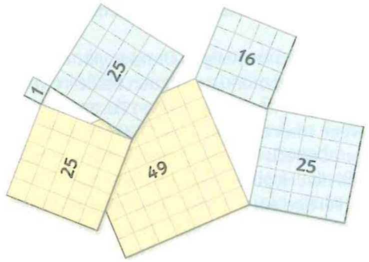
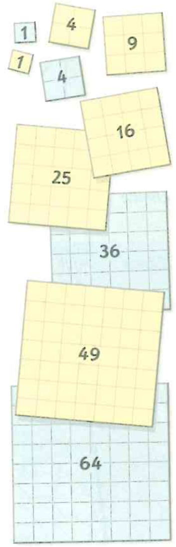


Fig. 1



1. blaues Quadrat a^2	2. blaues Quadrat b^2	Gesamt $a^2 + b^2$	Gelbes Quadrat c^2	Art des Dreiecks
1	25	26	25	spitzwinklig
16	25	41	49	stumpfwinklig
...	...			

Was stellst du fest? Formuliere dein Ergebnis in Worten.

2 In einem Dreieck ist die erste Seite 18 cm lang und die zweite Seite ist 24 cm. Finde eine passende dritte Seite, sodass ein rechtwinkliges, spitzwinkliges bzw. stumpfwinkliges Dreieck entsteht.

3 **Ein Satz – viele Beweise**
Ein Beweis zum Legen:
a) Schneide aus Papier acht kongruente rechtwinklige Dreiecke aus. Beschrifte die Seiten mit a, b und c. Stelle zwei Quadrate her mit jeweils der Seitenlänge a + b (Fig. 2).
b) Decke die Quadrate mit vier Dreiecken auf die beiden folgenden Arten ab (Fig. 3 und 4).
c) Vergleiche den Flächeninhalt der Quadrate in beiden Figuren. Drücke sie durch Terme aus. Erkläre, weshalb damit der Satz des Pythagoras bewiesen werden kann.

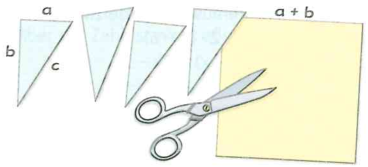


Fig. 2

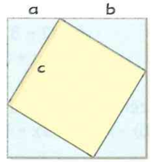


Fig. 3

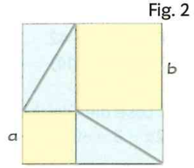


Fig. 4

4 **Wie ein Präsident beweist**
James Abram Garfield (1831–1881) war der 20. Präsident der Vereinigten Staaten von Amerika. Während seiner Zeit als Kongressabgeordneter entdeckte er einen Beweis des Satzes von Pythagoras. Dabei werden zwei kongruente Dreiecke wie in Fig. 5 aneinander gelegt.
a) Begründe, dass γ = 90° ist.
b) Das Viereck ABCD ist ein Trapez. Gib seinen Flächeninhalt auf zwei verschiedene Arten an. Gelingt es dir, damit die bekannte Pythagorasgleichung herzuleiten?

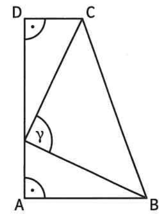


Fig. 5

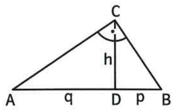


Fig. 1

p, q: Hypotenusenabschnitte

Ein weiterer Zusammenhang am rechtwinkligen Dreieck

5 Im rechtwinkligen Dreieck gibt es auch einen Zusammenhang zwischen der Höhe h auf der Hypotenuse und den beiden Hypotenusenabschnitten p und q (vgl. Fig. 1).
Er lautet: $h^2 = p \cdot q$. Diesen Zusammenhang nennt man **Höhensatz**.
Wenn man die Terme als Flächeninhalte interpretiert, so lautet er: In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den Hypotenusenabschnitten.
a) Fertige eine Skizze an, die den Höhensatz veranschaulicht.
b) Formuliere den Satz des Pythagoras für das Dreieck ADC und den Kathetensatz (vgl. Seite 39) für das Dreieck ABC mit dem Hypotenusenabschnitt q. Leite damit den Höhensatz her.

6 Im Dreieck ABC ist $\gamma = 90°$ (vgl. Fig. 1).
a) Berechne die Höhe h und die fehlenden Winkel, wenn $p = 4{,}3\,\text{cm}$ und $q = 6{,}8\,\text{cm}$ ist.
b) Berechne c und α, wenn $q = 6{,}5\,\text{cm}$ und $h = 4{,}5\,\text{cm}$ ist.
c) Berechne alle Seiten und Winkel, wenn $h = 4{,}5\,\text{cm}$ und $p = 2{,}7\,\text{cm}$ ist.

7 Die Zugspitzbahn ist die längste Seilbahn in Deutschland. Sie führt von der Talstation am Eibsee auf den Gipfel der Zugspitze.
Berechne die Mindestlänge des Seils und die durchschnittliche Neigung des Seils. Entnimm dazu der Karte in Fig. 2 alle nötigen Angaben (Maßstab 1:50 000).

Fig. 2

Maßstab 1:50 000

Kannst du das noch?

8 Multipliziere aus und fasse zusammen.
a) $(5 - x) \cdot (-3) + 2 \cdot (x - 6)$
b) $(2 + x) \cdot (3 + x) + 2x^2$
c) $x + (2x - 5)(1 - x) + 2x - x^2$
d) $(2 - 3b)(a + 3b) - (a^2 + 9b)$

9 Klammere aus.
a) $15x + 20x^2$
b) $-24b^2 + 40b^3$
c) $27x - 30x^2 - 9x^3$
d) $-3a + 33a^2$

10 Überprüfe rechnerisch, ob die Terme äquivalent sind.
a) $6 \cdot (x + 7) - 42$ / $3x + 3(x + 14)$
b) $42 - 3 \cdot (m + 1) - 7m$ / $4m + 2(3m - 21) + 3$
c) $d \cdot 9{,}2 + 3 - 3{,}2d - 9$ / $2 + 8 \cdot d - 8 + 3 \cdot d - 5d$

11 Löse die Gleichung zeichnerisch und rechnerisch.
a) $2x - 3 = -0{,}25x$
b) $-x + 3 = 3x - 5$
c) $x^2 - x - 6 = 0$
d) $x^2 + 2 = 3x + 6$

12 Zeichne die Graphen der Funktionen und vergleiche sie. Gib charakteristische Eigenschaften an.
a) $y = -2x$, $y = -2x + 1$, $y = \frac{1}{2}x + 1$
b) $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{2}x - x^2$, $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2$
c) $y = \frac{1}{2}x^3$, $y = -\frac{1}{2}x^3$, $y = \frac{1}{2}x^4$

13 Gegeben sind die Punkte $A(-2|4)$, $B(-1|\frac{1}{4})$, $C(0|\frac{3}{2})$, $D(1|\frac{1}{4})$.
Überprüfe rechnerisch, ob sie auf dem Graphen liegen mit
a) $y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2}$,
b) $y = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{2}$,
c) $y = \frac{1}{4}x^4$.

Alles ist Zahl

Felicitas Hoppe

Jedes Mal, wenn ich ein Dreieck sehe, das einen rechten Winkel hat, muss ich an Pythagoras denken. Auch mir kommen Dreiecke einfach vor, eine klare und leicht zu begreifende Form. Nur der Mann, der hinter der Sache steckt, wird mir für immer ein Rätsel bleiben, das man mithilfe von Formeln nicht löst. Jedenfalls nicht nach dem ABC im Quadrat. Statt dessen liest man verrückte Geschichten und stößt auf lauter offene Fragen: Hatte Pythagoras, wie die Legende berichtet, wirklich einen goldenen Schenkel? Und wenn ja, wem hat er den Schenkel gezeigt, wer hat den Schenkel wirklich gesehen? War es der linke oder der rechte? Wenn ich einen goldenen Schenkel hätte, dann würde ich ihn für mich behalten.

Aber ich bin nicht Pythagoras. Ich habe keinen goldenen Schenkel. Ich bin noch nicht tot und schon gar nicht berühmt, und mein Wissen hält sich ziemlich in Grenzen. Dafür wusste Pythagoras **alles**. Über die Menschen und über die Zahlen, über das Dreieck und über Musik. Und über die Tiere, mit denen er übrigens sprechen konnte, weil er sich vollkommen sicher war, dass Tiere, wie wir, eine Seele haben und alles verstehen, sobald jemand ernsthaft mit ihnen spricht. Wie zum Beispiel die wilde griechische Bärin, die Pythagoras auf die Seite nimmt, die er streichelt und mit Waldbeeren füttert, bis sie zahm und friedlich im Wald verschwindet.

Ein Wunder oder ein Zirkustrick? Kein Wunder, kein Trick, sondern nur die Geschichte von einem, der weiß, dass es im Leben nützlich ist, wenn man verschiedene Sprachen spricht. Also nicht nur die Sprache der Zahlen und Formeln, sondern nebenbei auch die Sprache der Bären. Und die Sprache der Menschen, die Fische fangen und nicht daran denken, dass ein Fisch lieber schwimmt als gefangen und dann gegessen zu werden.

Weshalb Pythagoras eine Wette abschließt: Wenn ich euch in ganzen Zahlen sagte, auf die Zahl genau, wie viele Fische ihr fangt, versprecht ihr mir dann, sie frei zu lassen? Was die Fischer aus Neugier sofort versprechen. Und als die den Fang schließlich ausgezählt haben, stellen sie plötzlich erschrocken fest, dass der Fang mit der Wettzahl zur Deckung kommt. Und werfen, weil sie verloren haben, die zappelnden Fische zurück ins Meer. Wo sie bis heute unzählbar schwimmen. Denn alles ist Zahl. Aber die Zahl ist nicht alles!

Jetzt geht's rund

Auf dem kreisförmigen Radarschirm eines Schiffs werden Objekte, die sich im Erfassungsbereich der Radaranlage befinden, als leuchtende Punkte angezeigt. Im Mittelpunkt des Schirms ist immer das Schiff selbst. Nähert sich ein leuchtender Punkt dem Mittelpunkt des Schirms, so kann das bedeuten, dass ein anderes Schiff auf Kollisionskurs fährt. In diesem Augenblick muss man wissen, wie weit die beiden Schiffe noch voneinander entfernt sind und aus welcher Richtung das Schiff, das beobachtet wird, anfährt.

Zur Darstellung dieser Informationen ist ein Koordinatensystem geeignet, in dem man die Lage eines Punktes durch die Entfernung von einem ausgezeichneten Punkt (dem Pol) und einem Winkel zu einer Bezugsrichtung (der Achse) beschrieben wird. Es heißt **Polarkoordinatensystem**. Ein Punkt P hat die **Polarkoordinaten** P(r|φ) mit $0° \leqq \varphi < 360°$ (Fig. 1). Dabei ist r die Entfernung des Punktes P vom Pol O und φ der Winkel zwischen der Achse und der Halbgeraden OP.

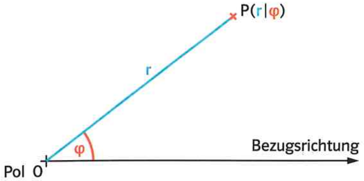


Fig. 1

Zu Beginn der Beobachtung erfasst das Beobachterschiff zwei Versorgungsschiffe und ein Sicherungsschiff. Eines der Versorgungsschiffe befindet sich am Punkt P. Seine Position kann beschrieben werden durch P(3|60°). Das bedeutet, dass es 3 Längeneinheiten vom Beobachterschiff entfernt ist und mit der Bezugsrichtung einen Winkel von 60° einschließt. Das andere Versorgungsschiff befindet sich am Punkt Q(2|150°) und das Sicherungsschiff in R(2,5|240°).

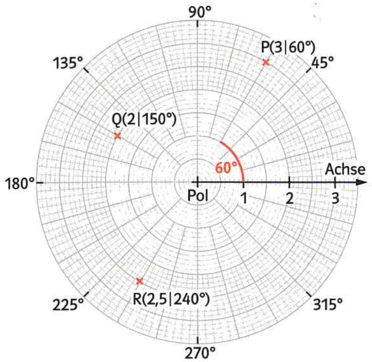


Fig. 2

Auf dem Radarschirm ist es möglich, den Wegeverlauf der beobachteten Schiffe als leuchtende Punkte zu speichern. Nun wird beobachtet, dass sich das erste Versorgungsschiff von P aus geradlinig auf das Beobachterschiff zubewegt. Alle Punkte des Weges haben die Form P(x|60°). Zur Beschreibung des Weges genügt also die Angabe $\varphi = 60°$.
Das zweite Versorgungsschiff bewegt sich geradlinig von Q aus auf 0 zu. Sein Weg kann beschrieben werden durch $\varphi = 150°$.
Das Sicherungsschiff umfährt das Beobachterschiff von R aus immer im gleichen Abstand. Es bewegt sich also entlang einer Kreislinie. Alle Punkte der Kreislinie haben die Form R(2,5|φ). Sein Weg kann daher beschrieben werden durch die Gleichung $r = 2{,}5$.

1 Welche Koordinaten hat der Punkt P(3|60°) in einem rechwinkligen Koordinatensystem?

2 Wie lautet die Gleichung der Geraden durch die Punkte P und 0 in einem rechtwinkligen Koordinatensystem?

3 Zeichne in einem rechtwinkligen Koordinatensystem einen Kreis mit Radius 2,5 cm und Mittelpunkt O(0|0). Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinaten eines Kreispunktes und dem Radius?

Ein weiteres Schiff umfährt das Beobachterschiff auf einer spiralförmigen Bahn. Seinen Weg kann man ebenfalls mithilfe von Abständen und Winkeln beschreiben. Dazu braucht man nun auch Winkel, die größer als 360° sind.
Die Beobachtung beginnt, wenn sich das Schiff im Punkt A befindet. Aus Fig. 1 entnimmt man $\overline{OA} = r = 1\,\text{cm}$ und $\varphi = 0°$, $\overline{OB} = 1{,}3\,\text{cm}$ und $\varphi = 60°$.
Ergänze die Tabelle entsprechend.

Punkt	A	B	C	D	E	F
φ	0°	60°	120°	180°	240°	300°
r in cm	1	1,3				

Punkt	G	H	I	K	L	M	N
φ	360°	420°	480°	540°	600°	660°	720°
r in cm							

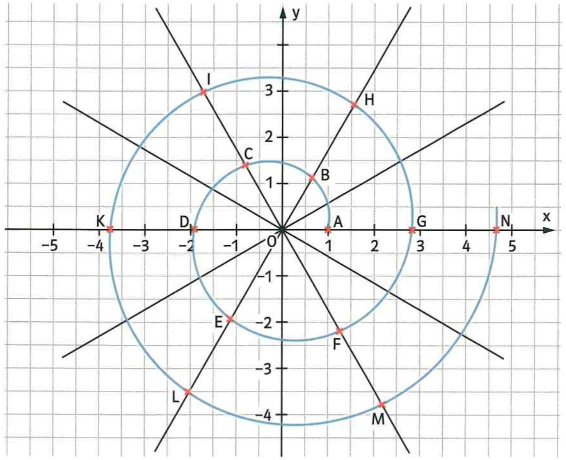
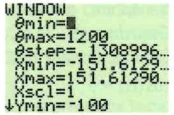
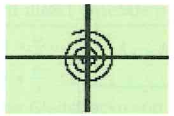


Fig. 1

4 Was kann man über den Abstand zwischen den Punkten A und G, B und H bzw. C und I sagen? Bestätige, dass in der Tabelle der Zusammenhang $r = 0{,}005 \cdot \varphi + 1$ gilt, wenn man für r und φ die Maßzahlen einsetzt.

Spiralen kann man mit dem GTR zeichnen, wenn man den Polarmodus wählt.



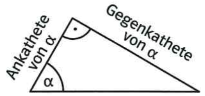


5 Zeichne weitere Spiralen mit $r = 0{,}004 \cdot \varphi^2$ bzw. $r = 0{,}04 \cdot \sqrt{\varphi}$ mithilfe des GTR und vergleiche sie.




Rückblick

In einem rechtwinkligen Dreieck mit Winkel α bezeichnet man die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, als **Hypotenuse** und die beiden anderen Seiten als **Katheten**. Insbesondere heißt die Kathete, die dem Winkel α gegenüberliegt, **Gegenkathete** von α, die andere **Ankathete** von α.



Satz des Pythagoras
Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist mit den Katheten a und b und der Hypotenuse c, dann gilt $a^2 + b^2 = c^2$.
Umkehrung:
Wenn in einem Dreieck für die Seitenlängen $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Sinus, Kosinus und Tangens
In allen rechtwinkligen Dreiecken mit Winkel α gilt

$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$

$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha}$

Winkel und Seiten berechnen
Für ein rechtwinkliges Dreieck mit $\gamma = 90°$ gilt:

Winkel gesucht

$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$
$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$
…

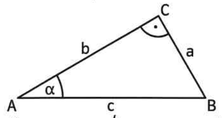
$\gamma = 90°$
$\alpha + \beta = 90°$

Seite gesucht

$a^2 + b^2 = c^2$

$\frac{a}{b} = \tan(\alpha)$
$\frac{a}{c} = \sin(\alpha)$
…

Seite gesucht
Gegeben: Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$,
$a = 5{,}2\,cm,\ c = 9{,}4\,cm$
Gesucht: b
Lösung: Dreieck ABC ist rechtwinklig, nach dem Satz des Pythagoras gilt:
$b = \sqrt{c^2 - a^2},\ b = \sqrt{9{,}4^2 - 5{,}2^2}\,cm \approx 7{,}8\,cm$



$\sin(\alpha) = \frac{a}{c},\ \cos(\alpha) = \frac{b}{c},\ \tan(\alpha) = \frac{a}{b}$

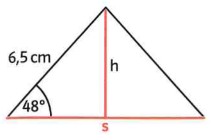
Winkel gesucht
Gegeben: Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$,
$a = 5{,}2\,cm,\ c = 9{,}4\,cm$
Gesucht: α, β
Lösung: Dreieck ABC ist rechtwinklig, es gilt:
$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{5{,}2}{9{,}4} \approx 0{,}5531$,
$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{5{,}2}{9{,}4}\right) \approx 33{,}6°$.
Nach dem Winkelsummensatz ist
$\beta \approx 90° - 33{,}6° = 56{,}4°$.

Seite und Winkel gesucht
Gegeben: Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$,
$b = 6{,}2\,cm,\ \alpha = 43°$
Gesucht: c, β
Lösung: Dreieck ABC ist rechtwinklig, es gilt:
$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$,
$c = \frac{b}{\cos(\alpha)} = \frac{6{,}2}{\cos(43°)}\,cm \approx 8{,}5\,cm$.
Nach dem Winkelsummensatz ist
$\beta = 90° - 43° = 47°$.

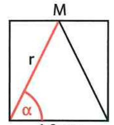
Training

Runde 1

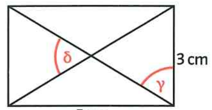
1 Berechne die farbig markierten Größen.



Gleichschenkliges Dreieck



Quadrat



Rechteck

2 Die beiden parallelen Seiten des gleichschenkligen Trapezes in Fig. 1 sind 3,2 cm und 6,8 cm lang. Sie haben den Abstand 2,6 cm. Wie groß ist α? Wie lang sind die Schenkel?

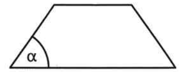


Fig. 1

3 Die Steigfähigkeit eines Autos wird in Prozent angegeben. In einer Autozeitschrift findet man: Steigfähigkeit: Mercedes G 500 80 %, Hummer H2 60 %.
a) Welchen Steigungswinkel kann ein Gelände jeweils haben, damit es von den Geländewagen gerade noch befahren werden kann? Kann man mit dem Hummer H2 auf einer Strecke von 30 m eine Höhendifferenz von 15 m überwinden?
b) Wie lang muss eine Strecke mindestens sein, damit man mit dem Mercedes G 500 eine Höhendifferenz von 50 m überwinden kann?
c) Nach weit verbreiteter Meinung entspricht eine Steigung von 100 % einer senkrechten Wand. Was sagst du dazu?

4 Die Grundfläche eines Kegels hat den Radius 25,6 cm. Der Kegel ist 50,9 cm hoch. Wie groß ist der Winkel α an der Spitze?

Runde 2

1 Berechne die fehlenden Größen des Dreiecks ABC.

α	β	γ	a	b	c
90°		23°		25,72 m	
37°	90°			37,5 km	
		90°	13,2 dm	36 cm	

2 Peter und Ina lassen auf einem ebenen Gelände einen Drachen steigen. Sie stehen 80 m voneinander entfernt. Die Drachenschnur ist 120 m lang. Ina steht direkt unter dem Drachen. Sie möchte wissen, wie hoch er ungefähr fliegt.
Fertige eine Skizze an und berechne.

3 a) Ein Drachenflieger startet am Tegelberg über Füssen. Nach einer Gleitstrecke von 8,2 km landet er im 1000 m tiefer liegenden Tal. Berechne seinen Gleitwinkel.
b) Wie lang ist seine Gleitstrecke, wenn er am Tegelberg startet und mit einem Gleitwinkel von 5° fliegt?

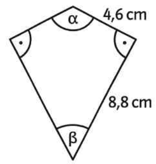


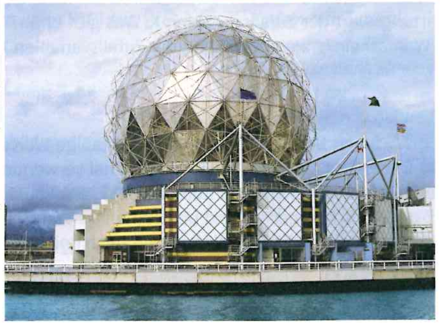
Fig. 2

4 Berechne die beiden fehlenden Winkel des Drachens in Fig. 2.

5 a) Welchen Flächeninhalt hat das Parallelogramm ABCD mit $\overline{AB} = 8\,cm$, $\overline{AD} = 10\,cm$ und $\sphericalangle BAD = 60°$? Skizziere das Parallelogramm und berechne.
b) Beschreibe in Worten, wie man die Diagonale $\overline{BD}$ berechnen kann.

Das kannst du schon

- Umfang und Flächeninhalt bei Rechteck, Dreieck, Parallelogramm und Kreis berechnen
- Rauminhalt eines Quaders berechnen
- Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel erkennen, ihre Eigenschaften benennen

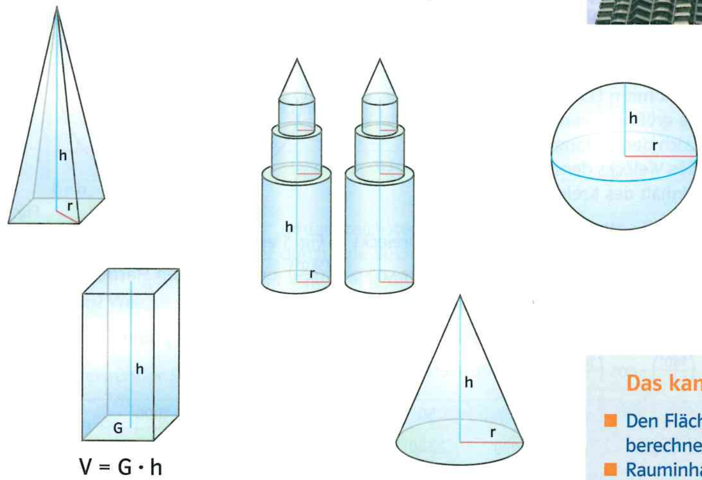


Zahl und Maß | Daten und Zufall | Beziehung und Änderung | Modell und Simulation | Muster und Struktur | **Form und Raum**

Schöne Formeln zu schönen Formen

Das entscheidende Kriterium ist Schönheit; für hässliche Mathematik ist auf dieser Welt kein beständiger Platz.

G. H. Hardy



$V = G \cdot h$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Das kannst du bald

- Den Flächeninhalt von Kreisteilen berechnen
- Rauminhalt und Oberfläche von Körpern, wie Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel berechnen
- Formeln für den Rauminhalt und die Oberfläche von weiteren Körpern verstehen und anwenden
- Mit einer Formelsammlung umgehen

1 Kreis

Mexikos berühmtester, 2000 Jahre alter Baum steht in Santa Maria del Tule. Man bräuchte ungefähr 34 erwachsene Menschen, wenn man diesen Baum mit den Armen umfassen wollte!
Ingrun glaubt, dass man mit einer Scheibe von diesem Baum das ganze Klassenzimmer bedecken könnte.

Mit den Formeln $U = 2\pi r$ und $A = \pi r^2$ kann man den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises berechnen. Warum diese Formeln gelten, kann man plausibel machen.
Einem Kreis mit Radius r ist ein regelmäßiges Vieleck mit n Ecken einbeschrieben (s. Fig. 1). Je größer man n wählt, desto mehr nähert sich der Umfang und der Flächeninhalt des Vielecks dem Umfang bzw. Flächeninhalt des Kreises an.

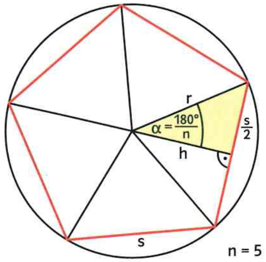


Fig. 1

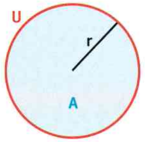
$\sin(\alpha) = \frac{\frac{s}{2}}{r}$
$s = 2r \cdot \sin(\alpha)$;
$\cos(\alpha) = \frac{h}{r}$
$h = r \cdot \cos(\alpha)$

Mithilfe des markierten rechtwinkligen Dreiecks in Fig. 1 ergibt sich für den Umfang U des Vielecks $U = n \cdot s = n \cdot 2r \cdot \sin(\alpha) = 2r \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$ und für seinen Flächeninhalt $A = n \cdot \frac{1}{2} s h = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$.
In der Tabelle werden die hier vorkommenden Ausdrücke $n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$ und $n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$ für große Werte von n berechnet:

π ist näherungsweise 3,141592653589793238 46264338327950288…
*π ist keine periodische Dezimalzahl, sondern eine **irrationale** Zahl.*

n	10	50	100	500	1000	10 000
$n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$	3,090	3,140	3,1411	3,14157	3,141587	3,1415926
$n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$	2,939	3,133	3,1395	3,14151	3,141572	3,1415924

Man erkennt, dass sich beide Ausdrücke $n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right)$ und $n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$ für große Werte von n der **Kreiszahl π** annähern.
Es ist also U proportional zu r mit Proportionalitätsfaktor 2π und A proportional zu r^2 mit Proportionalitätsfaktor π.



Ein Kreis mit dem Radius r hat den Flächeninhalt $A = \pi r^2$ und den Umfang $U = 2\pi r$.

Diese Formeln kann man zur Berechnung des Radius nach r auflösen:
Es gilt $r = \frac{U}{2\pi}$ bzw. $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

Beispiel Radius berechnen
Ein kreisförmiges Delfinbecken soll den Flächeninhalt 2,5 a haben. Mit welchem Durchmesser muss man das Becken planen und wie lang wird die Beckenmauer?
Lösung:
$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{2{,}5\,a}{\pi}} = \sqrt{\frac{250\,m^2}{\pi}} \approx 8{,}9\,m$. Somit ist $d = 2r \approx 17{,}8\,m$ und $U = 2\pi r \approx 56\,m$.
Der Durchmesser des Beckens beträgt 17,8 m, die Beckenmauer wird 56 m lang.

Beim Rechnen mit π muss man sinnvoll runden.

Aufgaben

1 a) Ein Planschbecken hat den Durchmesser 3,4 m. Welchen Umfang und welchen Flächeninhalt hat es?
b) Der Weg um einen kreisrunden See ist 17,4 km lang. Welchen Durchmesser und welchen Flächeninhalt hat der See?
c) Ein Kabel hat die Querschnittsfläche $32\,mm^2$. Welchen Umfang hat das Kabel?

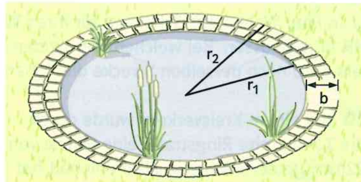
2 Übernimm die Tabelle ins Heft und berechne die fehlenden Größen.

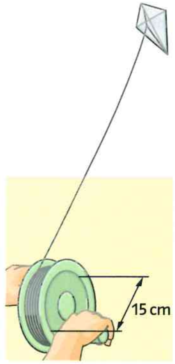
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
r	17 cm						
d			9,1 mm			7,543 m	
U		3,2 m			1,543 km		
A				13 cm²			1,3 km²

Die Summe aller Radien der Kreise in Aufgabe 2 ist 893,3268634 m.

3 a) Walter Hudson, einer der „umfangreichsten" Männer der Welt, hatte einen Bauchumfang von ca. 2,80 m. Passte er durch eine 80 cm breite Tür?
b) Ein kreisförmiger Baum hat einen Umfang von 1,60 m. Welche Querschnittsfläche hat der Stamm? Welche prozentuale Abweichung erhält man, wenn man dabei mit dem Näherungswert 3 für π rechnet bzw. mit dem Näherungswert 3,1 für π?

4 Ein kreisrunder Seerosenteich hat den Radius $r_1 = 7\,m$.
a) Um den Teich wird ein 3 m breiter Weg angelegt. Welchen Flächeninhalt hat der Weg?
b) Wie breit ist der Weg, wenn sein Flächeninhalt $130\,m^2$ beträgt?





5 Eine Drachenschnur ist 100 m lang. Wie viele Wicklungen liegen auf der Spule, wenn die Wicklungen im Durchschnitt den Durchmesser 15 cm haben?

Bist du sicher?

1 Ein Topfdeckel hat den Umfang 90 cm. Berechne seinen Flächeninhalt.

2 Um ein rundes Schwimmbecken führt ein Weg. Becken und Weg zusammen haben den Radius 12 m. Der Weg hat den Flächeninhalt $100\,m^2$. Wie breit ist der Weg?

6 a) Wie verändert sich der Umfang bzw. der Flächeninhalt eines Kreises, wenn sich der Radius verdoppelt?
b) Wie verändert sich der Umfang eines Kreises, wenn sich der Radius um 10 cm erhöht? Wie ist es mit dem Flächeninhalt?
c) Gegeben ist der Flächeninhalt A eines Kreises. Leite eine Formel für den Umfang U des Kreises in Abhängigkeit von A her.

7 Das Foto zeigt einen kreisförmigen Krater in der Tiefebene Vastitas Borealis in der Nähe des Mars-Nordpols.
a) Der Krater hat einen Flächeninhalt von ca. 1000 km². Welchen Durchmesser und Umfang hat er?
b) Schätze, welchen Flächeninhalt die im Krater eingeschlossene Fläche aus Wassereis ungefähr hat.

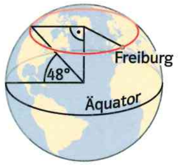


Fig. 1

8 a) Der Äquator hat eine Länge von etwa 40 000 km. Wie groß ist der Erdradius R?
b) Ein 40 000 km langes Seil, das am Äquator straff um die Erde gespannt war, wird geringfügig um 2 m verlängert und so gestrafft, dass der Abstand von der Erde überall gleich ist. Kannst du jetzt unter diesem Seil hindurchkriechen?
c) Wie lang ist der 48. Breitenkreis, auf dem Freiburg liegt (vgl. Fig. 1)?

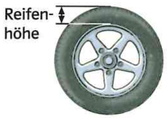
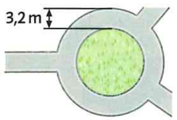


Fig. 2

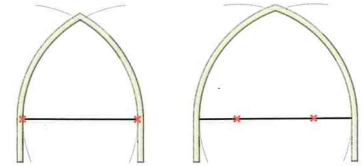
9 Der Autoreifen von Frau Wellers Auto hat die Aufschrift 195/65 HR 15. Das bedeutet: Der Reifen ist 195 mm breit, die „Reifenhöhe" (siehe Fig. 2) beträgt 65 % der Breite und der Felgendurchmesser ist 15 Zoll (1 Zoll = 2,54 cm). Das „H" steht für die Maximalgeschwindigkeit 210 $\frac{km}{h}$, „R" steht für Radialreifen.
a) Welchen Umfang hat der Reifen?
b) Wie oft dreht sich der Reifen bei einer Fahrt von 1 Minute mit Maximalgeschwindigkeit?
c) In Frau Wellers Kfz-Schein ist für ihren Wagen außerdem noch die Reifengröße 205/60 HR 15 zugelassen. Bei welchem der beiden Reifen zeigt der Kilometerzähler von Frau Wellers Auto nach derselben Strecke die höhere Zahl an?



10 Bei einem Kreisverkehr wurde durch die 3,2 m breite Ringstraße eine Fläche von 220 m² geteert. Welchen Flächeninhalt hat die Rasenfläche in der Mitte?

11 Pizzabäckerin Victoria verlangt für eine Classic-Pizza (25 cm Durchmesser) mit Salamibelag 4,95 €. Diskutiere in einem kleinen Aufsatz, wie viel Victoria für die Classic XL (28 cm Durchmesser) bzw. Maxi-Pizza (38 cm Durchmesser) bei gleichem Belag verlangen sollte.

2 Kreisteile



Normaler Spitzbogen Gedrückter Spitzbogen

In der Architektur verwendet man oft nur Teile von Kreisen, so genannte Kreisbögen. Je nach Lage der Kreismittelpunkte spricht man in der gotischen Architektur von normalen Spitzbögen, gedrückten Spitzbögen, überhöhten Spitzbögen, Kleeblattbögen usw.

Den in Fig. 1 rot gekennzeichneten Teil einer Kreisfläche nennt man einen **Kreisausschnitt**. Zum Kreisausschnitt gehört der **Mittelpunktswinkel α**. Der zugehörige Teil der Kreislinie ist der **Kreisbogen b**.

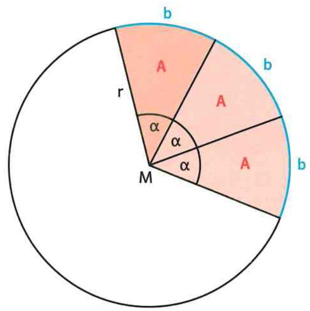
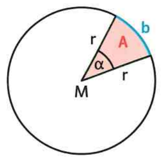


Fig. 1

Aus Fig. 1 erkennt man: Die Bogenlänge b und der Flächeninhalt A sind proportional zum Mittelpunktswinkel α. Das heißt: Bei festem Radius r entspricht dem k-fachen Mittelpunktswinkel die k-fache Bogenlänge und der k-fache Flächeninhalt. Man kann also b und A mit einem Dreisatz aus α berechnen. Dazu wird zunächst b und A für 1° bestimmt.

Mittelpunktswinkel α	360°	1°	z.B. 47°	allg. α
Länge b des Kreisbogens	$2\pi r$	$2\pi r \cdot \frac{1°}{360°}$	$2\pi r \cdot \frac{47°}{360°}$	$2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$
Flächeninhalt A des Kreisausschnitts	πr^2	$\pi r^2 \cdot \frac{1°}{360°}$	$\pi r^2 \cdot \frac{47°}{360°}$	$\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$

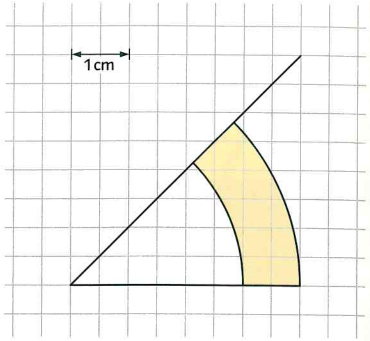
Für einen Kreisausschnitt mit Mittelpunktswinkel α gilt:
$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$ und $A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$.



Beispiel Kreisteil berechnen
Bestimme den Flächeninhalt und den Umfang der gefärbten Fläche.
Lösung:
Die Fläche ist von zwei Kreisbögen begrenzt. Der Mittelpunktswinkel ist 45°, der äußere Radius ist 4 cm, der innere 3 cm.

$A = \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{45°}{360°} \text{cm}^2 - \pi \cdot 3^2 \cdot \frac{45°}{360°} \text{cm}^2$
$= \frac{7}{8}\pi \text{cm}^2 \approx 2{,}75 \text{cm}^2$
$U = 2\pi \cdot 4 \cdot \frac{45°}{360°} \text{cm} + 2 \text{cm} + 2\pi \cdot 3 \cdot \frac{45°}{360°} \text{cm}$
$= 1{,}75\pi \text{cm} + 2 \text{cm} \approx 7{,}5 \text{cm}$

Der Flächeninhalt der gefärbten Fläche ist 2,75 cm², der Umfang 7,5 cm.



Aufgaben

1 a) Bestimme den Flächeninhalt und den Umfang der in den Figuren farbig markierten Flächen. Die Seitenlänge der Karos ist 0,5 cm.
b) Entwirf selbst Aufgaben wie in a).

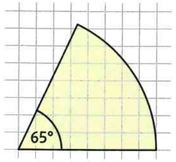


Fig. 1

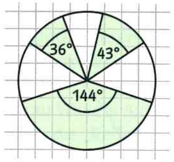


Fig. 2

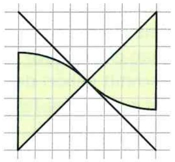


Fig. 3

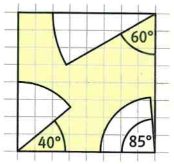


Fig. 4

2 a) Ein Kreisausschnitt hat den Radius 4,5 cm und den Mittelpunktswinkel 147°. Wie groß ist sein Flächeninhalt, wie viel Prozent der Kreisfläche ist das? Wie lang ist der Kreisbogen?
b) Ein Kreisausschnitt mit der Bogenlänge 14 cm hat den Mittelpunktswinkel 37°. Wie groß sind sein Radius und sein Flächeninhalt?
c) Ein Kreisausschnitt mit dem Flächeninhalt 79 m² hat den Mittelpunktswinkel 220°. Berechne den Radius und die Bogenlänge.
d) Welchen Flächeninhalt und Umfang hat „Pacman" (Fig. 5) mit Radius 2 cm?

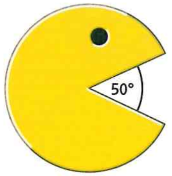


Fig. 5

3 Berechne die fehlenden Größen für einen Kreisausschnitt.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
r	2,4 m	3,5 cm	1,2 km			
α	320°			123°	213°	
b		16 cm		4 dm		12 cm
A			0,9 km²		20 m²	40 cm²

4 Eine Schiffsschaukel in einem Erlebnispark hat eine Armlänge von 17 m. Von der Senkrechten schlägt sie um 35° aus. Welchen Weg legt man bei 20 vollen Hin- und Herbewegungen der Schaukel zurück?

Bist du sicher?

1 a) Welchen Flächeninhalt hat die rosa markierte Fläche (Fig. 1) für $a = 4$ cm?
b) Wie lang ist die blaue Begrenzungslinie der Figur bei $a = 4$ cm?

2 Wie groß muss a sein, damit die Figur den Flächeninhalt 83 cm² hat?

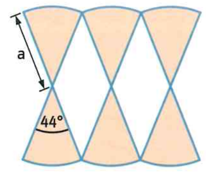


Fig. 1

5 Die Marssonde „Reconnaissance Orbiter" umkreist den Mars (Durchmesser 6794 km) in 313 km Höhe. Für einen Umlauf um den Mars braucht die Sonde 112 Minuten. Welche Strecke legt sie in 2,5 h zurück?

6 a) Welche Fläche überstreicht das Wischerblatt des abgebildeten Scheibenwischers (Fig. 2)?
b) Welchen Mittelpunktswinkel müsste dieser Scheibenwischer erhalten, wenn mindestens 0,45 m² Fläche überstrichen werden soll?

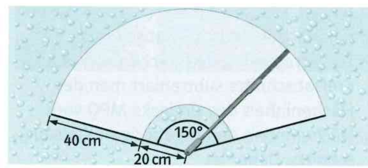


Fig. 2

7 a) Welchen Flächeninhalt und welchen Umfang hat die „Fledermaus" (Fig. 3) für $r = 2{,}4$ cm und $\alpha = 60°$?
b) Wie groß muss der Radius r bei $\alpha = 60°$ sein, damit die Figur den Flächeninhalt 30 cm² hat?
c) Wie groß muss der Winkel α bei $r = 4$ cm sein, damit die Figur den Flächeninhalt 40 cm² hat?

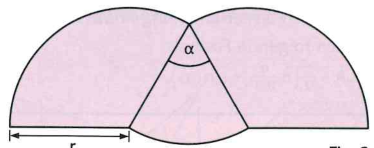
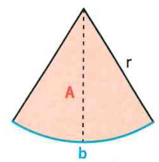


Fig. 3

8 In einer Formelsammlung findet Mikesch die Formel $A = \frac{1}{2} b r$ für den Flächeninhalt eines Kreisausschnitts.
a) Berechne für einen Halb- und einen Viertelkreis mit dieser Formel und mit der Formel $A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$ den Flächeninhalt und vergleiche.
b) Leite die Formel $A = \frac{1}{2} b r$ aus $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$ und $A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$ her.



Vergleiche $A = \frac{1}{2} b r$ *mit der Flächenformel des Dreiecks.*

9 a) Wie lang ist die rote Begrenzungslinie der markierten Fläche (Fig. 4) für $r = 2$ cm?
b) Welchen Flächeninhalt hat die markierte Fläche bei $r = 2$ cm?
c) Wie groß muss der Radius r sein, damit die Figur den Flächeninhalt 25,2 cm² hat?

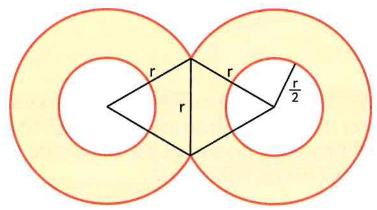
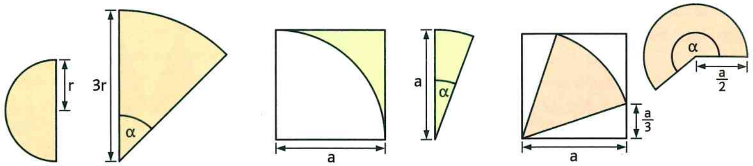


Fig. 4

10 a) Wie weit muss der Winkel α in der rechten Figur jeweils sein, damit die beiden markierten Flächen jeweils gleich groß sind?
b) Erfinde ähnliche Aufgaben wie in a.



Info

Den in Fig. 1 farbig markierten Flächenanteil eines Kreises nennt man **Kreisabschnitt**. Die Strecke $s = \overline{QP}$ heißt Sehne, h heißt Höhe des Kreisabschnitts.
Zur Berechnung des Flächeninhalts des Kreisabschnitts subtrahiert man den Flächeninhalt des Dreiecks MPQ vom Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnitts. Daher ist

$A = \pi r^2 \frac{\alpha}{360°} - \frac{1}{2} s (r - h)$.

In einer Formelsammlung findet man auch folgende Formel:

$A = \frac{r^2}{2}\left(\pi \frac{\alpha}{180°} - \sin(\alpha)\right)$.

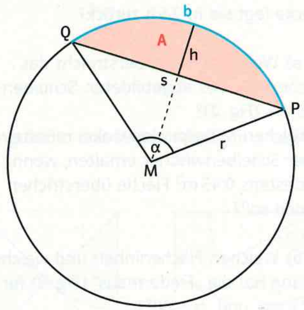
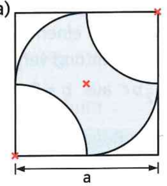
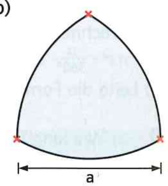


Fig. 1

11 a) Ein Kreisabschnitt hat den Mittelpunktswinkel 50° und den zugehörigen Radius 7 cm. Berechne seinen Flächeninhalt.
b) Ein Fenster hat die Form eines Kreisabschnitts. Die Bogenlänge ist 1,5 m, der zugehörige Kreisradius 1,3 m. Berechne die Fensterfläche. Wie breit und wie hoch ist das Fenster?

12 Berechnet jeweils den Flächeninhalt und den Umfang der markierten Figur in Abhängigkeit von a. Die roten Kreuze geben Kreismittelpunkte an. Erfindet ähnliche Aufgaben.

a)


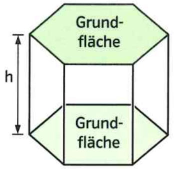
b)


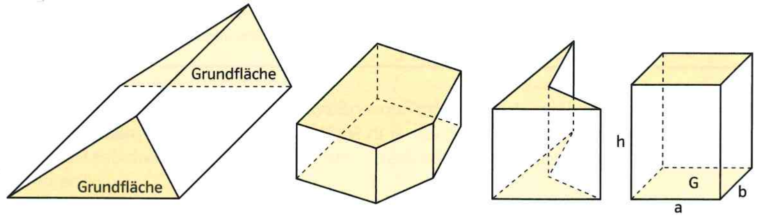
13 a) Erkläre, wie man bei einem Kreisabschnitt den Radius aus der Sehnenlänge s und der Höhe h berechnen kann (siehe Fig. 1).
b) Eine Bogenbrücke hat die Spannweite 300 m und die Höhe 50 m. Welche Querschnittsfläche hat die Durchfahrt?

3 Prisma und Zylinder

Stell dir vor, du sollst in einem Hochhaus eine neue Klimaanlage einrichten. Für das Angebot eines Handwerkers brauchst du den Rauminhalt des Gebäudes. Die vier abgebildeten Hochhäuser sollen alle die Grundfläche 3000 m² haben und 150 m hoch sein.

Prisma und Zylinder haben Eigenschaften, die es ermöglichen, den Rauminhalt dieser Körper mit derselben Formel zu bestimmen.
Die Oberfläche eines (senkrechten) **Prismas** besteht aus zwei deckungsgleichen, parallelen Vielecken, den **Grundflächen**, und Rechtecken als Seitenflächen. Die Seitenflächen bilden den **Mantel** des Prismas.





Den Abstand der beiden Grundflächen nennt man die **Höhe h** des Prismas. Das letzte Beispiel der Abbildungen zeigt, dass auch der Quader ein Prisma ist. Ein Quader mit Länge a und Breite b hat die Grundfläche $G = a \cdot b$ und den Rauminhalt $V = a \cdot b \cdot h = G \cdot h$.

Ein Quader lässt sich in zwei gleiche Prismen mit rechtwinkligen Dreiecken als Grundfläche zerlegen. Die Prismen in Fig. 1 haben die halbe Grundfläche und den halben Rauminhalt wie der Quader. Es gilt also:

$V_{Prisma} = \frac{1}{2} \cdot V_{Quader} = \frac{1}{2} \cdot G_{Quader} \cdot h$
$= G_{Prisma} \cdot h$.

Somit gilt die Formel $V = G \cdot h$ auch für Prismen, deren Grundflächen aus rechtwinkligen Dreiecken bestehen.

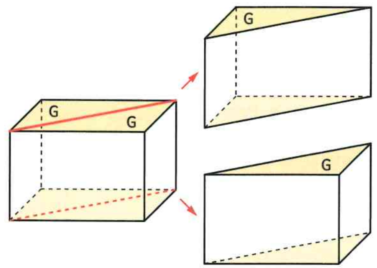


Fig. 1

Ein beliebiges Prisma kann man zunächst in Prismen mit dreieckiger Grundfläche zerlegen und diese dann in Prismen, deren Grundflächen rechtwinklige Dreiecke sind (siehe Fig. 1). Somit gilt für das Volumen des Prismas in Fig. 1:
$V = G_1 \cdot h + G_2 \cdot h + \ldots + G_6 \cdot h = (G_1 + G_2 + \ldots + G_6) \cdot h = G \cdot h.$
Für alle Prismen gilt also die Volumenformel $V = G \cdot h$.

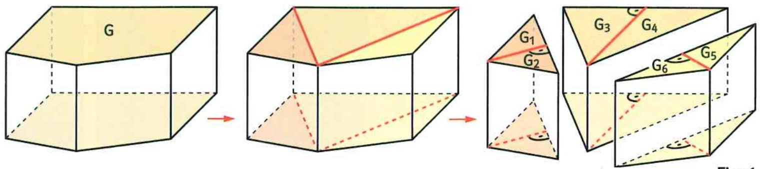


Fig. 1

Ein Zylinder hat als Grundfläche einen Kreis. Den Kreis kann man durch Vielecke beliebig genau annähern. Daher kann man den Zylinder durch Prismen annähern (siehe Fig. 2). Für die Prismen gilt die Volumenformel $V = G \cdot h$. Also gilt auch für das Zylindervolumen die Formel $V = G \cdot h$. Wegen $G = \pi r^2$ folgt für den Zylinder: $V = \pi r^2 \cdot h$.

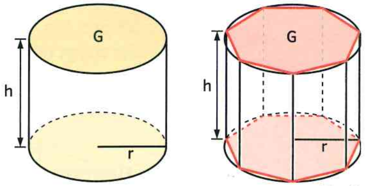


Fig. 2

Für den Rauminhalt eines Prismas oder eines Zylinders mit der Höhe h und der Grundfläche G gilt $V = G \cdot h$.

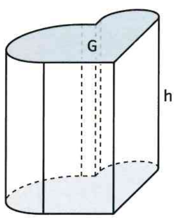


Fig. 3

Die Formel $V = G \cdot h$ lässt sich nicht nur verwenden, wenn die Grundfläche ein Kreis oder ein Vieleck ist. Auch für einen Körper, wie er in Fig. 3 dargestellt ist, kann man sie benutzen, da er sich durch Prismen annähern lässt.

Für die Oberfläche von Prisma und Zylinder gilt $O = 2G + M$ (siehe Fig. 4). Ist U der Umfang der Grundfläche, so ist $M = U \cdot h$ die Mantelfläche. Für den Zylinder ergibt sich also $M = 2\pi r h$.

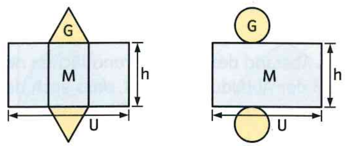


Fig. 4

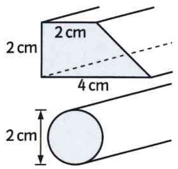
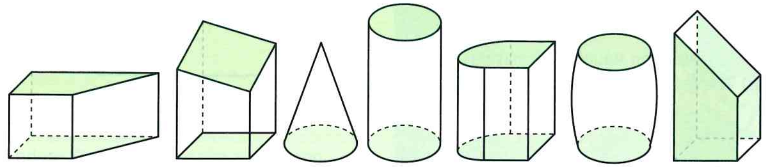


Fig. 5

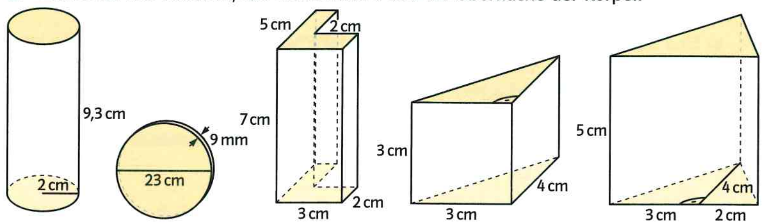
Beispiel Volumen und Oberfläche berechnen
Die Stäbe (Fig. 5) sind 1,5 m lang. Berechne ihren Rauminhalt und ihre Oberfläche.
Lösung:
Oberer Stab (Prisma):
Grundfläche $G = 4\,\text{cm}^2 + 2\,\text{cm}^2 = 6\,\text{cm}^2$. Volumen $V = G \cdot h = 900\,\text{cm}^3$.
Umfang $U = 2\,\text{cm} + 2\,\text{cm} + 4\,\text{cm} + \sqrt{2^2 + 2^2}\,\text{cm} \approx 10{,}8\,\text{cm}$.
Oberfläche $O = 2G + U \cdot h \approx 2 \cdot 6\,\text{cm}^2 + 10{,}8 \cdot 150\,\text{cm}^2 = 1632\,\text{cm}^2$.
Unterer Stab (Zylinder):
Volumen $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 1^2 \cdot 150\,\text{cm}^3 \approx 471\,\text{cm}^3$.
Oberfläche $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi\,\text{cm}^2 + 2\pi \cdot 150\,\text{cm}^2 \approx 949\,\text{cm}^2$.

Aufgaben

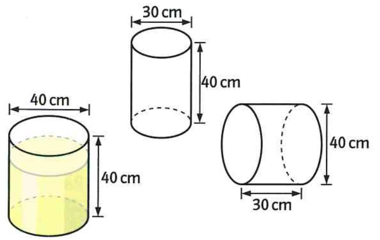
1 Für welche der folgenden Körper kann man die Formel $V = G \cdot h$ verwenden? Welche sind Prismen?



2 Berechne das Volumen, die Mantelfläche und die Oberfläche der Körper.



3 Die linke Tonne ist zu 75 % mit Wein gefüllt.
a) Passt der Wein in eine der beiden rechten Tonnen? Schätze zuerst und rechne dann.
b) Welche Höhe muss die mittlere Tonne haben, damit der Wein ganz hineinpasst?
c) Welche Maße könnte eine 100-Liter-Tonne haben? Gib drei verschiedene Möglichkeiten an.



4 Die Weltraumrakete Ariane 5 hat vier zylinderförmige Treibstoffbehälter. Die beiden seitlichen in den „Strap-on Boostern" sind 31,6 m lang und haben einen Durchmesser von 3,0 m. Die Behälter der 1. und 2. Stufe im Mittelteil haben beide den Durchmesser 5,4 m und sind 30,7 m bzw. 4,5 m lang.
a) Enthalten die beiden seitlichen Treibstoffbehälter zusammen mehr Treibstoff als das Mittelteil? Schätze erst und rechne dann.
b) Die „Strap-on Booster" werden in einer Höhe von 55 km leer abgetrennt. Wie viele Liter Treibstoff verbraucht die Rakete durchschnittlich beim Start pro km?

5 Sandras Zimmer hat eine Dachschräge (siehe Fig. 1).
a) Berechne den Rauminhalt von Sandras Zimmer.
b) Sandra will Wände und Decke tapezieren. Wie viel Tapete benötigt sie?

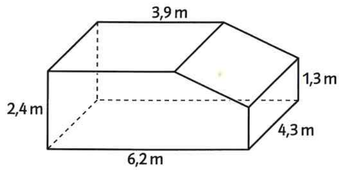
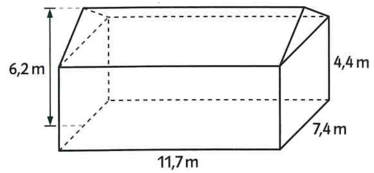


Fig. 1

Bist du sicher?

1 Wie groß sind der Rauminhalt und die Oberfläche eines Zylinders mit Durchmesser 17 cm und Höhe 9 cm?
Wie groß ist seine Mantelfläche?

2 a) Welchen Rauminhalt hat das Haus?
b) Wie groß ist die Dachfläche des Hauses?



6 Ein Hochwasserdeich mit trapezförmiger Querschnittsfläche ist 6 m hoch, unten 30 m breit und oben 7 m breit. Wie viel m^3 Erde braucht man für einen 7 km langen Deich?

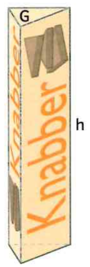
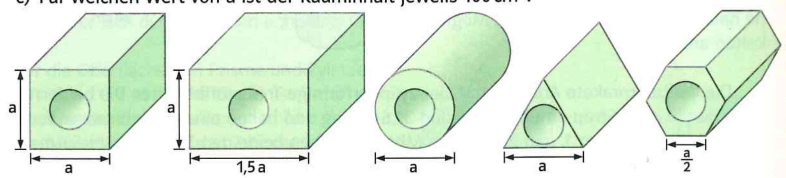


Fig. 1

7 a) Eine Schokoladenpackung hat die Form eines Prismas (Fig. 1). Die Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 3 cm, die Höhe beträgt 22 cm. Welchen Rauminhalt und welche Oberfläche hat die Packung?
b) Eine Packung Schokoflocken hat die Form eines Prismas mit einem regelmäßigen Sechseck mit Seitenlänge 3 cm als Grundfläche und Höhe 14 cm. Welchen Rauminhalt und welche Oberfläche hat die Packung?

8 a) Ermittle möglichst einfache Formeln zur Bestimmung von r aus h und V und zur Bestimmung von h aus O und r bei einem Zylinder.
b) Welche Oberfläche hat eine 12 cm hohe Dose mit dem Rauminhalt 1 Liter?
c) Welche Höhe hat eine Litfasssäule mit der Oberfläche $4\,m^2$ und dem Radius 60 cm?

9 Die folgenden durchbohrten Körper haben alle die Länge 2a. Das kreisrunde Bohrloch hat jeweils den Durchmesser $\frac{a}{2}$.
a) Bestimme für jeden Körper den Rauminhalt und die Oberfläche für $a = 4\,cm$.
b) Bestimme den Rauminhalt und die Oberfläche für allgemeines a.
c) Für welchen Wert von a ist der Rauminhalt jeweils $100\,cm^3$?



10 Untersucht in Gruppen, wie sich Umfang, Oberfläche, Mantelfläche und Volumen eines Zylinders verändern, wenn man nur den Radius oder nur die Höhe oder beides verdoppelt.

Kannst du das noch?

11 Vereinfache den Term.
a) $\frac{x^4 \cdot x^5}{x^2}$ b) $\frac{9^4\pi^3}{(3^4\pi)^2}$ c) $\frac{9 \cdot b^5 + 3^2 \cdot b^4}{b + 1}$

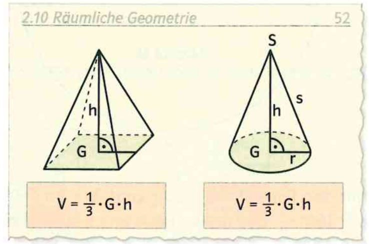
12 Löse die Gleichungen. a) $3x^5 = 17$ b) $5 \cdot 3^{2x} + 4 = 18$

4 Formeln verstehen: Pyramiden und Kegel

Prisma und Zylinder haben jeweils zwei gleiche Grundflächen.
Andere Körper laufen spitz zusammen.

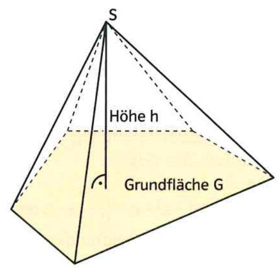
In einer Formelsammlung findet sich für den Rauminhalt der Pyramide und des Kegels die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.
Wie kann man das erklären?
Zunächst muss man wissen, was eine Pyramide ist.

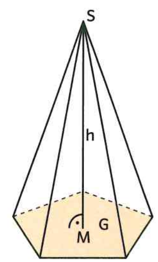
Aus einer Formelsammlung:


2.10 Räumliche Geometrie 52

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Verbindet man die Ecken eines Vielecks mit einem Punkt S, der nicht in der Ebene des Vielecks liegt, so erhält man eine **Pyramide**. Das Vieleck bildet die **Grundfläche** der Pyramide, der Punkt S ist die **Spitze** der Pyramide. Der Abstand der Spitze zur Grundfläche heißt **Höhe** der Pyramide.
Bei einer regelmäßigen Pyramide ist die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck und die Spitze befindet sich senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche.





Regelmäßige fünfseitige Pyramide

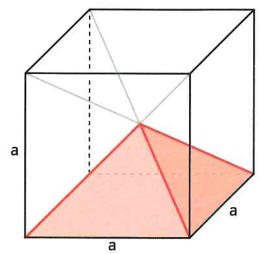
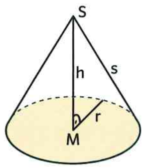


Fig. 1

Ein Würfel ist aus sechs gleichen Pyramiden zusammengesetzt (Fig. 1). Jede der sechs Pyramiden hat also das Volumen $V = \frac{1}{6}a^3$. Andererseits ist die Grundfläche jeder Pyramide $G = a^2$ und die Höhe $h = \frac{1}{2}a$. Somit gilt für ihr Volumen die Formel

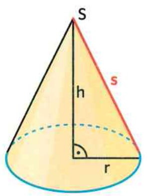
$$V = \frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h.$$

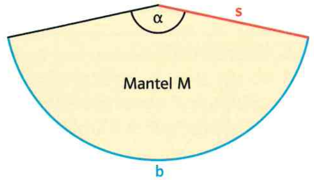
Das ist die Formel, die in der Formelsammlung steht.



Wenn man alle Punkte einer Kreislinie mit einem Punkt S verbindet, so erhält man einen **Kegel** mit Spitze S. Bei einem **senkrechten Kegel** ist die Spitze senkrecht über dem Kreismittelpunkt M.
Einen Kreis kann man durch Vielecke beliebig genau annähern. Daher kann man einen Kegel durch Pyramiden annähern. Es gilt somit auch für das Kegelvolumen die Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$. Da $G = \pi r^2$ der Flächeninhalt des Kreises ist, ergibt sich für den Rauminhalt des Kegels $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$.

Der Rauminhalt einer Pyramide oder eines Kegels mit Grundfläche G und Höhe h ist
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$.





Wenn man einen senkrechten Kegel entlang einer Mantellinie aufschneidet und den Mantel eben ausbreitet, so erhält man einen Kreisausschnitt. Sein Radius ist die Länge der Mantellinie s mit $s = \sqrt{h^2 + r^2}$.
Die Bogenlänge b des Kreisausschnitts ist der Umfang des Grundkreises des Kegels. Daher ist $b = 2\pi r$.

Mit den Formeln $b = 2\pi r$ und $b = 2\pi s \cdot \frac{\alpha}{360°}$ kann man den Mittelpunktswinkel $\alpha = 360° \cdot \frac{r}{s}$ des Kreisausschnitts berechnen und mit diesem die **Mantelfläche** M.

Beispiel Volumenberechnung von Pyramide und Kegel
Eine Pyramide hat die Höhe 3 cm. Ihre Grundfläche ist ein Quadrat mit Seitenlänge 4 cm.
a) Berechne das Volumen der Pyramide.
b) Die Pyramide kann in einen Kegel einbeschrieben werden (siehe Fig. 1). Berechne das Volumen des Kegels.
Lösung:
a) $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 3\,cm^3 = 16\,cm^3$.

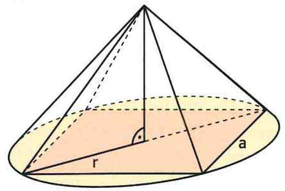
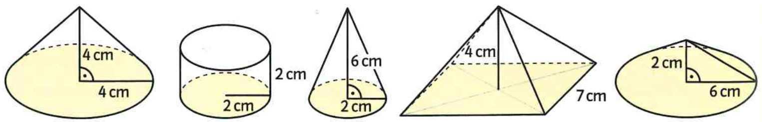


Fig. 1

b) *Der Radius des Kegelgrundkreises ist halb so lang wie eine Quadratdiagonale, also* $r = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a$.
$G = \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot a\right)^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot a^2 = 8\pi\,cm^2$. $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 8\pi\,cm^3 \approx 25{,}13\,cm^3$.

Aufgaben

1 Ordne die folgenden Körper nach ihrem Rauminhalt.



2 a) Zeichne das Netz einer quadratischen Pyramide mit Seitenlänge $a = 2{,}5\,cm$ und Höhe $h_1 = 4\,cm$ der Seitendreiecke (s. Fig. 1).
b) Bestimme den Rauminhalt und den Oberflächeninhalt der Pyramide.
c) Bestimme den Rauminhalt einer Pyramide mit $s = 3{,}5\,cm$ und $h = 3\,cm$.

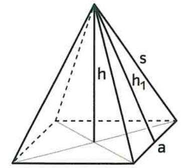
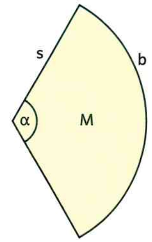


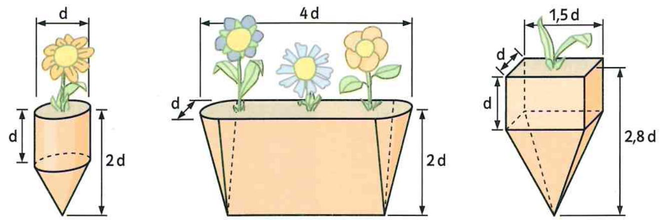
Fig. 1

3 Ein Kegel hat den Radius 4 cm und die Höhe 7 cm.
a) Berechne seinen Rauminhalt.
b) Bestimme den Mittelpunktswinkel α des zur Mantelfläche gehörigen Kreisausschnitts.
c) Berechne die Mantelfläche und die Oberfläche des Kegels.

4 a) Zeichne einen Kreisausschnitt mit dem Mittelpunktswinkel 120° und dem Radius 6 cm. Schneide ihn aus und forme daraus einen Kegelmantel. Berechne die Mantelfläche, den Radius, die Höhe und den Rauminhalt des Kegels.
b) Untersuche, wie sich diese Größen verändern, wenn man den Radius des Kreisausschnitts verdoppelt.
c) Untersuche, wie sich diese Größen verändern, wenn man den Mittelpunktswinkel halbiert.

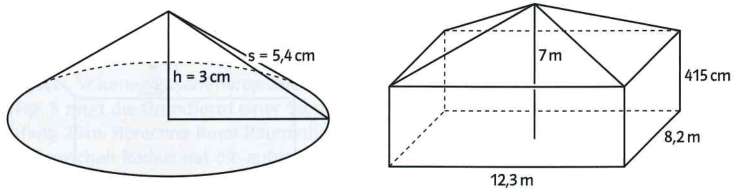


5 Welchen Rauminhalt und welche Oberfläche haben die folgenden Blumenbehälter für d = 20 cm?



Bist du sicher?

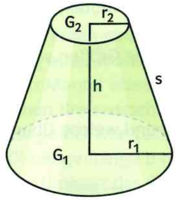
1 Berechne den Rauminhalt und den Oberflächeninhalt der beiden Körper.



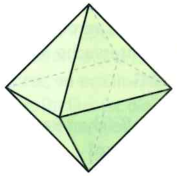
6 a) Die Cheops-Pyramide bei Gizeh in Ägypten wurde aus ca. 2,36 Millionen Steinblöcken mit durchschnittlich $1{,}1\,m^3$ Rauminhalt gebaut. Welche Seitenlänge hatte die quadratische Grundfläche der Pyramide, wenn die Höhe 146,70 m betrug? Die Hohlräume in der Pyramide darfst du vernachlässigen.
b) Die Cheops-Pyramide wird in einen gedachten Kegel einbeschrieben. Welchen Bruchteil hat das Volumen dieses Kegels vom Volumen eines Würfels, der die gleiche Grundfläche wie die Cheops-Pyramide hat?

7 Ein kelchförmiges Glas hat die Gestalt eines Kegels mit dem Durchmesser 6,6 cm und der Höhe 9,7 cm. Dorothee hat es randvoll mit Tomatensaft gefüllt und trinkt jetzt vom Saft. Das Glas kann dabei auf verschiedene Weisen noch „halb voll" sein. Untersucht dazu in Gruppen folgende Fragen:
a) Wie viel Prozent des Rauminhalts des Glases sind noch gefüllt, wenn das Glas noch bis zur halben Höhe mit Saft gefüllt ist?
b) Wie hoch steht der Saft im Glas, wenn der halbe Rauminhalt des Glases gefüllt ist?
c) Wie hoch steht der Saft im Glas, wenn der Durchmesser des Flüssigkeitsspiegels auf die Hälfte abgenommen hat?
d) Wie viel Prozent des Rauminhalts des Glases sind noch gefüllt, wenn der Flächeninhalt des Flüssigkeitsspiegels auf die Hälfte abgenommen hat?
e) Wie hoch steht der Saft, wenn die halbe Mantelfläche von Flüssigkeit bedeckt ist?

8 a) Für die abgebildeten Körper findest du in einer Formelsammlung Formeln für den Rauminhalt und die Oberfläche. Gib diese Formeln an.
b) Bestimme den Rauminhalt und den Oberflächeninhalt eines Oktaeders mit Kantenlänge 3 cm.
c) Leite für ein Referat oder eine Präsentation die Formeln, die du nachgeschlagen hast, her und erkläre sie vor der Klasse.

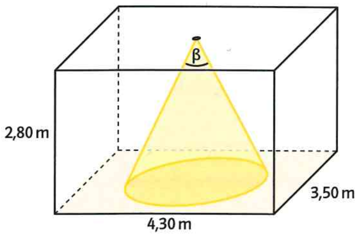


Kegelstumpf


Oktaeder

9 Die Höhe des Vesuvs ist 1280 m. Der Kraterdurchmesser beträgt 600 m. Unten hat der Berg einen Umfang von ca. 13 km. Wie viel Erde enthält der Vesuv, wenn der spitz nach unten zulaufende Krater 200 m tief ist?

10 In dem abgebildeten Raum wird in der Deckenmitte ein Strahler angebracht, der senkrecht nach unten leuchtet. Der Strahler hat den Öffnungswinkel $\beta = 56°$.
a) Wie viel Prozent der Bodenfläche wird vom Strahler erfasst?
b) Wie viel Prozent des Raumes liegt im Lichtkegel?
c) Wie groß müsste β mindestens sein, damit der ganze Boden ausgeleuchtet werden kann?



11 Ein Kirchturmdach (Fig. 1) besteht aus einem Pyramidenstumpf mit quadratischer Grundfläche und einer aufgesetzten quadratischen Pyramide. Das Dach ist insgesamt 12 m hoch.
a) Berechne den vom Dach eingeschlossenen Rauminhalt.
b) Schlage die Formel für den Rauminhalt eines Pyramidenstumpfs mit quadratischer Grundfläche in der Formelsammlung nach. Begründe die Formel.

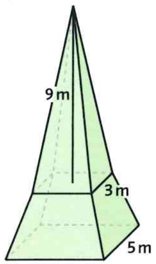


Fig. 1

5 Formeln anwenden – Kugeln und andere Körper

Welcher der fünf platonischen Körper ist der größte?

Wie viel Wasser passt in die Wasserschale in Fig. 1?
Um das herauszufinden, sucht man in einer Formelsammlung nach einer Formel für den Rauminhalt eines Körpers mit der Form der Schale. Unter den Körpern, die in der Sammlung aufgeführt sind, passt die Kugelkappe am besten (s. Fig. 2). Zu ihr sind zwei Formeln für den Rauminhalt aufgeführt.
In der ersten Formel $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ kommt der Radius r der Kugel vor. Da man den Radius der zur Schale gehörigen Kugel nicht kennt, ist diese Formel schlecht geeignet.

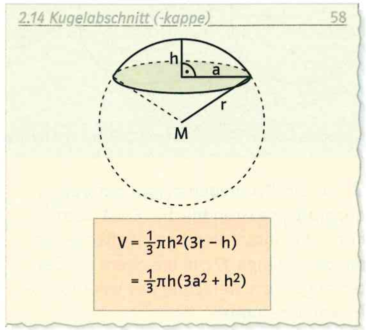


Fig. 2


Fig. 1

In der zweiten Formel kommen die Variablen a und h vor.
Dem Bild kann man entnehmen, dass h die Tiefe der Schale, a ihr Radius ist. Beide Größen kann man leicht messen, also kann man mit dieser Formel das Volumen berechnen.

Beispiel Volumen zusammengesetzter Körper
a) Fig. 3 zeigt die Grundform einer Sternwarte. Sie ist insgesamt 14 m hoch und hat den Umfang 25 m. Berechne ihren Rauminhalt.
b) Für welchen Radius hat die aufgesetzte Kuppel den Rauminhalt 718 m³?
c) Zeichne einen Graphen für den Rauminhalt des Gebäudes in Abhängigkeit vom Radius im Bereich zwischen 0 m und 5 m. Die Höhe h des Zylinders sei 10 m.
d) Für welchen Radius hat das Gebäude bei $h = 10\,m$ den Rauminhalt 600 m³?
Lösung:
Das Gebäude setzt sich aus einer Halbkugel und einem Zylinder zusammen. Den Radius erhält man aus dem Umfang. Für das Volumen V und die Oberfläche O einer Kugel mit Radius r findet man in einer Formelsammlung die Formeln $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ *und* $O = 4\pi r^2$.
a) $r = \frac{U}{2\pi} = \frac{25\,m}{2\pi} \approx 3{,}98\,m$. $h = 14\,m - r \approx 10{,}02\,m$.
Halbkugel: $V_{HK} = \frac{2}{3}\pi r^3 \approx 132\,m^3$. Zylinder: $V_Z = \pi r^2 h \approx 498\,m^3$.
Das Gebäudevolumen ist $V_Z + V_{HK} \approx 630\,m^3$.

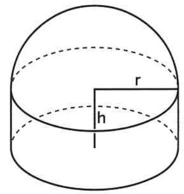


Fig. 3

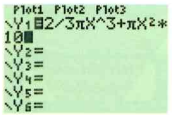


Fig. 1

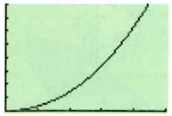


Fig. 2

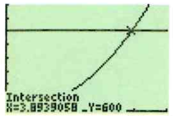


Fig. 3

b) $V_{HK} = \frac{2}{3}\pi r^3$; also $r = \left(\frac{3V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3 \cdot 718}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ m ≈ 7 m.

c) $V = V_{HK} + V_Z = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$.

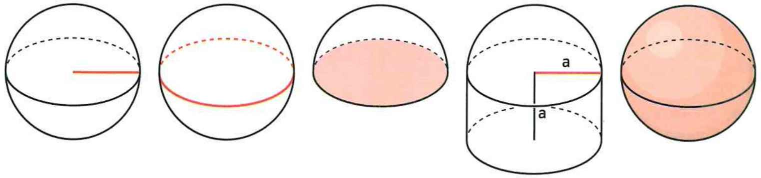
Die rechte Seite dieser Gleichung gibt man in den GTR ein (Fig. 1). Das Fenster muss richtig eingestellt werden (Fig. 2).

d) Man zeichnet zusätzlich den Graphen der konstanten Funktion f mit $f(x) = 600$. Dann berechnet man mithilfe des GTR den Schnittpunkt der beiden Graphen (Fig. 3).

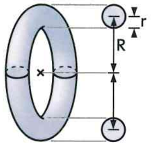
Für $r \approx 3{,}89$ m ist der Rauminhalt 600 m³.

Aufgaben

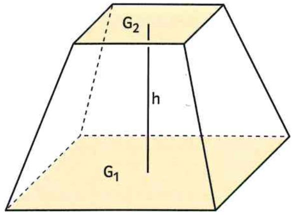
1 Suche in einer Formelsammlung eine Formel für den Rauminhalt der Kugel und berechne mit ihrer Hilfe den Rauminhalt der folgenden Körper.

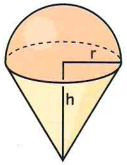


Radius 6,5 cm | Umfang 12,3 m | Kreisfläche 270 cm² | Radius 7,2 cm | Oberfläche 500 cm²



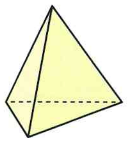
2 a) Ein Pyramidenstumpf hat eine quadratische Grundfläche. Er ist 12 cm hoch, die untere Begrenzungsfläche hat die Seitenlänge 17 cm, die obere die Seitenlänge 9 cm. Berechne das Volumen des Pyramidenstumpfs.
b) Bei einem Ring ist $R = 17$ cm und $r = 2$ cm. Berechne das Volumen und die Oberfläche des Rings.





3 a) Eine Eisdiele bietet Eis in Eistüten mit Höhe $h = 11$ cm und Radius $r = 2$ cm an. Wie viel ml Eis bekommt man, wenn sich über der ganz mit Eis gefüllten Tüte noch eine Halbkugel aus Eis befindet?
b) Zeichne einen Graphen für die Eismenge in Abhängigkeit vom Radius im Bereich zwischen 0 cm und 3 cm. Die Höhe h der Eistüte soll immer 11 cm betragen.
c) Mit welchem Radius muss man eine Eistüte mit Höhe 11 cm herstellen, wenn die Eisportion 100 ml betragen soll?

Bist du sicher?



1 Ein Tetraeder hat die Kantenlänge 5 cm. Bearbeite die Aufgabe mithilfe einer Formelsammlung.
a) Berechne den Rauminhalt des Tetraeders.
b) Berechne seine Oberfläche.
c) Berechne den Rauminhalt seiner Umkugel.
d) Wie viel Prozent des Rauminhalts des Tetraeders wird von seiner Inkugel ausgefüllt?

4 Eine kugelförmige Vase hat den Radius 10 cm. Sie kann mit Wasser gefüllt werden (siehe Fig. 1).
a) Wie viel Wasser ist in dem Gefäß, wenn die Wasserhöhe 5 cm beträgt?.
b) Zeichne einen Graphen für die Wassermenge in Abhängigkeit von der Höhe.
c) Für welche Höhe ist gerade ein Drittel des Kugelvolumens gefüllt? Schätze erst und berechne dann.
d) Das Wasser soll so in das Gefäß gefüllt werden, dass die Wasserhöhe gleichmäßig zunimmt. In welchem Bereich muss man das Wasser am schnellsten einfüllen? Woran erkennt man das am Graphen aus Teilaufgabe b?

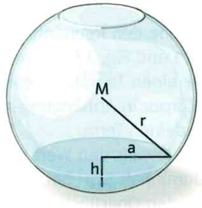
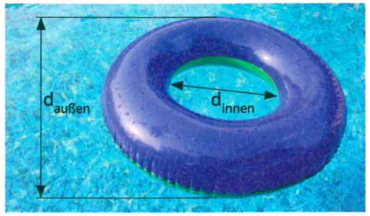


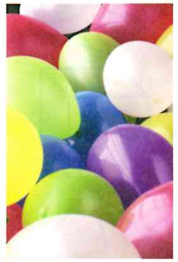
Fig. 1

5 a) Ein Schwimmring hat innen den Durchmesser 50 cm, außen 80 cm. Ein anderer Ring hat innen den Durchmesser 64 cm, außen 88 cm. Welcher der beiden Ringe hat den größeren Rauminhalt, welcher die größere Oberfläche?
b) Welchen äußeren Durchmesser hat ein Ring mit innerem Durchmesser 30 cm, der den Rauminhalt 2 Liter hat?



Für die Rechnung nimmt man an, dass es sich um einen Kreisring handelt.

6 Ein kugelförmiger Luftballon wird zu einem Luftballon mit
a) doppeltem Umfang, b) doppelter Oberfläche, c) doppeltem Rauminhalt
aufgeblasen. Wie ändert sich dabei jeweils der Radius des Ballons?



7 Gegeben ist eine Kugel mit dem Radius 10 cm.
a) Ein Kugelausschnitt (oder Kugelsektor) hat die Höhe $h = 5$ cm (siehe Fig. 2). Bestimme sein Volumen und seine Oberfläche.
b) Zeichne einen Graphen für die Oberfläche des Ausschnitts in Abhängigkeit von h. Für welche Höhe ist die Oberfläche 600 cm²?
c) Erläutere die Formeln aus der Formelsammlung für das Volumen und die Oberfläche des Kugelauschnitts unter Verwendung der Formeln für die Kugelkappe.

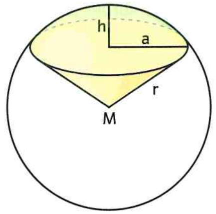


Fig. 2

8 a) Auf einen Zylinder mit Radius 3 cm und Höhe 5 cm soll die Kugelkappe einer Kugel mit Radius 4 cm passend aufgesetzt werden. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten. Zeichne jeweils den Querschnitt der beiden zusammengesetzten Körper.
b) Auf einen Zylinder der Höhe 12 cm wird eine Halbkugel passend gesetzt. Zeichne den Graphen für die Oberfläche des entstandenen Körpers in Abhängigkeit vom Radius des Zylinders.
c) Berechne mithilfe des GTR, für welchen Radius die Oberfläche des Körpers aus Teilaufgabe b 500 cm² beträgt. Berechne diesen Radius auch ohne GTR und vergleiche.

1 a) Berechne den Rauminhalt der Körper von Fig. 1 und Fig. 2 für $a = 1\,m$.
b) Stelle einen Term für den Rauminhalt der Körper in Abhängigkeit von a auf. Erkläre deinen Term.
c) Bestimme jeweils den Wert von a, für den der Rauminhalt $8\,m^3$ beträgt.
d) Berechne den Oberflächeninhalt der Körper für $a = 1\,m$.

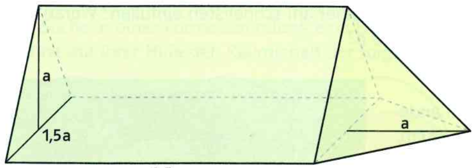


Fig. 1

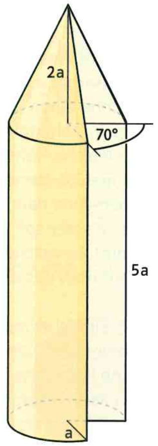


Fig. 2

2 In einer Formelsammlung findet ihr viele Informationen über die fünf regelmäßigen Körper, die so genannten platonischen Körper (Fig. 3).
a) Findet heraus, was die besonderen Eigenschaften dieser Körper sind.
b) Warum gibt es nur diese fünf Körper mit diesen Eigenschaften?
c) Wo kommen die platonischen Körper in der Natur oder in der Kunst vor?

3 Gegeben sind die fünf platonischen Körper, alle haben die gleiche Kantenlänge 1cm. Um die fünf Körper zu vergleichen, legt ihr eine Tabelle für die Werte der fünf Körper mit dem GTR oder mit einem Tabellenkalkulationsprogramm an.
a) Welcher der fünf Körper hat den größten Rauminhalt?
b) Welcher hat die größte Oberfläche?
c) Welcher Körper hat die größte Umkugel?
d) Welcher Körper hat die größte Inkugel?
e) Wie viel Prozent der Umkugel werden jeweils vom Körper ausgefüllt?
f) Wie viel Prozent des Körpers nimmt jeweils die Inkugel ein?
Stellt ähnliche Fragen und beantwortet sie mithilfe der Tabelle.

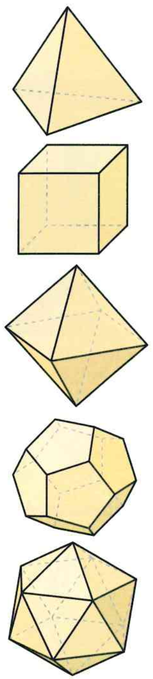


Fig. 3

4 Ein Kegel mit Radius und Höhe r wird einer Halbkugel und diese wiederum einem Zylinder einbeschrieben (siehe Fig. 4).
a) Archimedes von Syrakus (287–212 v. Chr.) entdeckte, dass die Rauminhalte von Zylinder, Halbkugel und Kegel im Verhältnis 3:2:1 stehen. Begründe diese Behauptung.
b) Wie verhalten sich die Oberflächen der drei Körper zueinander?
c) Wie verhalten sich die Rauminhalte der drei Körper in Fig. 5 zueinander?

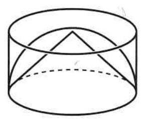


Fig. 4

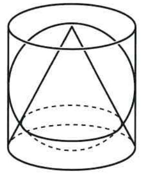


Fig. 5

5 a) Ein Basketball hat das Volumen 5,31 l. Welchen Umfang und welche Oberfläche hat er?
b) Der Ball soll genau durch einen Basketballring passen. Fig. 1 zeigt den Querschnitt durch diesen Körper. Der Ringradius r_{Ring} beträgt 1cm. Welches Volumen und welchen Oberflächeninhalt hat der Ring?
c) Welchen Radius r_{Ring} hat der Ring, wenn sein Oberflächeninhalt $100\,cm^2$ beträgt?
d) Zeichne einen Graphen für das Volumen eines Rings, der genau um den Ball passt, in Abhängigkeit vom Radius r_{Ring}. Für welchen Radius haben Ball und Ring gleiches Volumen?

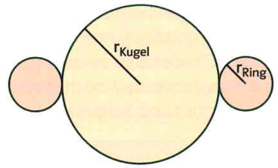


Fig. 1

6 Ein moderner 40m hoher Kirchturm hat den in Fig. 2 gezeichneten Grundriss.
a) Welches Volumen hat er?
b) Wie groß ist die Mantelfläche?

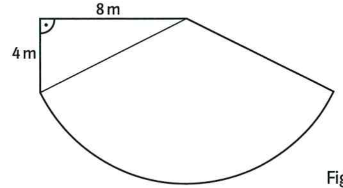


Fig. 2

Kannst du das noch?

7 Löse die Gleichung.
a) $3x - 7 = 11x + 17$
b) $(4 - 3z)\cdot 2 - 3{,}2 = 11 - 3\left(-2z - \frac{5}{3}\right)$

8 Löse das lineare Gleichungssystem. Veranschauliche die Lösung mithilfe eines Graphen.
a) $2x - 3y = 2$; $x - 4y = -4$
b) $4x + 7y = 21$; $3x - 4y = 25$
c) $x + 3(y + 1) = 2x + 8$; $3y - 8 = 5(x - 2)$
d) $3y = 2x + 3$; $y + 1 = \frac{2}{3}x$

9 Martin und Frederick kaufen Böller für Sylvester. Martin gibt für 7 Superböller und 6 Megakracher 39,97€ aus, Frederick für 5 Superböller und 8 Megakracher sogar 40,77€. Wie teuer sind die Böller jeweils?

10 Ein Quader mit quadratischer Grundfläche ist doppelt so hoch wie breit (s. Fig. 3).
a) Stelle einen Term für die Gesamtkantenlänge, die Oberfläche und den Rauminhalt des Quaders auf.
b) Zeichne einen Graphen für die Gesamtkantenlänge, die Oberfläche und den Rauminhalt in Abhängigkeit von der Seitenlänge a der Grundfläche.
c) Wie verändern sich die drei Größen bei so einem Quader, wenn a verdoppelt wird? Wie verändern sie sich, wenn a verfünffacht wird?

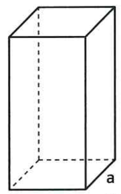
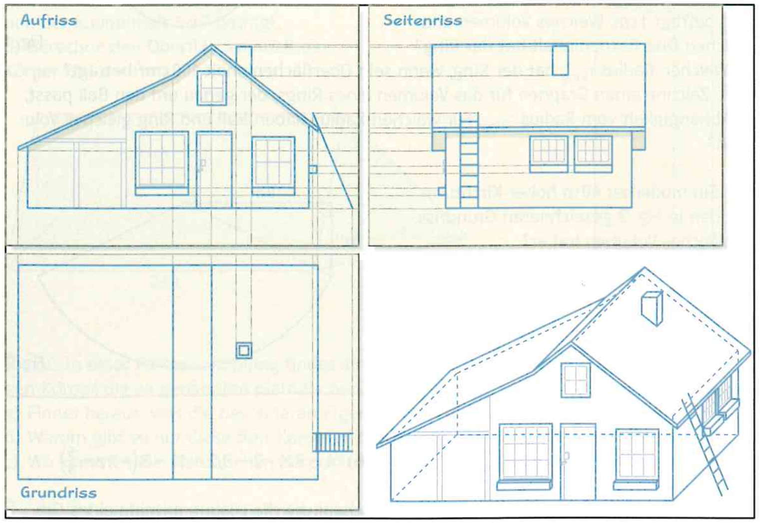


Fig. 3

11 Löse die Gleichungen.
a) $3x^2 - 4x - 4 = 0$
b) $y^2 - \frac{14}{3}y + \frac{16}{3} = 0$
c) $4(z - 2)^2 + 5z - 6 = (2z - 3)^2$

Körper darstellen

Durch ein Schrägbild erhält man zwar eine anschauliche räumliche Vorstellung des dargestellten Gegenstands, man kann aber nicht die wahren Streckenlängen oder Winkel entnehmen. Für den Bau eines Hauses oder die Herstellung eines technischen Bauteils zeichnet man daher die Ansicht von oben, von vorne und von der Seite, den so genannten Grundriss, Aufriss und Seitenriss.



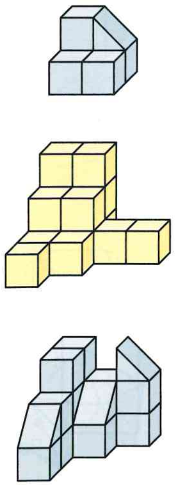


Fig. 1

1 a) Die Würfel (Fig. 1) haben die Kantenlänge 1 cm. Zeichne die Bauwerke im Grund-, Seiten- und Aufriss.
b) In Fig. 2 und in Fig. 3 ist jeweils der Grundriss, Seitenriss und der Aufriss eines Würfelbauwerks gezeichnet. Zeichne die Würfelbauwerke im Schrägbild. Gibt es mehrere Möglichkeiten für den Körper?

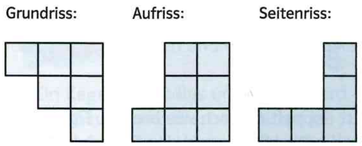


Fig. 2

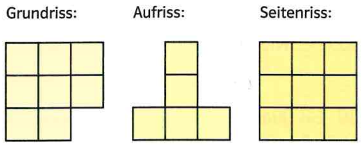


Fig. 3

c) Entwirf eigene Würfelbauwerke im Schrägbild und lasse deinen Nachbarn den Grund-, Seiten- und Aufriss zeichnen.

2 Zeichne den Grund-, Seiten- und Aufriss eines Prismas und einer Pyramide der Höhe 5 cm,
a) deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 3 cm ist,
b) deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit Seitenlänge 3 cm ist.

Körper darstellen

Wenn man Zeichnungen eines Bauteils aus verschiedenen Richtungen hat, dann kann es hilfreich sein, ein Schrägbild zu zeichnen, um eine anschauliche Vorstellung zu bekommen. Bei einem Schrägbild zeichnet man die in die Zeichenebene hinein verlaufenden Linien schräg mit dem **Verzerrungswinkel α** und verkürzt mit dem **Verzerrungsverhältnis k**.
Das Würfelschrägbild in Fig. 2 zeigt, dass $\alpha = 45°$ und $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ besonders praktisch für das Zeichnen auf Karopapier ist. Bisher haben wir meist mit diesen Werten die Schrägbilder gezeichnet. Man kann aber auch andere Werte verwenden (Fig. 1).

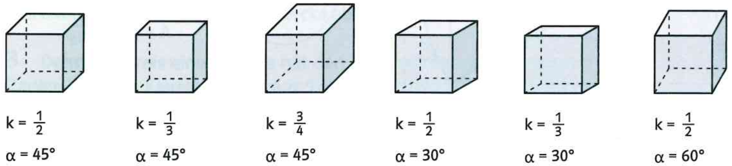


Fig. 1

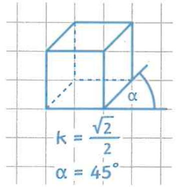


Fig. 2

3 a) Die Zeichnungen (Fig. 3) zeigen den Grund- und Aufriss von Gebäuden. Zeichne jeweils ein dazu passendes Bauwerk im Schrägbild. Wähle dazu α und k.
b) Entwirf eigene Gebäude, zeichne dazu den Grund- und Aufriss und lasse einen Partner ein Schrägbild dazu zeichnen.

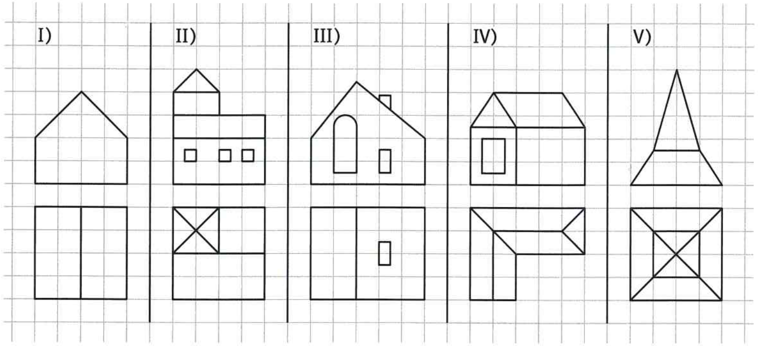
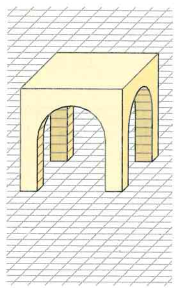
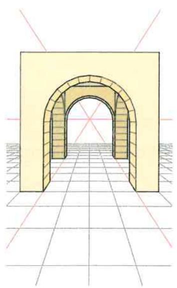


Fig. 3

Einen ganz anderen Eindruck erhält man, wenn man die Linien nach hinten nicht parallel zeichnet. In der **Zentralperspektive** laufen alle Linien nach hinten auf einen Punkt am Horizont zu, den Fluchtpunkt.

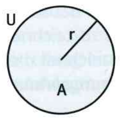




4 Erkundige dich nach den verschiedenen Möglichkeiten für perspektivische Zeichnungen und finde berühmte Kunstwerke dazu.
Zeichne einen Körper. Benutze verschiedene perspektivische Darstellungen.

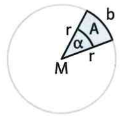
Rückblick

Kreise
Aus dem Umfang bzw. dem Flächeninhalt eines Kreises kann man den Radius berechnen.
$U = 2\pi r$: $r = \frac{U}{2\pi}$ und $A = \pi r^2$: $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$



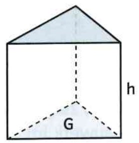
$A = 70\,cm^2$
$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{70}{\pi}}\,cm$
$\approx 4{,}72\,cm$

Kreisausschnitt
Bei einem Kreisausschnitt kann man mithilfe des Mittelpunktswinkels α die Bogenlänge b und den Flächeninhalt A des Kreisausschnitts berechnen.
$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$; $A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$



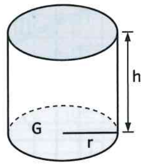
$r = 6{,}5\,cm$, $\alpha = 125°$
$b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$
$\approx 14{,}18\,cm$
$A = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$
$\approx 46{,}09\,cm^2$

Prisma
Den Rauminhalt eines Prismas berechnet man mit der Formel „Grundfläche mal Höhe".
$V = G \cdot h$
Die Oberfläche besteht aus dem Mantel und den Grundflächen.
$O = 2G + M = 2G + U \cdot h$



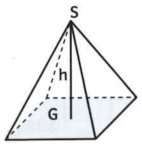
Grundfläche: Gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge
$a = 4\,cm$
Höhe: $h = 11\,cm$
$G = 16\sqrt{3}\,cm^2$
$V = G \cdot h$
$= 176\sqrt{3}\,cm^3$

Zylinder
Den Rauminhalt eines Zylinders berechnet man mit der Formel „Grundfläche mal Höhe".
$V = G \cdot h = \pi r^2 h$
Die Oberfläche besteht aus dem Mantel und zwei Kreisflächen als Grundflächen.
$O = 2G + M = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$



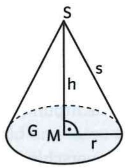
$r = 4{,}5\,cm$,
$h = 8{,}2\,cm$
$V = \pi r^2 \cdot h$
$\approx 522\,cm^3$
$O = 2\pi r(r + h)$
$\approx 359\,cm^2$

Pyramide
Die Pyramide nimmt ein Drittel des Rauminhalts des sie umgebenden Prismas ein.
$V = \frac{1}{3} G \cdot h$
Ihre Oberfläche besteht aus Dreiecken und der Grundfläche.



Grundfläche: Quadrat mit Seitenlänge $a = 5\,cm$
Höhe: $h = 15\,cm$
$V = \frac{1}{3} G \cdot h = 125\,cm^3$

Kegel
Der Kegel nimmt ein Drittel des Rauminhalts des ihn umgebenden Zylinders ein.
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$
Der Kegelmantel ist ein Kreisausschnitt mit Radius $s = \sqrt{h^2 + r^2}$.
Dieser Kreisausschnitt hat die Bogenlänge $2\pi r$.



$r = 4{,}5\,cm$,
$h = 8{,}2\,cm$
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$
$\approx 174\,cm^3$
$M = \pi s^2 \cdot \frac{r}{s} \approx$
$132\,cm^2$

Formelsammlung
Formeln zu diesen und vielen anderen Körpern kann man in einer Formelsammlung nachschlagen.

Training

Runde 1

1 a) Der Weg um eine kreisrunde Insel ist 15 km lang. Welchen Durchmesser und welchen Flächeninhalt hat die Insel?
b) Ein kreisrunder Krater hat den Flächeninhalt 3000 km². Welchen Umfang hat er?

2 a) Berechne den Flächeninhalt und den Umfang der in Fig. 1 gelb dargestellten Fläche. Um wie viel Prozent weichen diese Werte jeweils von den entsprechenden Werten des rot umrandeten Rechtecks ab?

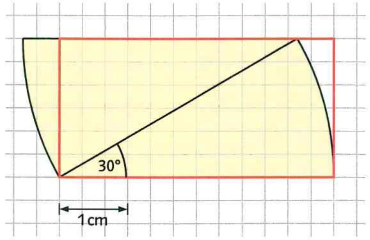


Fig. 1

3 Der Grundkreis eines Kegels hat den Radius 7 cm. Die Kegelhöhe beträgt 9 cm.
a) Berechne den Rauminhalt des Kegels.
b) Berechne die Mantelfläche des Kegels.

4 a) Die massive, eiserne Walze einer Straßenwalze ist 1,8 m lang und wiegt 9 t. Welchen Durchmesser hat die Walze, wenn 1 cm³ Eisen 7,86 g wiegt?
b) Wie viele Umdrehungen macht die Walze aus a auf einer Strecke von 130 m?

5 Das auf dem Foto dargestellte Hochhaus in San Francisco hat eine quadratische Grundfläche mit Seitenlänge 44,2 m und ist 260 m hoch.
a) Welchen Rauminhalt nimmt das Haus ein?
b) Wie viel Quadratmeter Glas wurden verbaut, wenn 40 % der Außenfläche aus Fensterfläche besteht?

Runde 2

1 Ein Pizzabäcker bietet Pizzen mit Durchmesser zwischen 25 und 50 cm an. Von einer Pizzagröße zur nächsten nimmt dabei der Durchmesser jeweils um 5 cm zu.
a) Um wie viel nimmt der Umfang der Pizzen von Größe zu Größe zu?
b) Die kleinste Pizza kostet 4,50 €. Wie teuer sollten die anderen Pizzengrößen sein, wenn die Preise fair sind?
c) Anna schneidet sich aus einer Pizza mit Durchmesser 35 cm ein Stück mit Mittelpunktswinkel 32° heraus. Wie groß ist der Flächeninhalt dieses Pizzastücks?

2 Die Grundfläche eines Kegels hat den Flächeninhalt 20 cm². Die Kegelhöhe ist 5,6 cm.
a) Berechne den Rauminhalt des Kegels. b) Berechne die Oberfläche des Kegels.

3 Bei dem in Fig. 2 abgebildeten „Turm von Hanoi" nimmt der Durchmesser der 2 cm hohen Scheiben von unten nach oben immer um 1 cm ab.
a) Welchen Rauminhalt hat der Turm für $a = 2\,cm$?
b) Stelle einen Term für den Rauminhalt in Abhängigkeit von a auf. Zeichne den Graphen für $0 \leq a \leq 10\,cm$. Für welchen Wert von a hat der Turm das Volumen 500 cm³?

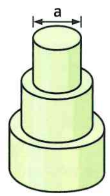


Fig. 2

4 In Fig. 3 ist ein Donut im Querschnitt gezeichnet. Er hat den großen Radius $R = 6\,cm$, den kleinen Radius $r = 2{,}5\,cm$. Wie viel Gramm Teig braucht man für den Donut, wenn 1 cm³ Teig 0,8 g wiegt?

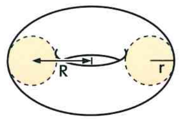
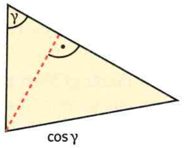
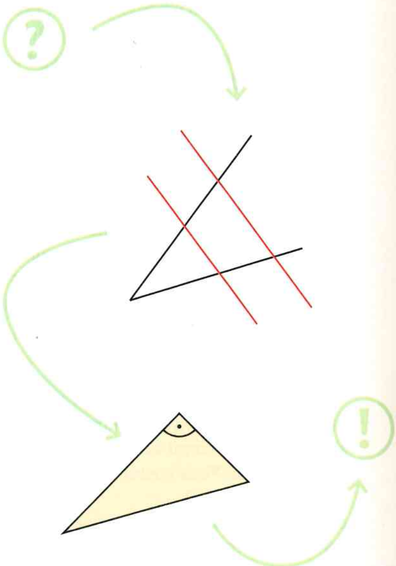


Fig. 3

Das kannst du schon

- Geometrische Sätze anwenden, um Strecken und Winkel zu berechnen
- Formeln anwenden, um von vielen Körpern Oberfläche und Rauminhalt zu berechnen





Zahl und Maß

Daten und Zufall

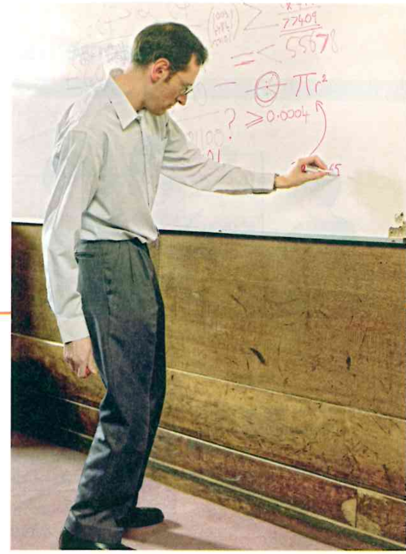
Beziehung und Änderung

Modell und Simulation

Muster und Struktur

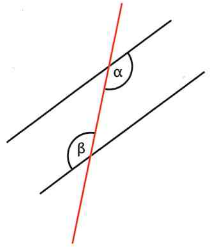
Form und Raum

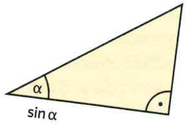
Handwerk hat goldenen Boden!

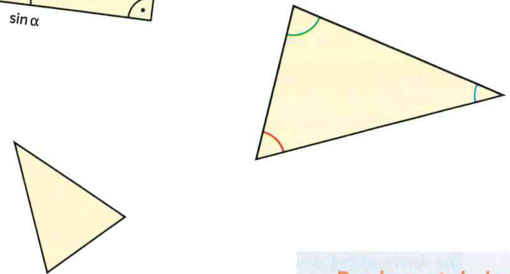


Die Mathematiker sind eine Art Franzosen, redet man mit ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und alsbald ist es etwas ganz anderes.

Johann Wolfgang von Goethe



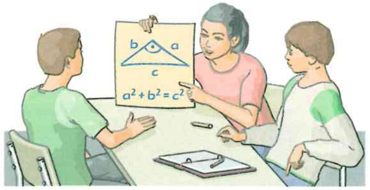


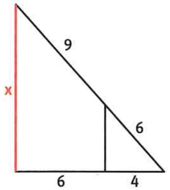


Das kannst du bald

- Auch bei komplizierteren Aufgaben einen Lösungsweg systematisch planen
- Bei solchen Aufgaben verschiedene Strategien anwenden
- Bei verschiedenen Größen größt- und kleinstmögliche Werte berechnen

1 Geometrische Sätze als Werkzeuge





Jonas: „Klarer Fall! Hier hilft nur ein Strahlensatz weiter!“
Senay: „Sei nicht so voreilig! Ich sehe hier andere Lösungsmöglichkeiten.“

Die Werkzeugkiste eines Heimwerkers enthält viele Werkzeuge. Jedes dient einem ganz bestimmten Zweck, kann aber nur in bestimmten Situationen angewendet werden. Mit dem Schraubendreher in Fig. 1 kann man eine Schraubverbindung lösen, aber nur dann, wenn es sich um eine Kreuzschlitzschraube handelt.

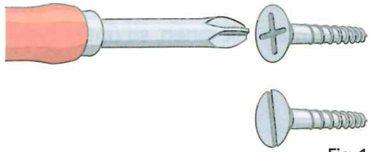


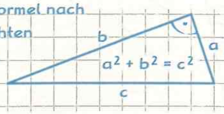
Fig. 1

Auf entsprechende Weise kann man geometrische Sätze und Formeln verwenden. Der Satz des Pythagoras ermöglicht, die bisher unbekannte Länge einer Strecke zu berechnen. Er ist aber nur dann anwendbar, wenn diese Strecke die Seite eines rechtwinkligen Dreiecks ist, von dem man zwei Seitenlängen bereits kennt. Das Werkzeug „Satz des Pythagoras“ lässt sich übersichtlich als „Werkzeugkarte“ darstellen.

Satz des Pythagoras

Zweck:
Seitenlängen berechnen
Anwendungsbedingungen:
rechtwinkliges Dreieck, 2 Seiten bekannt

Vorgehen:
Löse die Formel nach der gesuchten Länge auf.

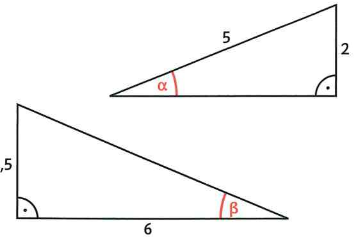


Die Anwendung des Satzes des Pythagoras lohnt sich immer dann zu prüfen, wenn eine Streckenlänge gesucht ist (Zweck) oder wenn ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei bekannten Seiten vorliegt (Anwendungsbedingung).

Mathematische Sätze und Formeln kann man wie ein **Werkzeug** verwenden.
Ein geeignetes Werkzeug kann man auswählen
- nach der gesuchten Größe oder
- nach den gegebenen Bedingungen.

Ein gut bestückter Geometrie-Werkzeugkasten sollte mindestens die folgenden Werkzeuge enthalten:
Satz des Pythagoras; zwei Strahlensätze; Sinus, Kosinus, Tangens; Formeln zu Flächeninhalten und Rauminhalten; Sätze über das gleichschenklige Dreieck; Sätze über Scheitel-, Neben-, Wechsel- und Stufenwinkel; Satz über die Winkelsumme im Dreieck; Satz des Thales.

Beispiel Werkzeugkarten
Welcher Winkel ist größer: α oder β?
Suche geeignete Werkzeuge und erstelle die Werkzeugkarten.
Lösung:
Es liegen rechtwinklige Dreiecke vor. Als Werkzeuge kommen daher der Satz des Pythagoras, Sinus, Kosinus oder Tangens in Betracht. Da aber Winkelweiten gesucht sind, scheidet der Satz des Pythagoras aus.

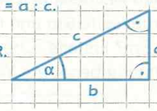


Werkzeugkarte für **Sinus** (zur Berechnung eines Winkels):

Sinus (zur Berechnung eines Winkels)

Zweck:
Winkel berechnen
Anwendungsbedingungen:
rechtwinkliges Dreieck, Hypotenuse und dem rechten Winkel gegenüberliegende Kathete bekannt

Vorgehen:
- Berechne $\sin(\alpha) = a : c$.
- Bestimme α mithilfe des GTR.



*Eine weitere Werkzeugkarte **Sinus** benötigt man zur Berechnung von Seitenlängen.*

*Entsprechend erhält man die Werkzeugkarte **Tangens** (zur Berechnung eines Winkels).*
1. Dreieck: Es ist $\sin(\alpha) = 2 : 5 = 0{,}4$, also $\alpha \approx 23{,}6°$.
2. Dreieck: Es ist $\tan(\beta) = 2{,}5 : 6$, also $\beta \approx 22{,}6°$.
Der Winkel α ist somit etwas größer als der Winkel β.

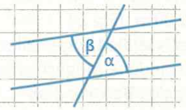
Aufgaben

1 a) Ergänze die Werkzeugkarte.

Zweck:

Anwendungsbedingungen:
2 parallele Geraden, …

Vorgehen:



Tipp: Schaue auf Seite 174, welche Werkzeuge der Geometriekasten enthalten sollte.

b) Welche der Winkel α, β und γ in Fig. 1 kann man mithilfe des Werkzeugs in Teilaufgabe a bestimmen? Gib ihre Winkelweiten an.

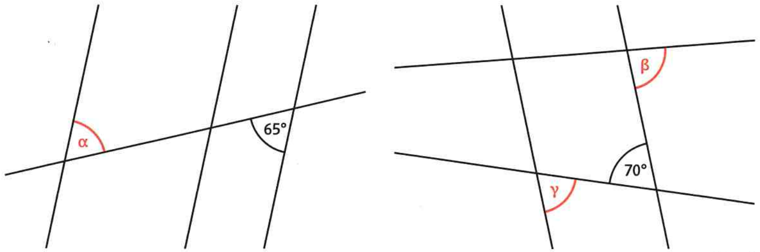


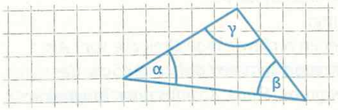
Fig. 1

2 Ergänze die Werkzeugkarte. Löse damit einige selbst formulierte Aufgaben.

Zweck:
Winkel berechnen

Anwendungsbedingungen:
Dreieck, ...
... bekannt

Vorgehen:



3 a) Erstelle je eine Werkzeugkarte für die beiden Strahlensätze.
b) Berechne in Fig. 1 die Längen x und y.

4 Welchen Flächeninhalt hat ein Dreieck mit der Grundseite 6 m und der zugehörigen Höhe 5 m? Erstelle zunächst eine für die Berechnung benötigte Werkzeugkarte.

5 Mithilfe der Beziehung $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$ kann man auch Streckenlängen berechnen. Welche Anwendungsbedingungen müssen dabei vorliegen? Erstelle eine Werkzeugkarte.

6 Welche Größen lassen sich in Fig. 2 direkt berechnen? Gib jeweils das verwendete Werkzeug an.

7 Bei der Vermessung des Giebels eines Fachwerkhauses erhielt man folgende Ergebnisse: $\alpha = \beta = 41{,}0°$, $s = 6{,}00\,m$ und $u = 2{,}00\,m$ (Fig. 3).
Berechne die Längen aller Balken. Gib verschiedene Möglichkeiten für die Berechnung des Balkens a an.

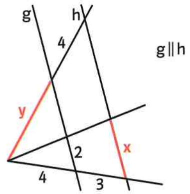


Fig. 1

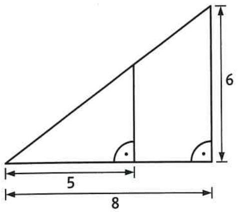


Fig. 2

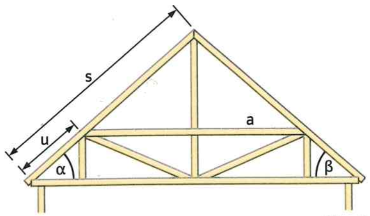


Fig. 3

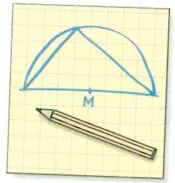
8 Mit welchen Werkzeugen kann man
a) Winkelweiten berechnen,
b) Streckenlängen berechnen,
c) nachweisen, dass zwei Strecken orthogonal sind,
d) nachweisen, dass zwei Geraden parallel sind?
Gib jeweils die Anwendungsbedingungen an.

9 Ein zylinderförmiges Gefäß mit dem Volumen 3 Liter ist 30 cm hoch.
a) Welche weiteren Größen lassen sich aus diesen Angaben berechnen?
b) Beschreibe die verwendeten Werkzeuge.

10 Ein Quader mit dem Volumen 3 Liter ist 30 cm hoch. Welche weiteren Informationen über den Quader lassen sich aus diesen Angaben gewinnen?

2 Verwendung von Hilfslinien und Variablen

Johanna versucht sich an den Beweis für den Satz des Thales zu erinnern: „Irgendwie spielten gleichschenklige Dreiecke eine Rolle, aber ich sehe in meiner Skizze gar keine!?“



Liefert ein Werkzeug zwar prinzipiell das gewünschte Ergebnis, aber ohne dass seine Anwendungsbedingung erfüllt ist, kann die vom Beweisen her bekannte Strategie **„Hilfslinien einzeichnen“** oder die Strategie **„Variablen einführen“** weiterhelfen, wie das folgende Problem zeigt.

Von einem Kreisabschnitt mit der Sehne 4 cm und der Höhe 1 cm (Fig. 1) soll der Radius des zugehörigen Kreises berechnet werden. Die gegebene Figur lässt sich so ergänzen, dass ein rechtwinkliges Dreieck MBC entsteht (Fig. 2). Der Satz des Pythagoras lässt sich aber nicht direkt anwenden, da nur die Seite $\overline{CB}$ des Dreiecks bekannt ist. Führt man als Variable den Radius r (in cm) des Kreises ein, so kann man damit die beiden anderen Seiten ausdrücken: $\overline{MB} = r$ und $\overline{MC} = r - 1$. Der Satz des Pythagoras liefert nun eine Gleichung für r: $r^2 = (r - 1)^2 + 2^2 = r^2 - 2 \cdot r \cdot 1 + 1 + 4$. Daraus folgt: $2 \cdot r = 5$, $r = 2{,}5$. Der Kreis hat also den Radius 2,5 cm.

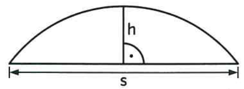


Fig. 1

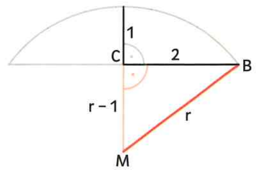


Fig. 2

Wenn die Anwendungsbedingung eines in Frage kommenden Werkzeugs nicht erfüllt ist, so kann man versuchen, auf folgende Weisen weiter zu kommen.
- Man zeichnet eine oder mehrere Hilfslinien in die gegebene Figur, sodass die Anwendungsbedingung erfüllt ist.
- Man stellt mithilfe des Werkzeugs eine Gleichung auf, in der die Variable für die gesuchte Größe mehrfach vorkommt.

Beispiel 1 Hilfslinie einzeichnen
In einen Kreis mit Radius 5 cm ist eine 8 cm lange Sehne eingezeichnet (Fig. 3).
Berechne den Abstand des Kreismittelpunktes von dieser Sehne.
Lösung:
Skizze: Siehe Fig. 4.
Zeichnet man als Hilfslinie die Strecke zwischen dem Kreismittelpunkt und einem Endpunkt der Sehne, so erhält man ein rechtwinkliges Dreieck.
Satz des Pythagoras: $5^2 = d^2 + 4^2$
$d = \sqrt{25 - 16} = 3$. Abstand: 3 cm.

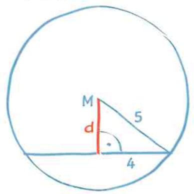


Fig. 4

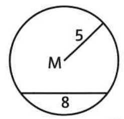


Fig. 3

Beispiel 2 Gleichung verwenden
In ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 7 cm und 3 cm ist ein Quadrat einbeschrieben (Fig. 1). Wie lang ist die Seite dieses Quadrats?

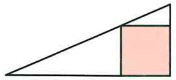


Fig. 1

Lösung:
Skizze: Siehe Fig. 2
Zwei von einem Punkt ausgehende Strahlen und zwei parallele Strecken legen die Verwendung des 2. Strahlensatzes nahe.
Seitenlänge des Quadrats: x (in cm)
2. Strahlensatz: $\frac{x}{3} = \frac{7-x}{7}$ und damit
$7x = 21 - 3 \cdot x$ bzw. $10 \cdot x = 21$
Das Quadrat hat also die Seitenlänge 2,1 cm.

Kannst du das Quadrat auch konstruieren?

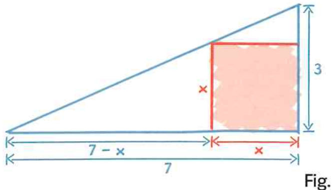


Fig. 2

Aufgaben

1 In einem Koordinatensystem ist ein Kreis mit Mittelpunkt M(0|0) und Radius 3 eingezeichnet. Berechne die y-Koordinaten des Kreispunkts mit der x-Koordinate 2.

2 In einem Koordinatensystem ist ein Kreis mit Mittelpunkt M(−1|−2) eingezeichnet, der durch den Punkt P(2|2) geht.
a) Welchen Radius hat der Kreis?
b) Wie groß ist die x-Koordinate eines Punktes des Kreises mit der y-Koordinate −6?

3 In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse 10 cm lang. Berechne die Länge der beiden Katheten, wenn
a) eine Kathete doppelt so lang ist wie die andere,
b) eine Kathete um 4 cm länger ist als die andere.

4 Berechne den Winkel α in Fig. 3.

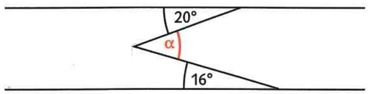


Fig. 3

5 Für eine Modelleisenbahn soll eine Rampe gebaut werden, die in den Punkten B und C (Fig. 4) durch zwei Stäbe gestützt wird. Dafür muss ein 8 cm langer Stab geteilt werden.
a) Wie lang sind die beiden Teilstäbe?
b) Welchen Steigungswinkel hat die Rampe?
c) Wie lang ist die Rampe?

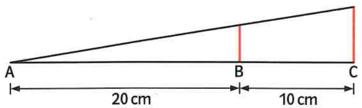


Fig. 4

6 In Fig. 5 ist der Radius des Kreises mit dem Mittelpunkt M_3 gesucht.
a) Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ein, bei dem eine Seite bekannt ist und die beiden anderen Seiten sich mithilfe des gesuchten Radius ausdrücken lassen.
b) Berechne den Radius.
c) Berechne den Inhalt der gefärbten Fläche.

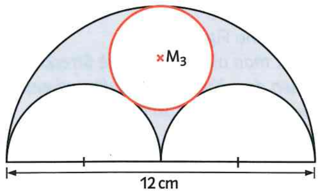
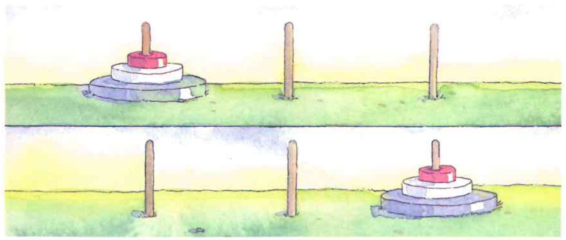


Fig. 5

3 Vorwärtsarbeiten

Beim Spiel „Türme von Hanoi" sollen die Scheiben vom linken Pflock auf den rechten Pflock nach folgenden Spielregeln übertragen werden.
– Der mittlere Pflock darf verwendet werden.
– Es dürfen immer nur einzelne Scheiben bewegt werden.
– Es darf nie eine größere auf einer kleineren Scheibe liegen.



Gelingt es, für eine Aufgabenstellung ein Werkzeug zu finden, das auf die Situation passt und unmittelbar zum Ziel führt, so lässt sich die Aufgabe schnell lösen.
Häufig sieht man sofort, welches Werkzeug zur Situation passt, aber das Werkzeug liefert nicht die Lösung der Aufgabenstellung. In diesem Fall kann es dennoch sinnvoll sein, das ins Auge gefasste Werkzeug anzuwenden. Anschließend prüft man, ob die neu gewonnene Information die Anwendung eines weiteren Werkzeugs erlaubt, das dann zum gewünschten Ziel führt.

Bei vielen Aufgaben muss man mehrere Schritte bis zum Endergebnis durchführen.

Strategie „Vorwärtsarbeiten"
– Wende ein Werkzeug an, das auf die Situation passt.
– Versuche mithilfe der neu gewonnenen Information die Aufgabe zu lösen.
Möglicherweise muss man dieses Verfahren mehrfach nacheinander anwenden.

Beim Vorwärtsarbeiten muss man manchmal verschiedene Wege ausprobieren und auch Irrwege in Kauf nehmen.

Beispiel
Die Diagonalen eines Drachens sind 8 cm und 11 cm lang. Berechne die Länge einer Seite, wenn die andere Seite 5 cm lang ist.
Lösung:
Skizze: Siehe Fig. 1.
Wegen der Achsensymmetrie des Drachens halbiert der Punkt E die Strecke $\overline{BD}$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt im Dreieck BCE:
$5^2 = \overline{EC}^2 + 4^2$, also $\overline{EC} = 3$.
Es ist $\overline{AE} = 11 - \overline{EC} = 8$.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt im Dreieck ABE:
$x^2 = 4^2 + 8^2 = 80$, also $x \approx 8{,}9$.
Die zweite Seite ist ca. 8,9 cm lang.

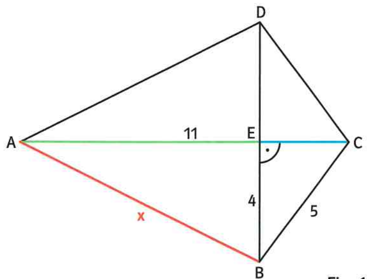


Fig. 1

Aufgaben

1 In dem rechtwinkligen Dreieck ABC in Fig. 1 ist $\overline{DC} = 3{,}2\,cm$ und $\overline{CE} = 2{,}0\,cm$. Berechne möglichst viele weitere Größen des Dreiecks.

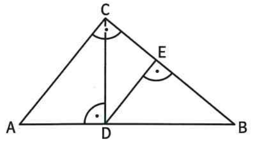


Fig. 1

2 a) Berechne den Flächeninhalt des Vierecks in Fig. 2.
b) Wie groß ist der Winkel α?

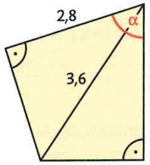


Fig. 2

3 In dem Fünfeck ABCDE (Fig. 3) bilden die Punkte A, B, D und E ein Quadrat mit Seitenlänge 5 cm und die Punkte BCD ein gleichseitiges Dreieck mit $\overline{BC} = \overline{CD} = 5\,cm$. Berechne den Abstand der Punkte A und C sowie den Abstand des Punktes B von der Strecke AC.

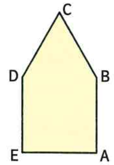


Fig. 3

4 Die Konstruktion in Fig. 4 soll einen Näherungswert p für die Kreiszahl π liefern. Sie beginnt mit dem Zeichnen eines Quadrats mit der Seitenlänge 1.
a) Wie groß ist der Näherungswert p?
b) Um wie viel Prozent weicht er von π ab?

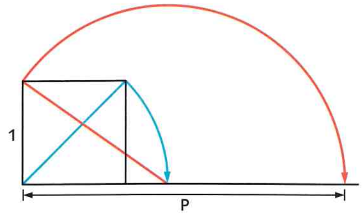


Fig. 4

5 Ein Glasgefäß von der Form einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mit Grundkante und Höhe a wird, wenn die Spitze unten ist, bis zur Höhe $\frac{2}{3}a$ mit Wasser gefüllt und dann mit abgedeckter Grundfläche umgedreht (Fig. 5).
Wie hoch steht das Wasser dann in dem Glasgefäß?

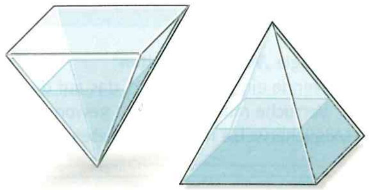


Fig. 5

6 Von einem Dreieck ABC sind die beiden Winkel $\alpha = 40°$ und $\beta = 30°$ sowie die Seite $a = 5\,cm$ bekannt. Die Seite b soll berechnet werden.
a) Welche Werkzeuge kommen für die Berechnung der Seite b prinzipiell in Frage? Untersuche, ob ihre Anwendungsbedingungen erfüllt sind.
b) Durch das Einzeichnen einer passenden Hilfslinie wird das Werkzeug „Sinus“ einsetzbar. Zeichne diese Hilfslinie ein und berechne ihre Länge.
c) Welches Werkzeug liefert nun die Seite b? Berechne b.
d) Berechne den Winkel γ. Wie kann man nun die Seite c berechnen?

Tipp für d):
Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten.

Beweisideen liefert Aufgabe 6.

7 Für jedes Dreieck gilt der sogenannte **Sinussatz**:
(1) $\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$ (2) $\frac{b}{c} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$ (3) $\frac{a}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)}$.
a) Beweise die Beziehung (1) für ein Dreieck, bei dem α und β kleiner als 90° sind.
b) In einem Dreieck ist $b = 5{,}8\,cm$; $c = 7{,}1\,cm$ und $\gamma = 80°$. Berechne a; α und β.

4 Rückwärtsarbeiten

Anja macht mit dem Geld, das sie zum Geburtstag bekommen hat, einen Einkaufsbummel. Zunächst kauft sie für ein Drittel ihres Geldes ein T-Shirt. Anschließend gibt sie 10 € für ein Buch aus und halbiert dann ihr Restguthaben durch den Kauf von neuen Inliner-Rollen. Nachdem sie sich einen Eisbecher für 5 € geleistet hat, hat sie noch 20 € übrig.

Schwierigere Aufgaben kann man auch dadurch anpacken, dass man nicht an der Ausgangssituation, sondern am Ziel beginnt. Soll in Fig. 1 der Rauminhalt der quadratischen Pyramide mit der Seitenkante a und der Höhe h_1 der Seitenfläche berechnet werden, so liegt das Werkzeug „Volumenformel $V = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$“ nahe. Seine Anwendungsbedingung ist aber nicht erfüllt, da die Höhe der Pyramide nicht gegeben ist. Als Zwischenziel setzt man sich daher, diese Anwendungsbedingung herzustellen. Zeichnet man zwei Hilfslinien ein (Fig. 2), so sieht man, dass die Anwendungsbedingung des Satzes von Pythagoras erfüllt ist. Bei der Berechnung des Volumens muss man natürlich bei der Ausgangssituation beginnen (Fig. 3).

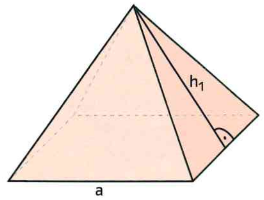


Fig. 1

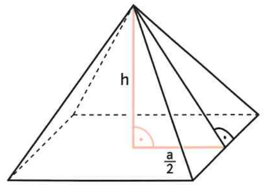


Fig. 2

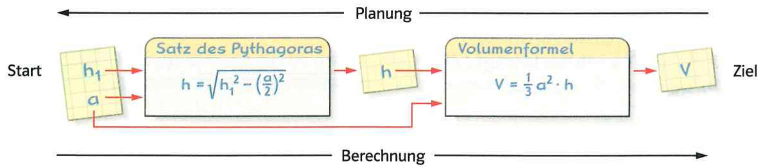


Fig. 3

Strategie „Rückwärtsarbeiten“
- Wähle zunächst ein Werkzeug, das die gesuchte Größe liefert, auch wenn seine Anwendungsbedingung nicht erfüllt ist.
- Versuche dann ein weiteres Werkzeug anzuwenden, das diese Anwendungsbedingung liefert.

Möglicherweise muss man dieses Verfahren mehrfach nacheinander anwenden.

Es kann auch sinnvoll sein, die beiden Strategien „Rückwärtsarbeiten“ und „Vorwärtsarbeiten“ zu kombinieren.

Beispiel

Berechne die Länge der Strecke $\overline{AD}$ für $\overline{AB} = 4\,cm$, $\overline{AC} = 6\,cm$ und $\overline{BE} = 2\,cm$. (Fig. 1). Plane zunächst den Lösungsweg mithilfe der Strategie des Rückwärtsarbeitens.

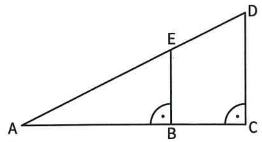
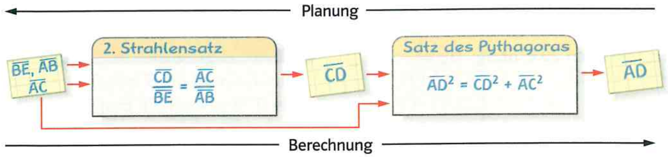


Fig. 1

Lösung:

$\overline{AD}$ lässt sich mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnen. Dazu benötigt man die noch nicht bekannte Streckenlänge $\overline{CD}$. Diese erhält man durch den 2. Strahlensatz.

Es gibt noch weitere Lösungswege. AD lässt sich z.B. auch mithilfe von „Sinus" berechnen.



2\. Strahlensatz: Aus $\frac{\overline{CD}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ folgt $\overline{CD} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \overline{BE} = \frac{6}{4} \cdot 2\,cm = 3\,cm$.

Satz des Pythagoras: Aus $\overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AC}^2$ folgt $\overline{AD} = \sqrt{9 + 36}\,cm \approx 6{,}7\,cm$.

Aufgaben

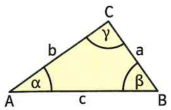


Fig. 2

1 Berechne den Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ABC mit $\gamma = 90°$.

a) $a = 4{,}5\,cm$, $c = 6{,}0\,cm$
b) $a = 6{,}0\,cm$, $\beta = 28°$
c) $b = 4{,}0\,cm$, $\alpha = 45°$
d) $h_c = 3{,}8\,cm$, $b = 4{,}6\,cm$

2 Bei einem Oktaeder (Fig. 3) haben alle zwölf Kanten die Länge a. Welchen Abstand haben gegenüberliegende Ecken?

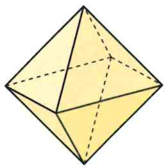


Fig. 3

3 Um die Höhe eines Turms zu bestimmen, hat man eine 65,00 m lange Standlinie abgesteckt, die auf den Turm zuläuft. In ihren Endpunkten sieht man die Turmspitze unter den Erhebungswinkeln 49,5° und 27,0°. Die Augenhöhe beträgt 1,60 m (Fig. 4). Berechne die Höhe des Turms.

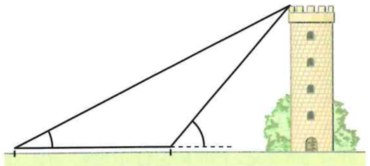


Fig. 4

4 Ein Turmdach hat die Form eines Kegels mit Grundkreisdurchmesser und Höhe 10 m. Auf seiner Spitze befindet sich eine 4 m hohe vertikale Fahnenstange (Fig. 5).
a) Welchen Winkel α bilden die Sonnenstrahlen mit der Horizontalen, wenn der Schatten der Fahnenstange genau bis zum Ende des Daches reicht?
b) Wie lang ist der Schatten der Fahnenstange auf dem Dach, wenn die Sonnenstrahlen unter dem Winkel $\beta = 80°$ gegen die Horizontale einfallen?

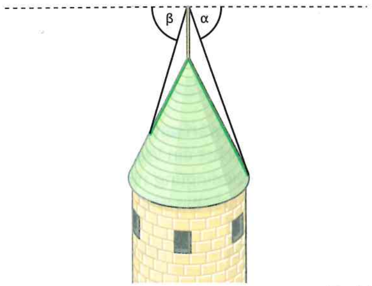


Fig. 5

5 Die blaue Figur nennt man ein „Kreiszweieck", die rote ein „Kreisdreieck".
a) Bestimme den Flächeninhalt des Kreiszweiecks.
b) Zeige, dass das Kreisdreieck den gleichen Flächeninhalt wie das Kreiszweieck hat.

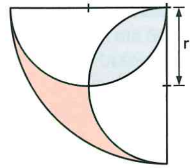
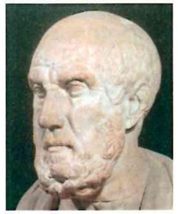


Fig. 1



Hippokrates: griechischer Mathematiker (um 440 v. Chr.)

6 a) Zeige, dass in Fig. 2 die beiden „Möndchen des Hippokrates" zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Dreieck haben.
b) Untersuche, ob die vier „Möndchen" in Fig. 3 den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat haben.

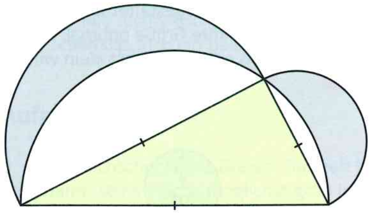


Fig. 2

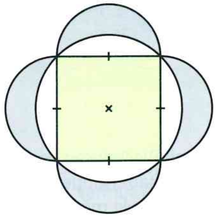


Fig. 3

7 Aus einem Schulbuch aus dem Jahr 1896:

39. In der Praxis wird oft der Inhalt eines Kegelstumpfes berechnet, indem er als ein Zylinder von gleicher Höhe angesehen wird, dessen Grundflächenhalbmesser das arithmetische Mittel aus den beiden Radien des Kegelstumpfes ist. Wieviel beträgt der hierbei gemachte Fehler für $\mathfrak{R} = 30$, $\mathfrak{r} = 20$, $\mathfrak{h} = 50\,cm$?

Damals war eine Formelsammlung nicht erlaubt.

8 Um Berechnungen an Dreiecken, die nicht rechtwinklig sind, durchführen zu können, zerlegt man das Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke und wendet darauf den Satz des Pythagoras an (Vergleiche auch S. 180, Aufgabe 6 und 7).
a) Gegeben sind die Seiten a und b sowie der Winkel γ eines Dreiecks mit $\gamma < 90°$. Berechne die Seite c.
b) In einer Formelsammlung findet man den **Kosinussatz**: In einem Dreieck ABC gilt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$. Vergleiche mit deinem Ergebnis aus a).
c) Berechne nun c aus $a = 4{,}2\,cm$, $b = 5{,}5\,cm$ und $\gamma = 70°$.
d) Wie lautet der Kosinussatz, wenn die Seiten a und c sowie der Winkel β ($\beta < 90°$) gegeben sind?

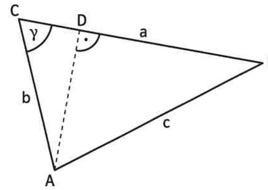


Fig. 4

Was wird aus dem Kosinussatz für $\gamma = 90°$?

9 Den Flächeninhalt des Dreiecks in Fig. 5 kann man bei gegebenem α auf zwei verschiedene Weisen berechnen. Leite damit die Beziehung $\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$ her.

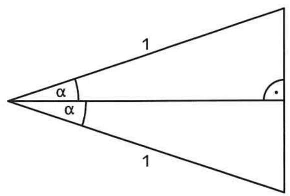


Fig. 5

5 Optimierung

Mithilfe von Sätzen und Formeln aus der Geometrie können Größen wie Streckenlängen, Winkelweiten, Flächen- und Rauminhalte bestimmt werden. Es gibt aber auch Probleme, bei denen nicht nur der Wert einer Größe gesucht ist, sondern die Situation so gestaltet werden soll, dass eine bestimmte Größe optimal, d.h. möglichst groß oder möglichst klein wird.

Der Blechverbrauch für den Boden- und den Deckelfalz wird hier nicht berücksichtigt.

Eine Firma soll Blechdosen herstellen, in die ein Liter Tomatensuppe passt. Um die Kosten so gering wie möglich zu halten, möchte sie die Dosen so gestalten, dass für ihre Herstellung möglichst wenig Blech benötigt wird. Unter allen Zylindern mit dem Volumen $1000\,\text{cm}^3$ ist also derjenige gesucht, der die kleinste Oberfläche hat.
Die Oberfläche eines Zylinders hängt von seinem Grundkreisradius r und seiner Höhe h ab: $O = 2\pi r^2 + 2\pi r h$. (1)

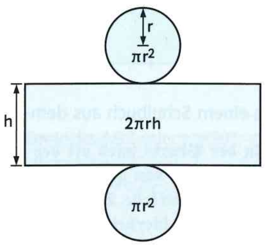
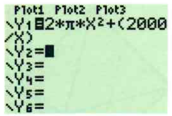
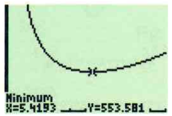


Fig. 1

Da das Zylindervolumen den festen Wert 1000 (in cm^3) haben soll, sind r und h nicht unabhängig voneinander. Aus der Bedingung $V = 1000 = \pi r^2 h$ folgt $h = \frac{1000}{\pi r^2}$. (2)
Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man eine Formel für die Oberfläche, die nur noch r enthält:
$O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$.
Mithilfe des GTR erhält man: Die Oberfläche des Zylinders und damit der Blechverbrauch für die Dose ist am kleinsten, wenn der Radius ca. 5,4 cm groß gewählt wird.
Die kleinstmögliche Oberfläche beträgt ca. $554\,\text{cm}^2$.





Strategie zur Bestimmung eines Maximums oder Minimums
1. Stelle eine Formel für die zu optimierende Größe auf. Die Formel enthält i. A. zwei Variablen.
2. Nutze die gegebenen Informationen, um eine Gleichung aufzustellen, die die beiden Variablen enthält.
3. Forme mithilfe dieser Gleichung die Formel für die zu optimierende Größe so um, dass sie nur noch eine Variable enthält.
4. Bestimme mithilfe des GTR den Wert der Variablen, für den die Größe optimal wird.

Beispiel Minimaler Umfang
Ein rechtwinkliges Dreieck hat den Flächeninhalt $18\,\text{cm}^2$. Wie muss man die Seitenlängen wählen, damit der Umfang des Dreiecks möglichst klein wird? Welche besondere Eigenschaft hat dieses Dreieck?
Lösung:
Formel für die zu optimierende Größe:
Umfang $u = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$
Bedingung: $\frac{1}{2} a \cdot b = 18$, also $b = \frac{36}{a}$.
Eingesetzt in u: $u = a + \frac{36}{a} + \sqrt{a^2 + \left(\frac{36}{a}\right)^2}$
Der GTR liefert: $a_{min} = 6$. Daraus erhält man $b_{min} = 6$, $u_{min} \approx 20{,}49$.
Das optimale rechtwinklige Dreieck ist gleichschenklig, also ein halbes Quadrat.

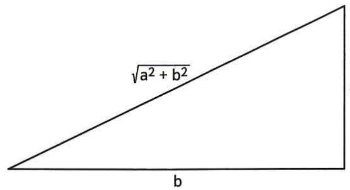
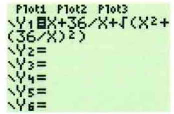
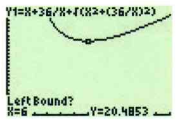


Fig. 1





Aufgaben

1 Ein gleichschenkliges Dreieck hat den Umfang 30 cm. Wie lang müssen die Seiten sein, damit seine Fläche möglichst groß ist? Stelle zunächst eine Vermutung auf und berechne dann die optimalen Seitenlängen.

2 a) In ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis $c = 10\,\text{cm}$ und dem Basiswinkel $\alpha = 50°$ soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt einbeschrieben werden (Fig. 2). Bestimme die Seitenlängen des größtmöglichen Rechtecks. Wie verändert sich das Ergebnis, wenn man den Basiswinkel α verändert?
b) In einen Kegel mit Grundkreisradius $r = 5\,\text{cm}$ und Höhe $h = 10\,\text{cm}$ soll ein Zylinder mit möglichst großem Volumen einbeschrieben werden (Fig. 3). Bestimme die Maße dieses Zylinders.

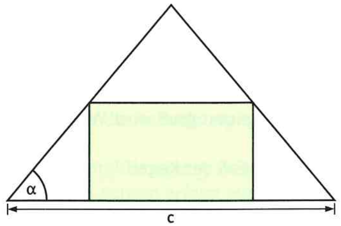


Fig. 2

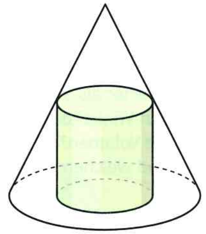


Fig. 3

3 Aus einem 10 cm langen Drahtstück soll ein Kreisausschnitt gebogen werden (Fig. 4).
a) Berechne den Flächeninhalt des Kreisausschnitts, wenn der Mittelpunktswinkel ein rechter bzw. ein gestreckter Winkel ist.
b) Wie groß muss der Radius r und der Mittelpunktswinkel α gewählt werden, damit der Flächeninhalt möglichst groß wird?

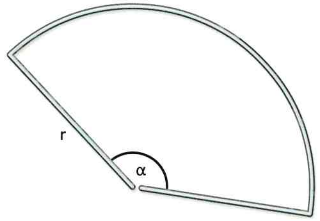


Fig. 4

4 Aus einem quadratischen Blatt Papier mit der Seitenlänge 20 cm soll das Netz einer quadratischen Pyramide wie in Fig. 1 ausgeschnitten werden.
a) Wie lang kann die Grundseite der Pyramide höchstens sein?
b) Bestimme die Länge der Grundseite, bei der das Volumen der Pyramide möglichst groß wird.

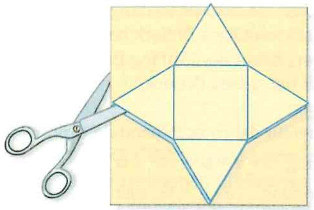


Fig. 1

5 Eine Gasleitung muss durch einen Fluss vom Punkt P zum Punkt Q verlegt werden (Fig. 2). Die Verlegung entlang des Ufers kostet 400 € pro Meter, die Verlegung im Fluss 800 € pro Meter.
a) Was kostet die Verlegung, wenn bis zum Punkt A ($\overline{PA}$ = 50 m) die Leitung am Ufer entlang gelegt wird?
b) Bis zu welcher Stelle muss die Leitung am Flussufer entlang verlegt werden, wenn die Kosten möglichst klein sein sollen?

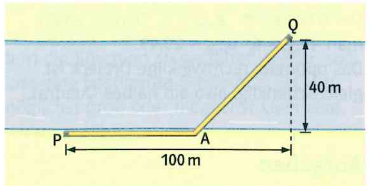


Fig. 2

6 Für eine Sportanlage soll eine 400 m lange Laufbahn und eine Spielfläche angelegt werden (Fig. 3). Wie muss der Radius r gewählt werden, damit die Spielfläche möglichst groß wird?

Fig. 3

7 Schneidet man aus einem Kreis mit Radius 10 cm einen Kreisausschnitt aus, so lässt sich daraus ein Kegel formen (Fig. 4). Das Volumen dieses Kegels hängt vom Mittelpunktswinkel α des Kreisausschnitts ab.
a) Berechne das Volumen des Kegels für $\alpha = 90°$.
b) Wie verhält sich das Kegelvolumen, wenn man für α Werte wählt, die wenig größer als 0° bzw. wenig kleiner als 360° sind?
c) Bestimme den Winkel α so, dass das Kegelvolumen möglichst groß wird. Wie groß ist dieses maximale Volumen?
Welche Höhe und welchen Grundkreisradius hat in diesem Fall der Kegel?

Hier müssen beide Variablen der zu optimierenden Größe mithilfe des Winkels α ausgedrückt werden.

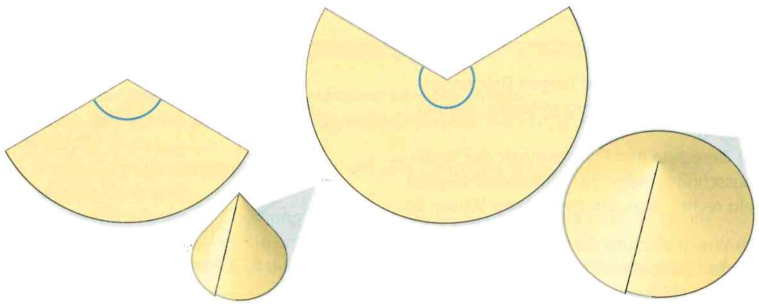


Fig. 4

1 Die Düne von Pyla ist die höchste Sanddüne Europas. Sie befindet sich an der französischen Atlantikküste südlich der Stadt Arcachon. In einem Reiseführer findet man folgende Angaben:
„Die Düne ist ca. 2700 m lang, 500 m breit und bis zu 117 m hoch. Sie ist zur Meeresseite hin zwischen 5° und 20° geneigt, zur Landseite hin zwischen 30° und 40°. Ihr Volumen wird auf 60 Millionen m³ geschätzt."
Überprüft den Schätzwert für das Volumen auf verschiedene Weisen.

2 Wegen der Kugelgestalt der Erde (Radius ca. 6370 km) ist keine Wasseroberfläche eben.
a) Der Bodensee ist ca. 63,5 km lang. Würde man von einem 50 m hohen Turm an einem Ende des Sees das andere Ende sehen können?
b) Wie groß ist die Aufwölbung des Bodensees zwischen Friedrichshafen und dem 14 km entfernten Schweizer Ufer?
c) Berechne die Aufwölbung eines 100 m langen Schwimmbeckens.

3 Die Kraftübertragung zwischen zwei rotierenden Achsen erfolgt meist über eine Kette oder über einen Keilriemen (Fig. 1). Berechne die Länge des Keilriemens für R = 25 cm, r = 10 cm und d = 70 cm.

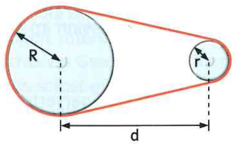


Fig. 1

4 Aus einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge 10 cm soll ein regelmäßiges Sechseck ausgeschnitten werden, wobei möglichst wenig Abfall entstehen soll. Vergleiche die beiden Vorschläge in Fig. 2.
Um wie viel Prozent unterscheiden sich die Flächeninhalte der beiden Sechsecke?

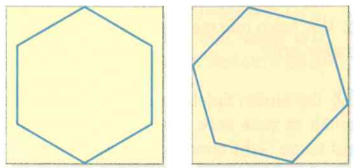


Fig. 2

5 Der Ulmer Rechenmeister Johann Faulhaber (1580 – 1635) beschrieb eine von ihm gefundene Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras folgendermaßen.

> *Johannes Faulhaber: MIRACVLA ARITHMETICA* (zitiert nach Wiel) / *Ingenieur-Schul* (zitiert nach Hawlitschek)
>
> Ich hab mir imaginirt ein Pyramidem oder Tetrahedron Irregulare, welcher an der obern Spitzen gegen den drey flachen Figuren allenthalben einen rechten Winckel oder 90 Grad hellt… In allen dergleichen Pyramidibus thut das quadrat der areae des Basis, eben so viel als die 3 gleiche quadrat des Inhalts der drey auffrechten Flechen sämptlich. Welche Invention Pythagoras zu seiner Zeit nicht gewust.

a) Skizziere die Pyramide und formuliere den von Faulhaber gefundenen Satz in heutiger Sprache und mithilfe einer Formel.
b) Beweise den Satz für den Spezialfall, bei dem alle Seitenkanten gleich lang sind.

6 Ein Quadrat mit der Seitenlänge 8 cm hat den Flächeninhalt 64 cm². Zerschneidet man dieses Quadrat in vier Teile wie in Fig. 1 und setzt es dann wieder als Rechteck zusammen, so hat dieses Rechteck den Flächeninhalt 65 cm². Löse dieses Rätsel auf verschiedene Weisen.

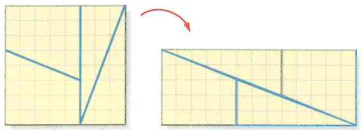


Fig. 1

Kannst du das noch?

7 Gib in wissenschaftlicher Schreibweise an.
a) 2 500 000 b) 7 Milliarden c) 0,000 000 03 d) $-0{,}004\,85 \cdot 10^6$

8 Berechne.
a) $a^5 \cdot a^2$ b) $x^{-3} : x^{-2}$ c) $(y^4)^{-3}$ d) $2^6 + 2^7$ e) $5^{\frac{1}{2}} : 5^{\frac{2}{3}}$ f) $(\sqrt[3]{2})^6$

9 Bestimme die Lösung.
a) $6x^3 + 1 = 2x^3 + 6$ b) $x^{\frac{2}{3}} = 2^{-4}$ c) $2{,}8 \cdot 4^{x+1} = 10{,}5$

10 Der Jahresgewinn einer Firma hat sich im vergangenen Jahr von 750 000 € auf 825 000 € erhöht.
a) Gib die absolute und die prozentuale Zunahme an.
b) Wie hoch wäre der Gewinn im nächsten Jahr bei gleichbleibender prozentualer Zunahme?

11 Herr Otto hat einen Sparvertrag mit einem festen Zinssatz von 2,7 % und dem Anfangskapital 20 000 € abgeschlossen.
a) Wie hoch ist sein Guthaben nach fünf Jahren?
b) Wie lange dauert es, bis sein Guthaben auf 30 000 € angewachsen ist?
c) Wie hoch müsste der Zinssatz sein, wenn sein Guthaben nach zehn Jahren 35 000 € betragen soll?

12 Bei einem Spiel muss man 4 € als Einsatz bezahlen. Dann wirft man einen Würfel und erhält so viele Euro, wie die Augenzahl angibt. Untersuche, ob das Spiel für den Spieler auf lange Sicht eher einen Gewinn oder einen Verlust bringt.

Kinderleicht

Felicitas Hoppe

Ich erinnere mich noch sehr gut an den Tag, an dem plötzlich die riesige Pappkiste kam, in der sich angeblich alles befand, was man braucht, um daraus ein Regal zu bauen: Bretter und Stangen, Schrauben und Winkel. Das liefern wir Ihnen alles frei Haus, hatte der Mann im Laden gesagt. Kinderleicht und kein Fachmann nötig, ist alles drin, auch die Anleitung und das passende Werkzeug. Und eine Bohrmaschine hat jeder im Haus, zur Not einen Hammer, also gar keine Frage, das kriegen Sie hin!

Ein paar Tage lang stand die Kiste im Flur. Groß und schwer und wir vier drum herum, mein Vater, meine Mutter, mein Bruder und ich, daneben Hammer und Bohrmaschine. Bis unsere Mutter endlich die Küchenschere holte und entschlossen den oberen Deckel aufschnitt. Sie warf einen kurzen Blick hinein und einen zweiten auf das Gesicht meines Vaters. Kinderleicht, sagte sie lachend und verschwand in der Küche, sie hatte zu tun. Und mein Vater, der sich auch nicht blamieren wollte, zog sich in den Garten zurück, zu den alt vertrauten bekannten Geräten. Höchste Zeit, den Rasen zu mähen, rief er fröhlich von draußen. Und was übrigens diese Kiste betrifft, das kriegt ihr schon hin, dazu braucht ihr mich nicht, das schafft ihr lässig. Ist ja alles drin, und oben auf die Bedienungsanleitung.

Ein Kinderspiel, das kennen wir schon, es ist immer dasselbe. Zurück bleiben immer mein Bruder und ich, weil wir in der Familie die einzigen sind, die sich trauen, riesige Kisten zu öffnen, um herauszuholen, was drinnen steckt: Zum Beispiel ein harmloses Bücherregal. Man muss nur wissen, was Eltern nicht wissen, nämlich wie man es macht. In aller Ruhe und eins nach dem andern, einfache simple Mathematik: Erst den Kopf in Bewegung setzen und danach die Hand. Weil Handarbeit nämlich Kopfarbeit ist.

Und natürlich auch umgekehrt. Denn im Gegensatz zu unseren Eltern arbeiten wir logisch, das heißt immer zu zweit. Denn obwohl ich mühelos jede Bedienungsanleitung lese und alles scheinbar auf Anhieb verstehe, habe ich leider zwei linke Hände. Ich lasse Bretter und Schrauben fallen, während mein Bruder, der manchmal mit dem Kopf nicht so schnell ist, zwar nicht weiß, worauf die Sache hinaus läuft, dafür aber immer genau weiß, wie man die Dinge entschieden zur Hand nimmt und wo und wie man das Werkzeug ansetzt.

Das heißt, gemeinsam sind wir unschlagbar. Ich bin der Kopf und mein Bruder die Hand. Ich weiß genau, wie die Sache gemeint ist, und mein Bruder weiß genau, wie mans macht! Ich weiß, WAS man braucht, und er weiß, WIE mans tut. Ich kenne die Schritte, er weiß, wie man geht, dem rutscht die Schraube nicht aus der Hand, weil er weiß, wie man die Dinge wirklich befestigt. Solange wir beide zusammenhalten, steht nie etwas schief, sondern alles steht gerade, der rechte Winkel gelingt uns gemeinsam mit links.

Und das wissen unsere Eltern genau. Auf uns ist Verlass. Denn wenn der Rasen gemäht und die Suppe gekocht ist, steht das neue Regal längst fest an der Wand, so als hätte es dort schon immer gestanden. Nur die Bücher, die unsere Eltern dort später unterbringen, interessieren uns kein bisschen. Nichts als Geschichten! Die müssen sie abends selbst einsortieren, während wir längst in unserem Stockbett liegen, das wir auch selbst aufgebaut haben und in dem man im Licht einer Taschenlampe liest, worauf es wirklich ankommt: Geschichten über Hammer und Nagel, erst der Kopf, dann die Hand. Vielleicht aber auch umgekehrt.

Rückblick

Werkzeuge
Sätze der Geometrie und Formeln für Größen kann man wie Werkzeuge verwenden.
Jedes Werkzeug hat einen bestimmten Zweck und bestimmte Anwendungsbedingungen.

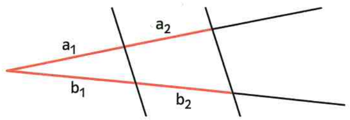
Bei der Bearbeitung einer Aufgabe richtet sich die Auswahl eines Werkzeugs
- nach der gesuchten Größe oder
- nach den gegebenen Bedingungen.

Wichtige Werkzeuge

Strategien
- Hilfslinien einzeichnen, sodass die Anwendungsbedingung eines Werkzeugs erfüllt ist.
- Eine Gleichung aufstellen, in der die Variable für die gesuchte Größe mehrfach vorkommt.
- Vorwärtsarbeiten: Ein passendes Werkzeug anwenden und mit der neu gewonnenen Information weiterarbeiten.
- Rückwärtsarbeiten: Ein Werkzeug auswählen, das die gesuchte Größe liefern kann. Dann nach einem Werkzeug suchen, mit dessen Hilfe die Anwendungsbedingung des gewählten Werkzeugs hergestellt werden kann.

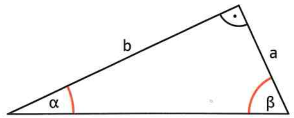
Optimierung
- Beschreibe die zu optimierende Größe durch eine Formel, die i. A. auf der rechten Seite zwei Variablen enthält.
- Stelle eine Gleichung auf, die diese beiden Variablen enthält.
- Stelle mithilfe dieser Gleichung die Formel mit nur einer Variablen dar.
- Bestimme den Wert dieser Variablen, für den die zu optimierende Größe optimal wird. Verwende dazu den GTR.

*Werkzeug: **1. Strahlensatz***
Zweck: Berechnung einer Strecke
Anwendungsbedingung:
- *2 von einem Punkt ausgehende Strahlen*
- *2 Parallelen, die die Strahlen schneiden*
- *3 Abschnitte auf den Strahlen bekannt.*



Vorgehen:
Löse die Gleichung $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$ *nach der gesuchten Streckenlänge auf.*

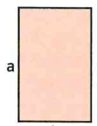
*Werkzeug: **Tangens***
Zweck: Berechnung eines Winkels
Anwendungsbedingung:
- *rechtwinkliges Dreieck*
- *beide Katheten bekannt.*



Vorgehen:
Bestimme mithilfe des GTR den Winkel aus $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$ *bzw.* $\tan(\beta) = \frac{b}{a}$.

Bestimmung des Rechtecks mit Umfang 20 cm, das den größten Flächeninhalt hat:

Zu optimierende Größe:
Flächeninhalt $A = a \cdot b$



Gleichung für a und b:
Umfang $2 \cdot (a + b) = 20$.
Also $b = 10 - a$.
Damit $A = a \cdot (10 - a) = 10a - a^2$.
Mithilfe des GTR erhält man:
$a = 5$; *d. h., das gesuchte Rechteck ist ein Quadrat mit Seitenlänge 5 cm.*

Training

Runde 1

1 Ein gleichseitiges Dreieck hat die Seitenlänge $s = 10$ cm. Berechne seinen Flächeninhalt.

2 In einen Kreis mit Radius 5 cm wird ein Rechteck einbeschrieben. Eine Seite des Rechtecks ist 8 cm lang. Berechne die andere Seitenlänge.

3 Berechne den Flächeninhalt des Vierecks in Fig. 1.

4 Zeichne einen Kreisring mit dem äußeren Radius 4,0 cm und dem inneren Radius 3,2 cm.
a) Wie lang ist eine Ringsehne dieses Kreisrings (Fig. 2)?
b) Wie muss man den inneren Radius verändern, damit der Durchmesser des inneren Kreises und die Ringsehne gleich lang sind?

5 Fig. 3 zeigt eine Näherungskonstruktion für die Kreiszahl π. An der wievielten Stelle nach dem Komma unterscheidet sich der Näherungswert p zum ersten Mal von dem exakten Wert von π?

6 Die Punkte A(0|5) und B(9|2) sollen geradlinig mit einem Punkt C auf der x-Achse verbunden werden. Bestimme die Koordinaten von C so, dass die Gesamtstrecke von A über C nach B möglichst kurz wird.

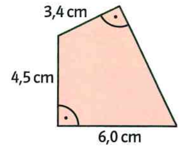


Fig. 1

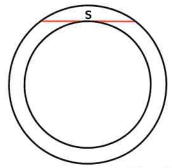


Fig. 2

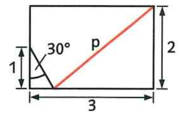


Fig. 3

Runde 2

1 Ein gleichseitiges Dreieck hat die Höhe 6,5 cm. Berechne seinen Flächeninhalt.

2 In einem Quadrat mit der Seitenlänge 10 cm werden die Seitenmitten mit den Eckpunkten so verbunden, dass ein weiteres Quadrat entsteht (Fig. 4). Berechne die Seitenlänge dieses Quadrats.

3 In einen Kreis mit Radius 6 cm wurde ein regelmäßiges Sechseck eingezeichnet (Fig. 5).
a) Berechne die Länge der Diagonalen $\overline{AC}$.
b) Wie lang ist die Strecke $\overline{AS}$?

4 Ein gotisches Spitzbogenfenster (Fig. 6) lässt sich konstruieren, indem man um die Endpunkte der Strecke $\overline{AB}$ Kreisbögen mit Radius $\overline{AB}$ zeichnet. Den Radius des einbeschriebenen Kreises kann man berechnen, wenn man geeignete Hilfslinien einzeichnet.
a) Berechne den Radius, wenn die Strecke $\overline{AB}$ 2 m lang ist.
b) Berechne den Radius für $\overline{AB} = a$.
c) Zeichne das Spitzbogenfenster für $\overline{AB} = 4$ cm.

5 In ein Dreieck ABC mit A(0|0), B(0|5) und C(10|0) soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Bestimme die Seitenlängen des Rechtecks.

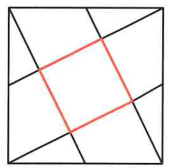


Fig. 4

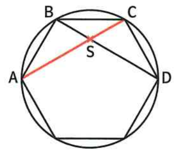


Fig. 5

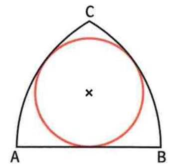


Fig. 6