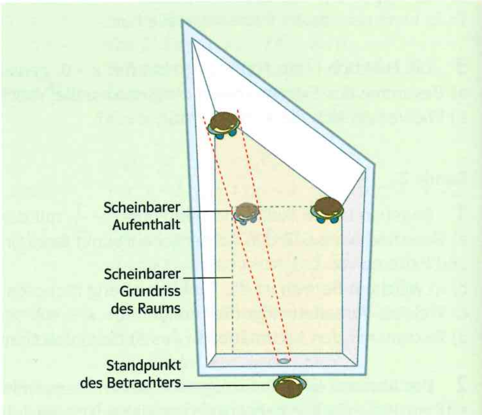
Das kannst du schon

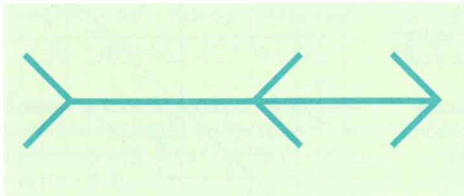
- Geraden der Ebene mithilfe von Funktionen bestimmen
- Schnittpunkte von Geraden der Ebene berechnen



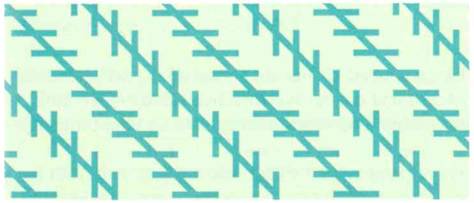
Zahl und Maß | Daten und Zufall | Beziehung und Änderung | Modell und Simulation | **Muster und Struktur** | **Form und Raum**

Windschief und doch Gerade

Vertrauen ist gut,
Vektorgleichungen sind besser …



Sind die Teilstücke gleich lang?



Sind die Geraden parallel?

Das kannst du bald

- Geraden im Raum mithilfe von Gleichungen bestimmen
- Die Lage von zwei Geraden zueinander bestimmen
- Mit Vektoren geometrische Fragestellungen lösen

1 Punkte im Raum

Wo befindet sich die Katze?
Wo befindet sich der Vogel?

Bei Koordinatensystemen der Ebene werden die beiden Achsen als x_1-Achse und x_2-Achse statt wie bisher als x-Achse und y-Achse bezeichnet.

Um die Lage eines Punktes im Raum anzugeben, benötigt man ein Koordinatensystem mit drei Achsen. Im Weiteren werden die Koordinatenachsen mit x_1-Achse, x_2-Achse und x_3-Achse bezeichnet – es ist auch eine Achsenbezeichnung mit x, y und z möglich.
Der Punkt P in Fig. 2 hat die x_1-Koordinate 3, die x_2-Koordinate 2 und die x_3-Koordinate 1. Man gibt ihn mit $P(3|2|1)$ an.

Die x_1-Achse zeigt meist nach vorn, die x_2-Achse nach rechts und die x_3-Achse nach oben. Um einen räumlichen Eindruck zu erhalten, kann man so vorgehen:

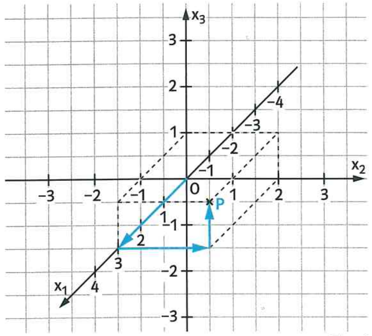


Fig. 1

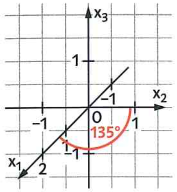


Fig. 2

Man zeichnet auf der x_1-Achse die Längeneinheit kleiner ein als auf der x_2-Achse und der x_3-Achse. Wählt man z. B. auf der x_2-Achse und auf der x_3-Achse zwei Kästchen als eine Längeneinheit, so kann man auf der x_1-Achse eine Kästchendiagonale als eine Längeneinheit wählen.
Um z. B. den Punkt $P(3|2|1)$ in ein Koordinatensystem einzuzeichnen, geht man vom Koordinatenursprung $O(0|0|0)$ drei Einheiten in Richtung der x_1-Achse, dann zwei Einheiten in Richtung der x_2-Achse und anschließend eine Einheit in Richtung der x_3-Achse (blaue Linie in Fig. 1).

*Sind jeweils zwei Achsen eines Koordinatensystems zueinander senkrecht, so spricht man von einem **kartesischen Koordinatensystem**.*

Bei einem Koordinatensystem mit drei Achsen ist es üblich, dass die x_1-Achse nach vorn, die x_2-Achse nach rechts und die x_3-Achse nach oben zeigt.
Die Lage eines Punktes P gibt man mit seinen drei Koordinaten $(p_1|p_2|p_3)$ an.
Dabei gibt p_1 die x_1-Koordinate,
p_2 die x_2-Koordinate und
p_3 die x_3-Koordinate an.

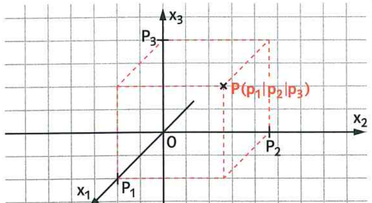


Fig. 3

Es gibt drei besondere Ebenen:
- die x_1x_2-Ebene ist durch die x_1-Achse und die x_2-Achse festgelegt.
- die x_2x_3-Ebene ist durch die x_2-Achse und die x_3-Achse festgelegt.
- die x_1x_3-Ebene ist durch die x_1-Achse und die x_3-Achse festgelegt (siehe Fig. 1).

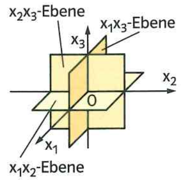


Fig. 1

Abstand zweier Punkte
Kennt man die Koordinaten zweier Punkte $P(p_1|p_2|p_3)$ und $Q(q_1|q_2|q_3)$, so kann man ihren Abstand mithilfe des Satzes von Pythagoras berechnen (Fig. 1):

$$\overline{PS} = \sqrt{\overline{RS}^2 + \overline{PR}^2} = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$$
$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PS}^2 + \overline{SQ}^2}$$
$$= \sqrt{\left(\sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}\right)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$
$$= \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}.$$

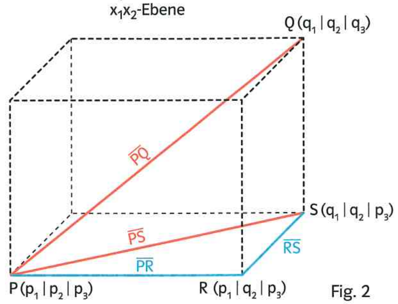


Fig. 2

Beispiel 1 Raumdiagonale im Würfel
Ein Würfel ABCDEFGH hat die Ecken $A(-1|-1|0)$; $B(1|-1|0)$; $C(1|1|0)$; $D(-1|1|0)$ und $H(-1|1|2)$.
a) Zeichne diesen Würfel in ein Koordinatensystem. Wähle als Längeneinheit 1 cm.
b) Gib die Koordinaten der Ecken E, F, G an.
c) Bestimme die Längen $\overline{AC}$ und $\overline{CE}$.
Lösung:
a) Blauer Würfel in Fig. 3.
b) $E(-1|-1|2)$; $F(1|-1|2)$; $G(1|1|2)$
c) Die Kanten des Würfels sind 2 cm lang. Nach dem Satz von Pythagoras gilt:
$\overline{AC} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-(-1))^2}\,\text{cm} = \sqrt{8}\,\text{cm} = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$;
$\overline{CE} = \sqrt{((-1)-1)^2 + ((-1)-1)^2 + (2-0)^2}\,\text{cm} = \sqrt{12}\,\text{cm} = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

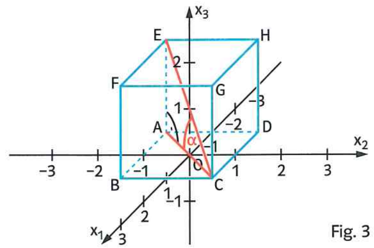


Fig. 3

Beispiel 2 Lage von Punkten
Zeichne alle Punkte des Raumes mit der x_1-Koordinate 3 und der x_2-Koordinate 2 ins Koordinatensystem ein. Wo liegen diese Punkte?
Lösung:
Siehe Fig. 4. Alle Punkte des Raumes mit der x_1-Koordinate 3 und der x_2-Koordinate 2 liegen auf einer Geraden, die parallel zur x_3-Achse ist und durch den Punkt $P(3|2|0)$ geht.

Beispiel 3 Punkte von Ebenen
a) Gib die Koordinaten von zwei Punkten an, die in der x_1x_2-Ebene liegen.
b) Beschreibe alle Punkte, die in der x_1x_2-Ebene und in der x_1x_3-Ebene liegen.
Lösung:
a) Die Punkte $P(1|2|0)$ und $Q(-2|13|0)$ liegen in der x_1x_2-Ebene.
b) Alle Punkte der x_1-Achse liegen zugleich in der x_1x_2-Ebene und in der x_1x_3-Ebene.
Weitere Punkte, die zugleich in der x_1x_2-Ebene und in der x_1x_3-Ebene liegen, gibt es nicht.

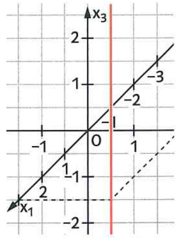


Fig. 4

Aufgaben

1 Zeichne A(1|3|2); B(−2|0|3); C(4|−2|1) und D(0|0|−2) in ein Koordinatensystem.

2 Zeichne in ein Koordinatensystem A(2|3|4); B(−2|0|1); C(3|−1|0) und D(0|0|3) so wie in Fig. 1 auf Seite 74 mit Hilfslinien ein, dass man ihre Koordinaten ablesen kann.

3 Betrachtet wird ein Koordinatensystem mit der Einheit 1cm.
a) Wie muss eine Strecke liegen, damit man ihre Länge direkt aus der Zeichnung mit einem Lineal ablesen kann?
b) Für welche Strecken kann man ihre Längen nicht direkt mit einem Lineal ablesen?

*Der Punkt O(0|0|0) heißt **Ursprung** des Koordinatensystems.*

4 a) Zeichne in ein Koordinatensystem einen Quader ABCDEFGH mit diesen Eigenschaften: Die Kantenlängen sollen 2cm; 3cm und 4cm betragen. Die obere linke Ecke liegt im Ursprung O(0|0|0) des Koordinatensystems. Die obere linke Kante liegt auf der x_1-Achse. Die obere hintere Kante liegt auf der x_2-Achse.
b) Gib die Koordinaten der Ecken des Quaders aus a) an.

5 Wo liegen in einem räumlichen Koordinatensystem alle Punkte, deren
a) x_1-Koordinate (x_2-Koordinate, x_3-Koordinate) Null ist,
b) x_2-Koordinate und x_3-Koordinate Null sind?

6 In Fig. 1 befinden sich
- die Punkte P und Q in der x_1x_2-Ebene,
- die Punkte R und S in der x_2x_3-Ebene,
- die Punkte T und U in der x_1x_3-Ebene.

Bestimme die Koordinaten dieser Punkte.

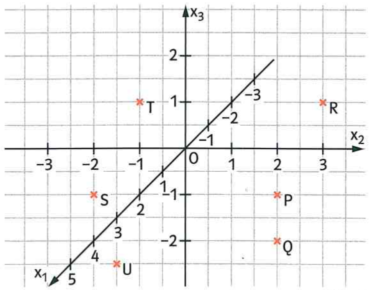


Fig. 1

7 A(1|1|1); B(1|4|1); C(−2|4|1) und G(−2|4|3) sind Eckpunkte eines Würfels.
a) Bestimme die Koordinaten der Mittelpunkte der Würfelkanten.
b) Bestimme die Koordinaten der Diagonalenmittelpunkte der Seitenflächen des Würfels.

8 Ein Quader ABCDEFGH hat die Ecken A(−2|0|0); B(1|0|0); C(1|−1|0) und G(1|−1|3).
a) Zeichne diesen Quader in ein Koordinatensystem.
Wähle als Längeneinheit 1cm.
b) Gib die Koordinaten der fehlenden Ecken D, E, F und H an.
c) Bestimme die Längen der Strecken $\overline{BD}$ und $\overline{BH}$.

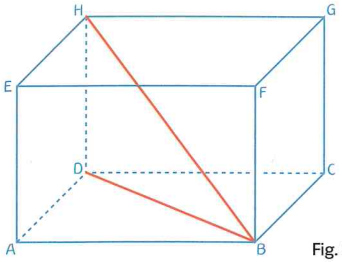


Fig. 2

9 Zeichne die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ mit A(0|0|−3); B(2|2|−3) und C(0|0|0) in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1cm ein.
Bestimme die Längen der Strecken.

Bist du sicher?

1 Zeichne die Punkte A(3|0|0); B(−1|−3|0) und C(−2|0|−1) in ein Koordinatensystem. Beschreibe, wo die Punkte liegen. Berechne die Länge der Strecke $\overline{OB}$ mit O(0|0|0).

2 Wo liegen in einem räumlichen Koordinatensystem alle Punkte, deren x_2-Koordinate 5 und deren x_3-Koordinate 2 ist?

10 Welche Koordinaten haben die Bildpunkte von A(2|0|0); B(−1|2|−1); C(−2|3|4) und D(3|4|−2) bei der Spiegelung an der a) x_1x_2-Ebene, b) x_2x_3-Ebene, c) x_1x_3-Ebene?

11 Gib die Koordinaten von zwei Punkten an, die in einem kartesischen Koordinatensystem in der x_2-x_3-Ebene auf der Winkelhalbierenden der x_2-Achse und der x_3-Achse liegen.

12 In einem Koordinatensystem beträgt eine Einheit auf den Koordinatenachsen 1cm. In dieses Koordinatensystem wurden zwei Ebenen eingetragen, die jeweils parallel zur x_1x_3-Ebene sind und den Abstand 5cm von der x_1x_3-Ebene haben. Wie kann man an den Koordinaten eines Punktes erkennen, ob er zu einer der beiden Ebenen gehört?

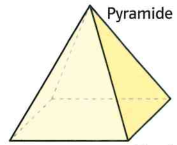


Fig. 1

13 Gib die Koordinaten eines beliebig gewählten Punktes P im Raum an. Trage diesen Punkt in ein Koordinatensystem ein. Trage nun für zwei Koordinaten die gestrichelten Hilfslinien wie in Fig. 3 auf Seite 74 ein. Lege die Zeichnung deinem Tischnachbarn vor. Kann er die Koordinaten des Punktes erkennen?

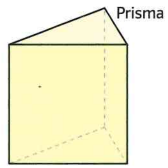


Fig. 2

14 Zeichne eine Pyramide oder ein Prisma in ein kartesisches Koordinatensystem. Bezeichne die Ecken mit Großbuchstaben. Gib deinem Tischnachbarn die Koordinaten der Ecken. Kann er deine Figur korrekt zeichnen?

15 Gib die Koordinaten von zwei Punkten an, die auf einer Parallelen liegen
a) zur x_2-Achse, b) zur x_3-Achse.

16 Die rote Gerade (Fig. 3) geht durch P und Q.
a) Bestimme die Koordinaten von P und Q.
b) Gib die Koordinaten von drei Punkten an, die auf der roten Geraden liegen.
c) Was kann man über die Koordinaten aller Punkte der roten Geraden sagen?

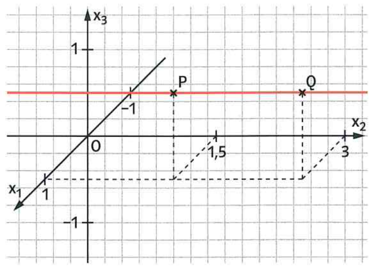


Fig. 3

17 Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ABCD und der Spitze S (wie in Fig. 4) hat die Eckpunkte A(1|3|2) und B(1|7|2). Die Höhe der Pyramide beträgt 4cm.
Bestimme die Koordinaten der Spitze S dieser Pyramide.

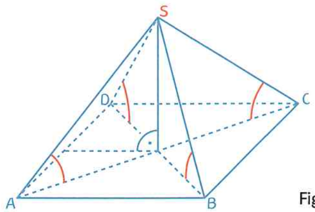
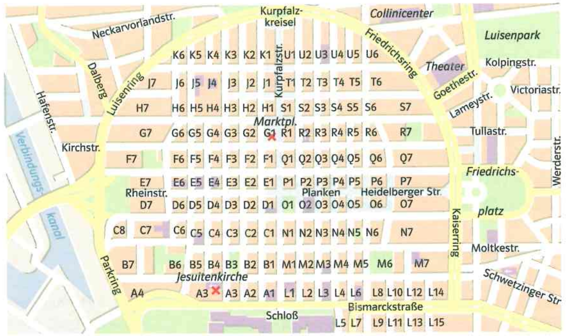


Fig. 4

2 Vektoren



Mannhein wird wegen der Anordnung der Straßen auch als Quadratestadt bezeichnet. Durch diese Anordnung soll man sich leichter zurechtfinden können.

Jemand fragt vor der Jesuitenkirche nach dem Weg zum Marktplatz (rote Kreuze). Gib fünf verschiedene Wegbeschreibungen an. Welche Wegbeschreibungen kann man sich am besten merken?

Bisher wurden mithilfe von Koordinaten die Lagen von Punkten beschrieben. Im Folgenden wird eine Beschreibung vorgestellt, wie man von einem Punkt zu einem anderen Punkt gelangt.

Wie man von einem Ausgangspunkt P zu einem Zielpunkt Q gelangt, kann man so beschreiben (Fig. 1):
Man erreicht den Punkt Q, wenn man vom Punkt P aus zwei Einheiten in Richtung der x_1-Achse geht und anschließend drei Einheiten in Richtung der x_2-Achse geht.
Diese Beschreibung bezeichnet man als **Vektor** und schreibt kurz $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Weil dieser Vektor von P nach Q führt, schreibt man auch $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Man sagt:
Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ hat die x_1-Koordinate 2 und die x_2-Koordinate 3.

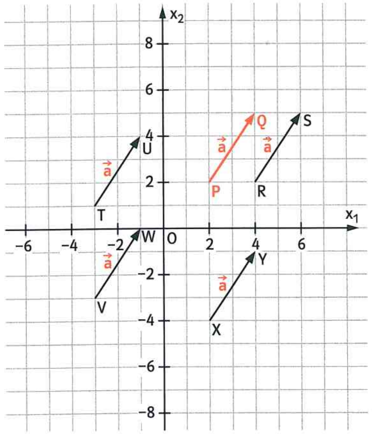


Fig. 1

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ beschreibt nicht nur, wie man zum Ausgangspunkt P den Zielpunkt Q erhält, sondern auch, wie man zum Ausgangspunkt R den Zielpunkt S erhält, zum Punkt T den Punkt U erhält usw. Deshalb bezeichnet man Vektoren auch allgemeiner durch kleine Buchstaben mit einem Pfeil.
In Fig. 1 gilt $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TU} = \overrightarrow{VW} = \overrightarrow{XY} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

Ein Vektor kann zeichnerisch durch Pfeile angegeben werden, die von den jeweiligen Ausgangspunkten zu den dazugehörenden Zielpunkten führen. Alle Pfeile, die zu einem Vektor gehören, sind zueinander parallel, gleich lang und sie haben alle die gleiche Richtung.

So kann man die Koordinaten eines Vektors rechnerisch bestimmen:
Man subtrahiert von den Koodinaten des Zielpunktes die Koordinaten des Ausgangspunktes. Für Fig. 1 gilt:
$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}6-1\\5-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix}1-6\\2-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\-2\end{pmatrix}$.
Negative Koordinaten eines Vektors bedeuten: „Gehe entgegen der Richtung der jeweiligen Koordinatenachse".

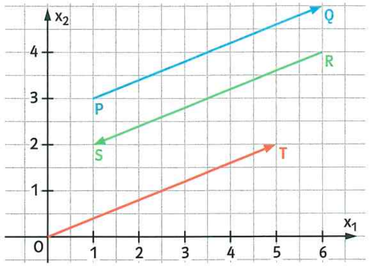


Fig. 1

Beachte:
Jeder Vektor ist Ortsvektor eines Punktes.
Der Ortsvektor eines Punktes P hat die gleichen Koordinaten wie P.

Der Vektor $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ beschreibt auch, wie man zum Ausgangspunkt O(0|0) den Zielpunkt T(5|2) erhält. Man sagt:
$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ ist der **Ortsvektor** des Punktes T(5|2).

Die Überlegungen zu Punkten und Vektoren der Ebene kann man auf den Raum übertragen. In Fig. 2 gilt:
$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}4-1\\1-3\\-1-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

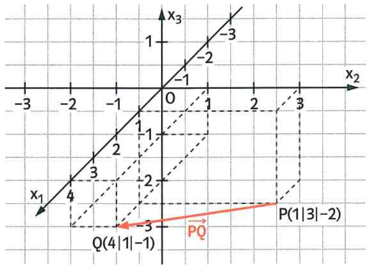


Fig. 2

Die Koordinaten eines Vektors $\overrightarrow{AB}$ kann man aus den Koordinaten der Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ bestimmen. Es gilt $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}$.
Der Vektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}$ heißt Ortsvektor des Punktes $P(p_1|p_2|p_3)$.

Beispiel 1 Vektoren im Koordinatensystem
Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.
a) Zeichne drei Pfeile des Vektors $\vec{a}$ in ein Koordinatensystem ein.
b) Es gilt $\vec{a} = \overrightarrow{PP'}$ mit P(−4|3). Bestimme die Koordinaten von P'.
c) Es gilt $\vec{a} = \overrightarrow{QQ'}$ mit Q'(1|−4). Bestimme die Koordinaten von Q.

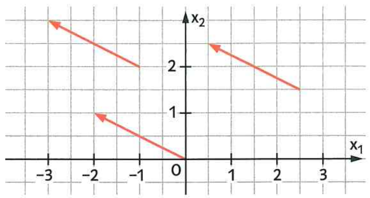


Fig. 3

Lösung:
a) Siehe Fig. 3.
b) *Geht man von P aus zwei Einheiten gegen die Richtung der x_1-Achse und anschließend eine Einheit in Richtung der x_2-Achse, so erreicht man P'.*
P'(−4 − 2|3 + 1) bzw. P'(−6|4).
c) *Geht man von Q' aus zwei Einheiten in Richtung der x_1-Achse und anschließend eine Einheit gegen die Richtung der x_2-Achse, so erreicht man Q.*
Q(1 + 2|−4 − 1) bzw. Q(3|−5).

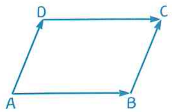


Fig. 1

Beispiel 2 Parallelogramm
Sind die Punkte A(1|2|3); B(3|−2|1); C(2,25|−1,3|7) und D(0,25|2,7|9) die aufeinander folgenden Ecken eines Parallelogramms ABCD?
Lösung:
Fig. 1 verdeutlicht, dass es genügt zu überprüfen, ob $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (bzw. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$) gilt.
$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -2-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 2{,}25-0{,}25 \\ -1{,}3-2{,}7 \\ 7-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
A, B, C und D sind die Ecken eines Parallelogramms.

Aufgaben

1 Zeichne jeweils drei Pfeile des Vektors in ein Koordinatensystem ein.
a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -2{,}2 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

2 Zeichne jeweils drei Pfeile des Vektors in ein Koordinatensystem ein, wobei ein Pfeil der Ortsvektor sein soll.
a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

3 Bestimme die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BA}$.
a) A(1|0|1); B(3|4|1) b) A(4|2|0); B(3|3|3) c) A(−1|2|3); B(2|−2|4)
d) A(4|2|−1); B(5|−1|−3) e) A(1|−4|−3); B(7|2|−4) f) A(2,5|1|−3); B(4|−3,3|2)

4 Der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ beschreibt, wie man zum Punkt A den Punkt B erhält.
Bestimme die Koordinaten des fehlenden Punktes.
a) A(2|−1|3) b) A(−17|11|31) c) B(−17|11|31) d) B(33|−71|−181)

5 Zu welchem Punkt ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$ (der Vektor $\overrightarrow{BA}$) Ortsvektor?
a) A(2|−1|3); B(0|0|0) b) A(3|4|5); B(5|4|3)
c) A(0|1|0); B(1|0|1) d) A(2|4|6); B(3|1|5)

6 Sind die vier Punkte die Ecken eines Parallelogramms? Begründe deine Antwort.
a) A(−2|2|3); B(5|5|5); C(9|6|5); D(2|3|3)
b) A(2|0|3); B(4|4|4); C(11|7|9); D(9|3|8)
c) A(2|−2|7); B(6|5|1); C(1|−1|1); D(8|0|8)

Gibt es bei Aufgabe 7 mehrere Lösungen?

7 Bestimme die Koordinaten eines Punktes D so, dass die vier Punkte ein Parallelogramm bilden.
a) A(21|−11|43); B(3|7|−8); C(0|4|5) b) A(−75|199|−67); B(35|0|−81); C(1|2|3)

Bist du sicher?

1 Bestimme die Koordinaten der Vektoren $\overrightarrow{DE}$ und $\overrightarrow{ED}$ mit D(1|−1|1); E(−1|1|0).

2 Zu welchem Punkt P ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$ Ortsvektor, wenn A(−2|0|2) und B(0|2|0)?

8 Ein Heißluftballon ist bei Immenstaad am Bodensee gestartet und nach ca. einer Stunde bei Kesswil in der Schweiz gelandet (siehe Pfeil). Während dieser Fahrt in ca. 1500 m Höhe waren Windrichtung und Windgeschwindigkeit konstant.
a) Beschreibt die Fahrt mithilfe eines Vektors. Ihr könnt hierzu eine durchsichtige Folie auf die Karte legen und ein Koordinatensystem zeichnen.
b) Wo würden nach einer Stunde Fahrt bei gleichen Windbedingungen Heißluftballone landen, die in Meersburg bzw. Wasserburg gestartet sind?
c) Wie lauten die Vektoren für einstündige Fahrten mit Heißluftballonen bei doppelter Windgeschwindigkeit und umgekehrter Windrichtung?

Fig. 1

9 In Fig. 2 sind die Kanten des großen Würfels dreimal so lang wie die Kanten des kleinen Würfels.
a) Zeichne zwei Würfel wie die in Fig. 2 in ein Koordinatensystem.
b) Gib die Koordinaten der Eckpunkte der Würfel an.
c) Zeichne zwei Pfeile von zwei Vektoren wie in Fig. 2 ein.
d) Vergleiche die Längen der beiden Pfeile.

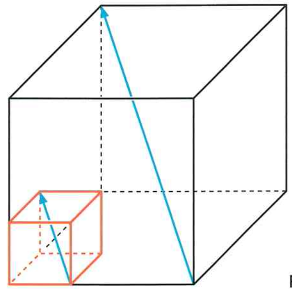


Fig. 2

10 Mithilfe von Vektoren kann man Kopiervorschriften angeben.
a) Legt in einem Koordinatensystem eine quadratische Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S fest. Bestimmt die Vektoren $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SD}$. Teilt diese Vektoren den Mitschülerinnen und Mitschülern an eurem Nachbartisch mit. Sie sollen nun für drei Pyramiden die Spitzen festlegen und mithilfe eurer Vektoren drei gleiche Pyramiden zeichnen.
b) Wie viele Vektoren benötigt man, um mit dem gleichen Verfahren wie in a) ein Rechteck zu kopieren?

11 Fig. 3 zeigt einen Quader ABCDEFGH.
Der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks ABCD ist M_1. Der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks BCGF ist M_2.
Der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks CDHG ist M_3. Der Schnittpunkt der Diagonalen des Vierecks ADEH ist M_4.
Diese Schnittpunkte sind nicht eingezeichnet. Bestimme die Koordinaten des Vektors
a) $\overrightarrow{M_1M_2}$, b) $\overrightarrow{M_2M_3}$,
c) $\overrightarrow{M_3M_4}$, d) $\overrightarrow{M_4M_1}$.

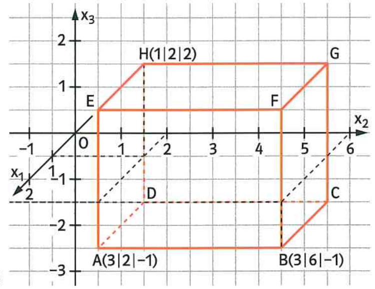
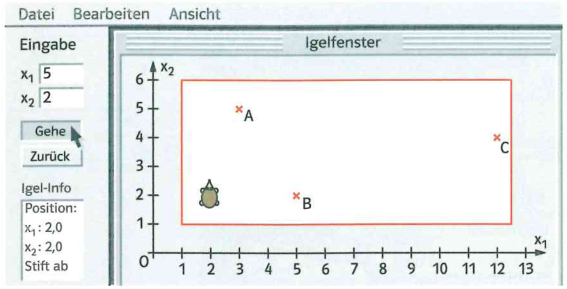


Fig. 3

3 Rechnen mit Vektoren



Der computergesteuerte „Igel“ kann jede Position innerhalb des umrandeten Bereichs erreichen. Die Befehle hierzu heißen: „Gehe i_1 Einheiten in x_1-Richtung und i_2 Einheiten in x_2-Richtung“. Wie lauten die Befehle für die Bewegungen von A nach B, von B nach C und von A nach C? Vergleiche diese Befehle.

Fig. 2 verdeutlicht, wie man mithilfe der Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QR}$ den Vektor $\overrightarrow{PR}$ erhalten kann.
Dieses Vorgehen bezeichnet man als **Addition von Vektoren**.

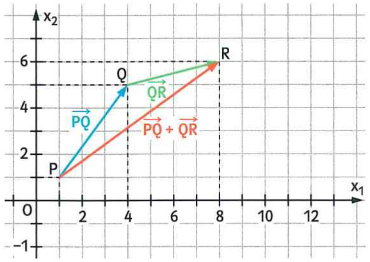


Fig. 1

Geht man in Fig. 1 von P über Q nach R, so geht man insgesamt
3 + 4 Einheiten in x_1-Richtung und
4 + 1 Einheiten in x_2-Richtung.
Man kann dies auch so aufschreiben:

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+4\\4+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$$

Fig. 3 verdeutlicht, wie man durch dreifache Anwendung des Vektors $\vec{a}$ den Vektor $\overrightarrow{AB}$ erhalten kann. Dieses Vorgehen bezeichnet man als **Multiplikation einer Zahl mit einem Vektor**.

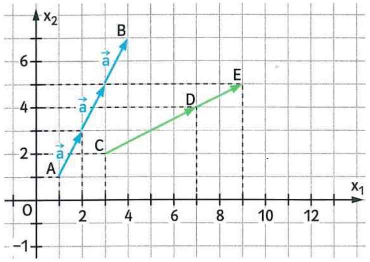


Fig. 2

Geht man in Fig. 2 von A nach B, so geht man nacheinander dreimal einen Pfeil des Vektors $\vec{a}$ entlang, deshalb gilt

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}.$$

Man kann dies auch so aufschreiben:

$$\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \vec{a} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 \cdot 1\\3 \cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}.$$

In Fig. 2 ist der Weg von C nach E 1,5-mal so lang wie der Weg von C nach D, deshalb gilt:

$$\overrightarrow{CE} = 1{,}5 \cdot \overrightarrow{CD} = 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5 \cdot 4\\1{,}5 \cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}.$$

Diese Überlegungen treffen auch für Vektoren des Raumes zu:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+5\\2+4\\3+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix}, \qquad 2{,}5 \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}5 \cdot 4\\2{,}5 \cdot 2\\2{,}5 \cdot (-8)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\5\\-20\end{pmatrix}.$$

Zu jedem Vektor $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ gibt es einen **Gegenvektor** $\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}$. Der Gegenvektor beschreibt den jeweiligen „Rückweg“. Den Gegenvektor zu einem Vektor $\vec{a}$ bezeichnet man mit $-\vec{a}$.

Es gilt $\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Der Vektor $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ heißt **Nullvektor** und wird mit $\vec{o}$ bezeichnet. Er ist der einzige Vektor, der nicht mit Pfeilen dargestellt werden kann.

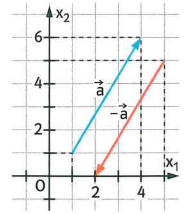


Fig. 1

Für zwei Vektoren $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ und eine reelle Zahl r gilt für

die Summe $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$;

das Produkt $r \cdot \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r \cdot a_1\\r \cdot a_2\end{pmatrix}$ bzw. $r \cdot \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r \cdot a_1\\r \cdot a_2\\r \cdot a_3\end{pmatrix}$.

Beachte:
Statt $\vec{a} + (-\vec{b})$ schreibt man kurz $\vec{a} - \vec{b}$.

Einen Ausdruck wie $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$ nennt man **Linearkombination**.
Für die Addition von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gelten
das **Kommutativgesetz** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ und
das **Assoziativgesetz** $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
Für die Multiplikation von reellen Zahlen r und s mit Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gelten
das **Assoziativgesetz** $r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (r \cdot s) \cdot \vec{a}$ und
die **Distributivgesetze** $r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$; $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$.
Zur Begründung dieser Gesetze siehe Fig. 2 und Fig. 3 sowie die Aufgabe 16 auf Seite 86.

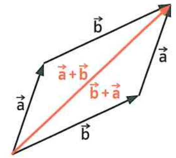


Fig. 2

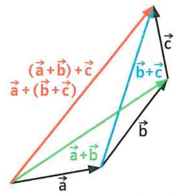


Fig. 3

Beispiel 1 Rechnen mit Vektoren
Berechne

a) $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-7\\5\end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}12\\18\end{pmatrix}$ d) $(-3) \cdot \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\-2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Lösung

a) $\begin{pmatrix}4+7\\2+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-2-1\\-1+7\\3-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} \cdot 12\\\frac{1}{2} \cdot 18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}-3 \cdot \frac{4}{3}\\-3 \cdot (-2)\\-3 \cdot \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\6\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

Beispiel 2 Mittelpunkt einer Strecke
Bestimme den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ mit P(2|5) und Q(4|3).
Lösung:
Siehe Fig. 4.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}4-2\\3-5\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

M(3|4) ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$.

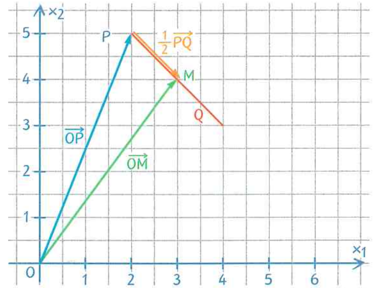


Fig. 4

Aufgaben

1 Berechne und zeichne.

a) $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

2 Berechne.

a) $\begin{pmatrix}4\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}4\\4\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\1\\4\end{pmatrix}$

3 a) $7\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\5\end{pmatrix}$ b) $(-3)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\11\end{pmatrix}$ c) $(-5)\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}$ e) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\begin{pmatrix}10\\11\\12\end{pmatrix}$ f) $0\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

4 Schreibe als Produkt aus reeller Zahl und Vektor mit ganzzahligen Koordinaten.

a) $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}5\\\frac{2}{5}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-8\\12\\36\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}39\\0\\-52\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}12\\-\frac{5}{6}\\-\frac{1}{8}\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}\frac{3}{11}\\-\frac{5}{22}\\\frac{7}{33}\end{pmatrix}$

5 Verdeutliche die Rechnung mithilfe einer Zeichnung wie in Fig. 1.

a) $2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ b) $4\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

c) $3\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ d) $\frac{3}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}$

e) $-\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ f) $0{,}5\cdot\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}-1{,}5\cdot\begin{pmatrix}9\\2\end{pmatrix}$

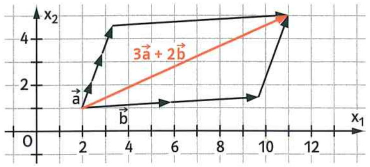


Fig. 1

6 Verdeutliche die Linearkombination mithilfe einer Zeichnung.

a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

d) $2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}-0{,}5\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ f) $2\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

7 Berechne die Koordinaten des Vektors, der durch die Linearkombination gegeben ist.

a) $2\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\-3\end{pmatrix}$ b) $3\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}+7\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\1\end{pmatrix}$ c) $3\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}+7\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ e) $3\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$ f) $4\cdot\begin{pmatrix}0{,}5\\3\\1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0{,}8\\2\\3\end{pmatrix}$

g) $2\cdot\begin{pmatrix}-2\\-3{,}5\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2\\3{,}5\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ h) $4\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0{,}5\\\frac{2}{5}\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-0{,}3\\0{,}2\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

8 Vereinfache.

a) $7\vec{a}+5\vec{a}$ b) $3\vec{d}-4\vec{e}+7\vec{d}-6\vec{e}$ c) $2{,}5\vec{u}-3{,}7\vec{v}-5{,}2\vec{u}+\vec{v}$

d) $6{,}3\vec{a}+7{,}4\vec{b}-2{,}8\vec{c}+17{,}5\vec{a}-9{,}3\vec{c}+\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}$ e) $2(\vec{a}+\vec{b})+\vec{a}$

f) $-(\vec{u}-\vec{v})$ g) $2(2\vec{a}+4\vec{b})$ h) $-4(\vec{a}-\vec{b})-\vec{b}+\vec{a}$

i) $3(\vec{a}+2(\vec{a}+\vec{b}))$ j) $6(\vec{a}-\vec{b})+4(\vec{a}+\vec{b})$ k) $7\vec{u}+5(\vec{u}-2(\vec{u}+\vec{v}))$

9 Gib eine Linearkombination mit den Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ bzw. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ an. Diese sollen vom Partner veranschaulicht werden.

Bist du sicher?

1 Berechne die Koordinaten des Vektors, der durch die Linearkombination gegeben ist.

a) $\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix}14\\49\\-21\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\-7\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-20\\15\\5\end{pmatrix}+0{,}5\cdot\begin{pmatrix}40\\7\\-20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-0{,}5\\-1{,}2\\-7\end{pmatrix}$ c) $0{,}2\cdot\begin{pmatrix}5\\-5\\10\end{pmatrix}-\frac{3}{2}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\10\\12\end{pmatrix}$

2 Verdeutliche die Linearkombination mithilfe einer Zeichnung.

a) $2\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ c) $0{,}5\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

10 In einem Dreieck ABC sind die Punkte M_a, M_b und M_c die Mittelpunkte der Dreieckseiten (Fig. 1).
Bestimme die Koordinaten der Punkte M_a, M_b und M_c für
a) A(0|0); B(3|1); C(1|3),
b) A(0|0|0); B(3|1|2); C(1|3|4),
c) A(1|3); B(4|2); C(2|5),
d) A(1|1|1); B(1|1|2); C(3|5|4).

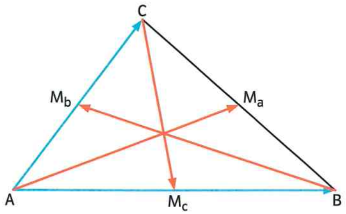


Fig. 1

11 In jedem Dreieck schneiden sich die Verbindungsstrecken der Eckpunkte mit den gegenüberliegenden Seitenmitten in einem Punkt S (Fig. 2). Der Punkt S teilt jede dieser Verbindungsstrecken im Verhältnis 1:2. Bestimme die Koordinaten des Punktes S in einem Dreieck ABC mit
a) A(1|1); B(5|5); C(3|7),
b) A(0|0|0); B(2|3|4); C(−1|5|−2).

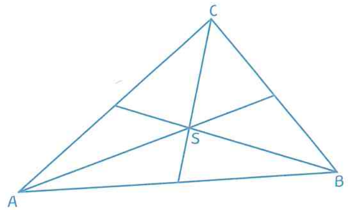


Fig. 2

12 Die Punkte A, B, C und D mit A(7|7|7); B(3|2|1) und C(4|5|6) sind die Ecken eines Parallelogramms. Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes dieses Parallelogramms.

13 Legt für euer Klassenzimmer ein Koordinatensystem fest.
a) Spannt eine Schnur quer durch das Zimmer, zum Beispiel vom Türgriff zu einem Fenstergriff.
Markiert auf der Schnur ihren Mittelpunkt. Bestimmt nun die Koordinaten des Mittelpunktes der zwischen Tür- und Fenstergriff aufgespannten Schnur.
b) Bestimmt die Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke, die begrenzt wird von dem Diagonalenschnittpunkt einer Wand und dem Diagonalenschnittpunkt der Zimmerdecke.

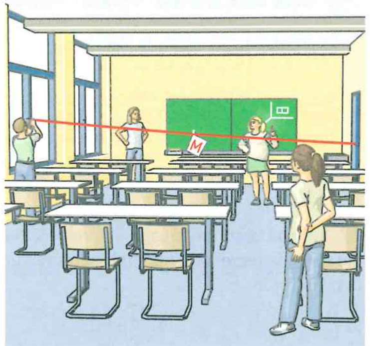


Fig. 3

Kannst du das noch?

14 Eine Firma startet in einem Bundesland eine Werbekampagne für ein neues Produkt. In einem lokalen, privaten TV-Sender wird zunächst einen Monat lang täglich insgesamt eine Minute geworben, dann einen Monat lang zwei Minuten usw. Die Grafik zeigt den Zusammenhang zwischen Werbedauer und Verkaufszahlen im Empfangsgebiet des Senders.
a) Welchen Zusammenhang kann man aufgrund der Grafik vermuten?
b) Erfahrungsgemäß kann man die Entwicklung der Daten der Grafik auf die ersten fünf Monate übertragen. Welche Verkaufszahlen sind insgesamt für die ersten $4\frac{1}{2}$ Monate zu erwarten?

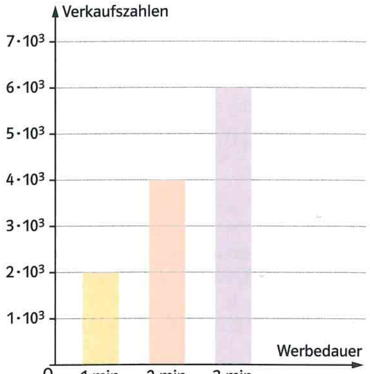


Fig. 1

15 Betrachtet wird der Quader ABCDEFGH in Fig. 2.
Stelle mithilfe einer Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$; $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar
a) den Vektor $\overrightarrow{AG}$,
b) den Vektor $\overrightarrow{BH}$,
c) den Vektor $\overrightarrow{EC}$,
d) den Vektor $\overrightarrow{BM}$,
e) den Vektor $\overrightarrow{ME}$.

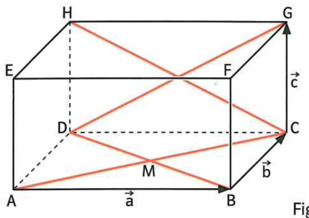


Fig. 2

16 Das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz der Addition wurden auf Seite 83 mithilfe von Fig. 2 und Fig. 3 verdeutlicht. Diese Gesetze kann man auch rechnerisch begründen.
Zum Beispiel:

Ist $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, so gilt

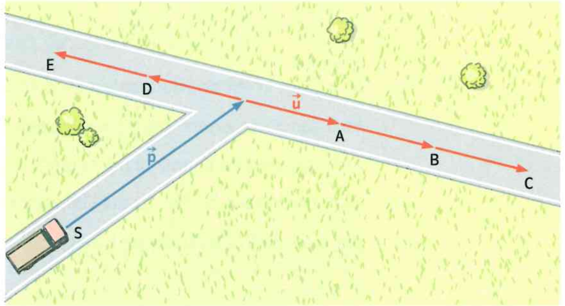
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}.$$

a) Begründe rechnerisch das Assoziativgesetz der Addition von Vektoren.
b) Begründe rechnerisch das Assoziativgesetz der Multiplikation von Zahlen mit Vektoren.
c) Begründe rechnerisch die Distributivgesetze der Multiplikation von Zahlen mit Vektoren.

17 Welche besondere Lage in einem Koordinatensystem haben die Pfeile der Vektoren, die mithilfe einer Linearkombination festgelegt werden können aus den folgenden beiden Vektoren

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4 Geraden



Vom Startpunkt S fährt jeweils ein Wagen zu den Punkten A, B, C, D und E. Beschreibe die vier Wege mithilfe der Vektoren $\vec{p}$ und $\vec{u}$. Beschreibe die Lage der Punkte A bis E.

Mithilfe von Vektoren ist es möglich, Geraden in der Ebene und Geraden im Raum anzugeben.

Geraden in der Ebene

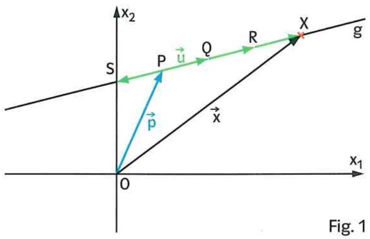


Fig. 1

Geraden im Raum

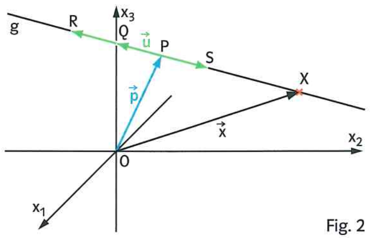


Fig. 2

Sowohl in Fig. 1 als auch in Fig. 2 ist jeweils $\vec{q} = \vec{p} + 1 \cdot \vec{u}$ der Ortsvektor des Punktes Q, $\vec{r} = \vec{p} + 2 \cdot \vec{u}$ der Ortsvektor des Punktes R und $\vec{s} = \vec{p} + (-1) \cdot \vec{u}$ der Ortsvektor des Punktes S.
Sowohl in Fig. 1 als auch in Fig. 2 liegen die jeweiligen Punkte P, Q, R und S auf einer Geraden g.
Immer dann, wenn für einen Ortsvektor $\vec{x}$ eines Punktes X gilt: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$, dann liegt der Punkt X auf der Geraden g in Fig. 1 bzw. Fig. 2.
Würde man in der Gleichung $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ für r nacheinander alle reellen Zahlen einsetzen, dann erhielte man die Ortsvektoren aller Punkte der jeweiligen Geraden g.

Jede Gerade lässt sich durch eine Gleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ $(r \in \mathbb{R})$ beschreiben.
Der Vektor $\vec{p}$ heißt **Stützvektor**. Er ist der Ortsvektor zu einem Punkt P, der auf der Geraden g liegt.
Der Vektor $\vec{u}$ heißt **Richtungsvektor**.

Zeichnen einer Geraden im Raum

Gegeben ist eine Gerade g mit

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Schritt:
Man trägt in ein Koordinatensystem den Pfeil des Stützvektors $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein, dessen Anfangspunkt im Koordinatenursprung liegt. Der Vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist der Ortsvektor des Punktes P(2|4|3). Dieser Punkt liegt auf der Geraden g.

2. Schritt:
Man zeichnet den Pfeil des Richtungsvektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, dessen Anfangspunkt an der Spitze des Pfeils von $\vec{p}$ liegt. Man zeichnet die Gerade g so, dass der Pfeil von $\vec{u}$ auf g liegt.

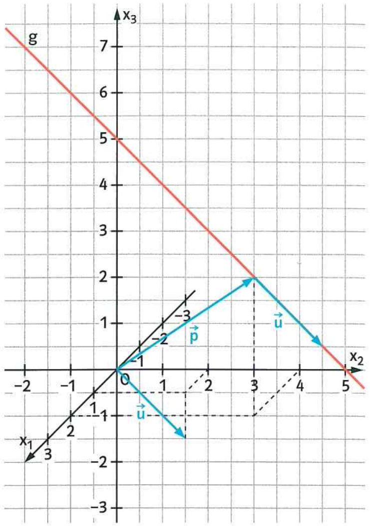


Fig. 1

Die Schreibweise g: $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ bedeutet: die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$.

Beispiel 1 Punkte bestimmen

Gib drei Punkte an, die auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ liegen.

Lösung:

Setzt man in die gegebene Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ für t nacheinander z. B. die Werte 0; 1 und −1 ein, so erhält man die Vektoren

$$\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \vec{x_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{x_{-1}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Punkte $X_0(2|1|3)$, $X_1(1|4|5)$ und $X_{-1}(3|-2|1)$ liegen auf der Geraden g.

Beispiel 2 Gerade bestimmen

Die Punkte A(1|−2|5) und B(4|6|−2) liegen auf der Geraden g. Bestimme eine Gleichung für die Gerade g.

Lösung:

Da A auf g liegt, ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ein möglicher Stützvektor von g.

Da A und B auf g liegen, ist der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$ ein möglicher Richtungsvektor von g.

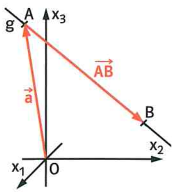


Fig. 2

Man erhält g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Es könnte z. B. auch $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor gewählt werden.

Beispiel 3 Punktprobe

Überprüfe, ob der Punkt A(−7|−5|8) auf der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ liegt.

Lösung:

Wenn A auf g liegt, dann muss es eine reelle Zahl t geben, die die Gleichung

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ erfüllt. Aus $3 + t \cdot 5 = -7$ folgt $t = -2$ und es gilt sowohl $(-1) + (-2) \cdot 2 = -5$ als auch $2 + (-2) \cdot (-3) = 8$. A liegt somit auf g.

Aufgaben

1 Gib mithilfe von Vektoren eine Gleichung für die Gerade g an und zeichne die Gerade in ein Koordinatensystem.

a) Die Gerade g geht durch den Punkt A(2|3) und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein Stützvektor von g.

b) Die Gerade g geht durch die Punkte A(−2|3) und B(5|−3).

c) Die Gerade g geht durch die Punkte A(2|0|1) und B(1|0|0).

2 Zeichne die Gerade g in ein Koordinatensystem ein.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ f) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 Prüfe, ob der Punkt X auf der Geraden g liegt.

a) X(1|1); g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) X(−1|0); g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

c) X(2|3|−1); g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ d) X(2|−1|−1); g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

4 Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme zwei Punkte, die auf der Geraden g liegen.

b) Bestimme einen Punkt, der auf der Geraden g liegt und dessen x_2-Koordinate Null ist.

c) Bestimme einen Punkt, der auf der Geraden g liegt und in der x_2x_3-Ebene liegt.

d) Zeichne die Gerade g in ein Koordinatensystem.

Der gesuchte Punkt P von Aufgabe 4 b) hat eine besondere Lage – welche?

5 Fig. 1 zeigt einen Würfel ABCDEFGH. Wähle geschickt ein Koordinatensystem und gib eine Gleichung der Geraden

a) durch A und C an,

b) durch B und D an,

c) durch E und G an,

d) durch A und G an,

e) durch B und H an.

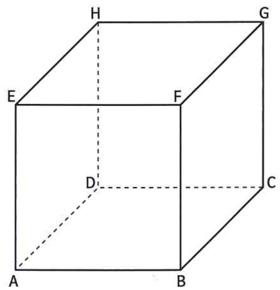


Fig. 1

6 Gib für ein ebenes Koordinatensystem die Gleichungen für die beiden Winkelhalbierenden zwischen der x_1-Achse und x_2-Achse an.

7 In Fig. 1, Fig. 2 und Fig. 3 ist jeweils eine Gerade rot gekennzeichnet, die auf einer Koordinatenachse liegt. Gib für jede dieser drei Geraden eine Gleichung an.

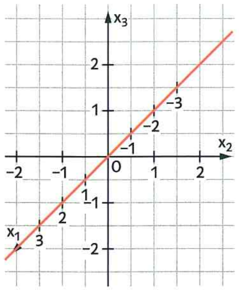


Fig. 1

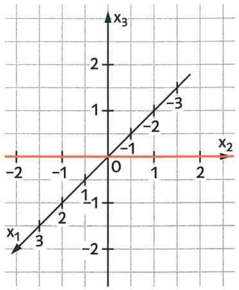


Fig. 2

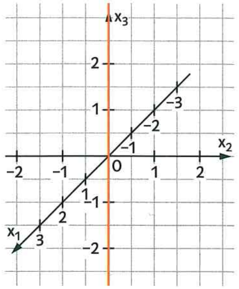


Fig. 3

8 Welche besonderen Geraden werden beschrieben durch

a) g: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) g: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, c) g: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Bist du sicher?

1 Gib eine Gleichung der Geraden an, auf der die Punkte A und B liegen.

a) A(4|7); B(7|4) b) A(1|2|3); B(3|2|1)

2 Betrachtet wird die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme die Koordinaten zweier Punkte P und Q, die auf der Geraden g liegen.
b) Liegen die Punkte A(1|0|−7) und B(7|−5|14) auf der Geraden g?

9 Die in Fig. 4 rot eingezeichneten Punkte sind jeweils Mittelpunkte einer Seitenfläche bzw. einer Kante. Bestimme für jede eingezeichnete Gerade eine Gleichung.

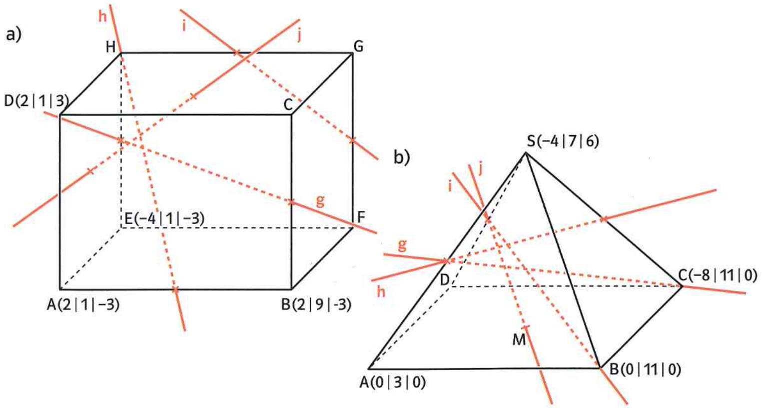


Fig. 4

10 Betrachtet wird die rote Gerade g in Fig. 1.
a) Gib drei verschiedene Gleichungen für die Gerade g an.
b) Bestimme die Koordinaten von drei verschiedenen Punkten A, B und C, die auf der Geraden g liegen.
c) Der Punkt P liegt auf der Geraden g und in der x_1x_2-Ebene. Bestimme die Koordinaten des Punktes P.

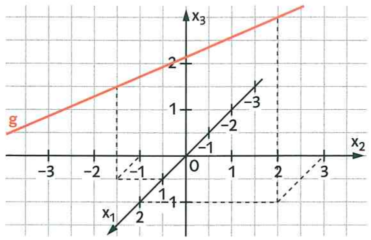


Fig. 1

11 Liegen die Punkte A, B und C auf einer Geraden?

a) A(2|3); B(6|8); C(10|13) b) A(3|0); B(−1|−4); C(5|3)
c) A(1|0|1); B(1|−7|1); C(2|−2|2) d) A(1|−1|1); B(−1|−2|−1); C(7|2|7)

12 Für den Quader in Fig. 2 gilt
$\overline{AB} = 4\,\text{cm}$; $\overline{BC} = 3\,\text{cm}$ und $\overline{AE} = 3{,}5\,\text{cm}$.
a) Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und gib die jeweiligen Koordinaten der Eckpunkte des Quaders an.
b) Gib eine Gleichung der grünen Geraden g in der Form $\vec{x} = \vec{b} + r \cdot \vec{u}$ an. Der Vektor $\vec{b}$ ist hierbei der Ortsvektor des Punktes B.

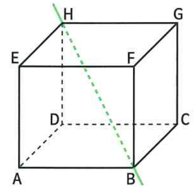


Fig. 2

c) Welche reellen Zahlen muss man in die Gleichung von Aufgabenteil a) einsetzen, damit man die Ortsvektoren aller Punkte der Strecke $\overline{BH}$ erhält?

13 Eine Strecke kann man mithilfe einer Vektorgleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und der Angabe, welche reellen Zahlen für r gewählt werden, beschreiben.
a) Beschreibe vektoriell die rote Strecke in Fig. 3.
b) Gib in vektorieller Form die Beschreibung einer 3 cm langen Strecke im Raum an. Diese Strecke soll zu keiner Koordinatenachse parallel sein.

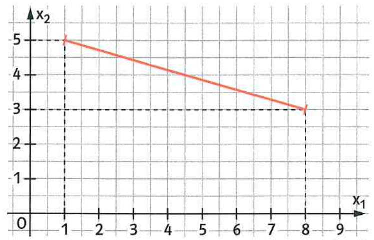


Fig. 3

14 Mithilfe von Gleichungen wie $y = mx + c$ kann man Geraden in der Ebene beschreiben. Man kann solche Geraden auch mithilfe von Vektoren in der Form $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ angeben.
a) Gib für die Gerade g in Fig. 4 eine Gleichung der Form $y = mx + c$ und eine Gleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ an.
b) Kann man am Richtungsvektor einer Geraden die Steigung der Geraden erkennen? Begründe deine Antwort.
c) Kann man aufgrund der Steigung einer Geraden einen Richtungsvektor angeben? Begründe deine Antwort.

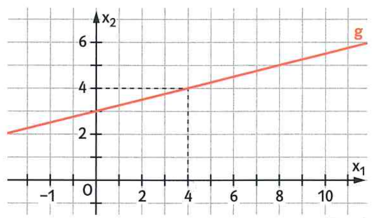
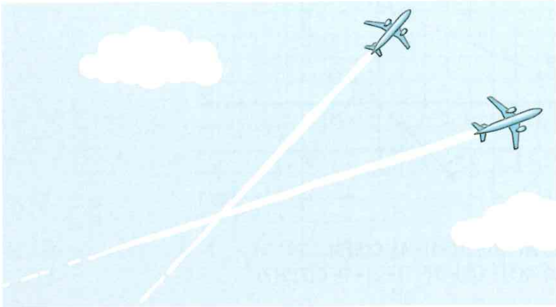


Fig. 4

5 Lage von Geraden



Kann man sicher sein, dass sich die Wege der beiden Flugzeuge gekreuzt haben? Begründe deine Antwort.

Zwei Geraden in der Ebene sind entweder zueinander parallel oder sie schneiden sich. Bei zwei Geraden im Raum kann zusätzlich der Fall eintreten, dass sie weder zueinander parallel sind noch gemeinsame Punkte besitzen. Solche Geraden heißen **zueinander windschief**.

Beachte:
Ist ein Vektor $\vec{a}$ ein Vielfaches eines Vektors $\vec{b}$, dann sind die Pfeile von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander parallel. Man sagt deshalb auch kurz:
Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind zueinander parallel.

Sich schneidende Geraden

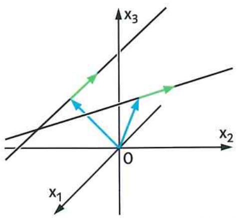


Fig. 1

Die Richtungsvektoren sind nicht zueinander parallel. Die Geraden haben einen gemeinsamen Punkt. Sie schneiden sich.

Zueinander parallele Geraden

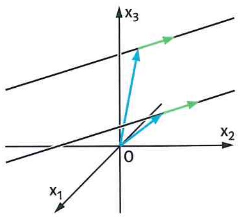


Fig. 2

Die Richtungsvektoren sind zueinander parallel. Die Geraden haben keine gemeinsamen Punkte. Sie sind zueinander parallel.

Zueinander windschiefe Geraden

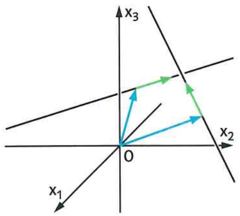


Fig. 3

Die Richtungsvektoren sind nicht zueinander parallel. Die Geraden haben keine gemeinsamen Punkte. Sie sind zueinander windschief.

Zwei Geraden g und h im Raum können
- sich schneiden. Sie besitzen einen einzigen gemeinsamen Punkt.
- zueinander parallel sein. Sie besitzen keine gemeinsamen Punkte.
- zueinander windschief sein. Sie besitzen keine gemeinsamen Punkte und sind nicht zueinander parallel.

Beachte: Zwei verschiedene Gleichungen können die gleiche Gerade beschreiben.

So kann man die Lage zweier Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$ bestimmen:

Sind die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zueinander parallel?

ja → Liegt der Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ auf der Geraden h?
- ja → Die zwei Gleichungen beschreiben die ***gleiche*** Gerade.
- nein → Die Geraden g und h sind zueinander ***parallel***.

nein → Hat die Gleichung $\vec{p} + r \cdot \vec{u} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$ eine einzige Lösung?
- ja → Die Geraden g und h ***schneiden*** sich.
- nein → Die Geraden g und h sind zueinander ***windschief***.

Beim Vorgehen in der rechten Hälfte des Diagramms werden lineare Gleichungssysteme und ihre Lösbarkeit verwendet. Bei sich schneidenden Geraden hat das LGS eine Lösung (Beispiel 1). Bei zueinander windschiefen Geraden hat das LGS keine Lösung (Beispiel 2).

Das Vorgehen wird in der linken Hälfte des Diagramms an den Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$ verdeutlicht.

1. Schritt: Man vergleicht die Richtungsvektoren.

$2 \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$. Also sind die Geraden g und h entweder identisch oder zueinander parallel.

2. Schritt: Man untersucht, ob g und h einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Der Punkt P mit dem Ortsvektor $\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}$ liegt auf der Geraden g. Liegt dieser Punkt auch auf der Geraden h, so beschreiben die zwei Gleichungen eine einzige Gerade. Andernfalls sind die Geraden g und h zueinander parallel.

Da $\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$ ist, liegt P auf g und auf h. Die beiden Gleichungen beschreiben eine einzige Gerade.

Beispiel 1 Sich schneidende Geraden

Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\-6\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

Lösung:

1. Schritt: *Vergleiche die Richtungsvektoren.*

Weil $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ ist, schneiden sich g und h oder sie sind windschief.

I: $7 + 2 \cdot r = 4 + s$
II: $-2 + 3 \cdot r = -6 + s$

I − II: $9 - r = 10$
$r = -1$
r eingesetzt in I:
$7 - 2 = 4 + s$
$s = 1$

2. Schritt: *Prüfe, ob es einen gemeinsamen Punkt gibt.*

g und h haben einen gemeinsamen Punkt, falls die Gleichung $\begin{pmatrix}7\\-2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-6\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

bzw. das Gleichungssystem $\begin{matrix}7 + 2 \cdot r = 4 + s\\ -2 + 3 \cdot r = -6 + s\\ 2 + r = -1 + 2 \cdot s\end{matrix}$ eine Lösung besitzt.

Das Gleichungssystem $\begin{matrix}7 + 2 \cdot r = 4 + s\\ -2 + 3 \cdot r = -6 + s\end{matrix}$ hat die Lösung $r = -1$ und $s = 1$. Dies ist auch eine Lösung für die dritte Gleichung $2 + r = -1 + 2 \cdot s$. Setzt man $r = -1$ in die Gleichung für g oder $s = 1$ in die Gleichung für h ein, so erhält man den Ortsvektor $\begin{pmatrix}5\\-5\\1\end{pmatrix}$.
Die Geraden g und h schneiden sich im Punkt S(5|−5|1).

Beispiel 2 Windschiefe Geraden
Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden g und h.
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-4\\-6\\2\end{pmatrix}$
Lösung:
1. Schritt: *Vergleiche die Richtungsvektoren.*
Weil $\begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix}-4\\-6\\2\end{pmatrix}$ ist, schneiden sich g und h oder sie sind zueinander windschief.
2. Schritt: *Prüfe, ob es einen gemeinsamen Punkt gibt.*
g und h haben einen gemeinsamen Punkt, falls die Gleichung $\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-4\\-6\\2\end{pmatrix}$

bzw. das Gleichungssytem $\begin{matrix}3 + 4 \cdot r = 1 - 4 \cdot s\\ 6 + 8 \cdot r = -6 \cdot s\\ 4 + 2 \cdot r = 3 + 2 \cdot s\end{matrix}$ eine Lösung besitzt.

Das Gleichungssystem $\begin{matrix}3 + 4 \cdot r = 1 - 4 \cdot s\\ 6 + 8 \cdot r = -6 \cdot s\end{matrix}$ hat die Lösung $r = -1{,}5$ und $s = 1$. Dies ist jedoch keine Lösung für die dritte Gleichung $4 + 2 \cdot r = 3 + 2 \cdot s$.
Die Geraden g und h sind zueinander windschief.

Aufgaben

1 Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g und h.
a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$
b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$
c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}$
d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\3\\9\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-13\\9\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$

2 Vergleiche die Richtungsvektoren und entscheide, ob sich die Geraden schneiden.
a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$
b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$
c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$
d) g: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$

3 Zwei der Geraden sind zueinander windschief. Wie kann man sofort erkennen, welche Geraden dies sind? Begründe deine Antwort.
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$; i: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

Info

Lösen von linearen Gleichungssystemen (LGS) mit dem GTR
Die Vektorgleichungen kann man auch mit dem GTR lösen.

Beispiel 1 Unendlich viele Lösungen (Fig. 1 und Fig. 2)

Der Vektorgleichung $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix}$ entspricht das LGS $\begin{matrix}2r - 4s = 2\\ 4r - 8s = 4\\ r - 2s = 1\end{matrix}$.

Die Koeffizienten des LGS werden als Matrix in den GTR eingegeben (Fig. 1). Der GTR verfügt über einen Befehl, mit dem die eingegebene Matrix vereinfacht wird. Die Rechnerausgabe (Fig. 2) bedeutet: Nur die Gleichung $r - 2t = 1$ bleibt übrig, das LGS hat also unendlich viele Lösungen.

Beispiel 2 Eine einzige Lösung (Fig. 3)

Der Vektorgleichung $\begin{pmatrix}7\\-2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-6\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ entspricht das LGS $\begin{matrix}2r - s = -3\\ 3r - s = -4\\ r - 2s = -3\end{matrix}$.

Die Koeffizienten des LGS werden als Matrix in den GTR eingegeben. Der GTR vereinfacht die Matrix so, dass man die Lösung ablesen kann (Fig. 3). Die Rechnerausgabe bedeutet: $r = -1$; $s = 1$.

Beispiel 3 Keine Lösung (Fig. 4)

Der Vektorgleichung $\begin{pmatrix}7\\-2\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\8\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-4\\-6\\2\end{pmatrix}$ entspricht das LGS $\begin{matrix}4r + 4s = -6\\ 8r + 6s = 2\\ 2r - 2s = 1\end{matrix}$.

Die letzte Zeile der ausgegebenen Matrix bedeutet: $0 \cdot r + 0 \cdot s = 1$. Diese Gleichung ist nicht lösbar; das heißt, das Gleichungssystem hat keine Lösung.

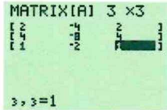


Fig. 1

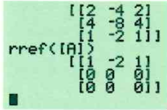


Fig. 2: *Die letzten beiden Gleichungen fallen weg.*

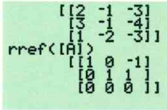


Fig. 3: *Die letzte Gleichung fällt weg.*

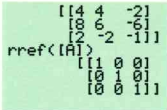


Fig. 4: *Die letzte Zeile zeigt, dass es keine Lösung gibt.*

4 Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden g und h und bestimme ggf. die Koordinaten des Schnittpunktes.
a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$
b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$
c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-5\\-10\end{pmatrix}$

Kommen wie in Aufgabe 4 bei zwei Geradengleichungen jeweils die gleichen Bezeichnungen (z.B. t) vor, dann muss man vor der rechnerischen Bestimmung der Lage der Geraden in einer Gleichung andere Buchstaben wählen. Warum?

5 Die Schnittpunkte der Geraden g, h, i sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC. Berechne die Koordinaten von A, B und C.
a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-7\\7\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; i: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$
b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-2\\-4\\6\end{pmatrix}$; i: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\3\\-8\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}11\\-2\\-13\end{pmatrix}$

6 Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Berechne gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes S.
a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-6\\-3\\3\end{pmatrix}$
b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$
c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$
d) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\-15\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-0{,}5\\1\\0\end{pmatrix}$

7 Gib eine Gleichung für eine Gerade h an, die die Gerade g schneidet, eine Gerade i, die zur Geraden g parallel ist, und eine Gerade j, die zur Geraden g windschief ist.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}7\\3\\1\end{pmatrix}$ b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ c) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$

Bist du sicher?

1 Bestimme die Lage der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\3\\-3\end{pmatrix}$.

2 Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden g und h.
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}12\\-7\end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

8 a) Bestimme die Gleichungen zweier Geraden im Raum, die sich schneiden. Dein Tischnachbar soll anhand der beiden Gleichungen die Koordinaten des Schnittpunktes bestimmen.
b) Gib deinem Tischnachbarn die Gleichung einer Geraden, zu der er die Gleichung einer windschiefen Geraden bestimmen soll.

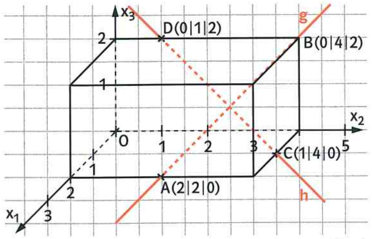


Fig. 1

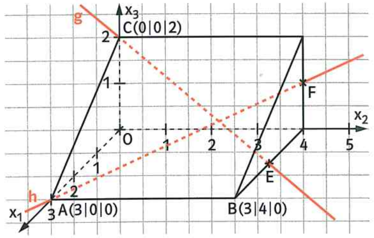


Fig. 2

9 a) Schneiden sich die Geraden g und h in Fig. 1?
b) In Fig. 2 sind die Punkte E und F Kantenmitten. Schneiden sich die Geraden g und h?

10 Der große Würfel in Fig. 3 besteht aus 27 kleinen Würfeln.
a) Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und bestimme die Koordinaten der Eckpunkte des großen Würfels.
b) Die Ecke des kleinen Würfels in der Mitte, die der Ecke E_1 des großen Würfels am nächsten liegt, heißt E_3. Bestimme die Gleichungen der Geraden durch E_1 und E_3, durch P_1 und E_2 und durch P_2 und E_2. Wie liegen diese Geraden zueinander?

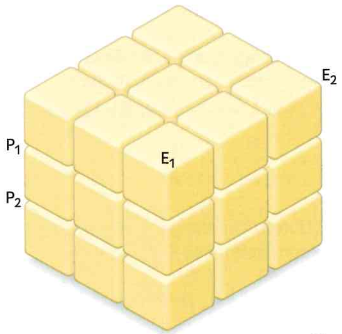


Fig. 3

11 Kann man sofort erkennen, ob sich die Geraden mit den Gleichungen $y = 3{,}5x - 7$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\14\end{pmatrix}$ schneiden? Begründe deine Antwort.

Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen

1 Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte A(1|1|1); B(−1|−1|−1) und C(2|−2|2) ein. Auf welchen besonderen Geraden liegen diese Punkte?

2 Auf dem Dach einer Diskothek sind im Abstand von 3 m zwei sogenannte Laserkanonen angebracht (Fig. 3). Ihre Lichtstrahlen zeichnen Geraden mit wechselnder Richtung in den Abendhimmel. Beschreibe mithilfe von Vektoren jeweils eine solche rote und eine solche blaue Gerade, die
a) sich schneiden, b) zueinander parallel sind, c) zueinander windschief sind.

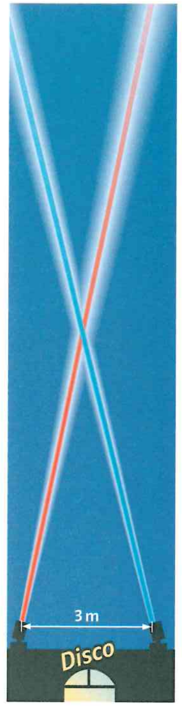


Fig. 3

3 Die Punkte A(2|0|0); B(−1|2|−1); C(−2|3|4) und D(3|4|−2) werden wie bei einem Spiegel an einer Ebene im Raum gespiegelt. Bestimme die Koordinaten der Bildpunkte A′, B′, C′ und D′ bei a) Spiegelung an der x_1x_2-Ebene, b) Spiegelung an der x_2x_3-Ebene.

4 Fig. 1 zeigt ein regelmäßiges Sechseck. In dieses Sechseck wurden Pfeile verschiedener Vektoren eingezeichnet.
a) Drücke die Vektoren $\vec{c}$, $\vec{d}$ und $\vec{e}$ jeweils durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.
b) Drücke die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ jeweils durch die Vektoren $\vec{d}$ und $\vec{e}$ aus.

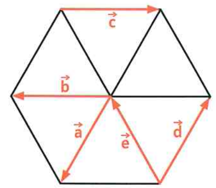


Fig. 1

5 Fig. 2 zeigt ein Zimmer, in das eine Raumdiagonale eingezeichnet ist. Diese Raumdiagonale legt eine Gerade g fest.
a) Lege für das Zimmer ein Koordinatensystem fest.
b) Bestimme für die Gerade g eine Gleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + r\cdot\vec{u}$.
c) Bestimme für eine Bodendiagonale eine Gleichung der Form $y = mx + b$.

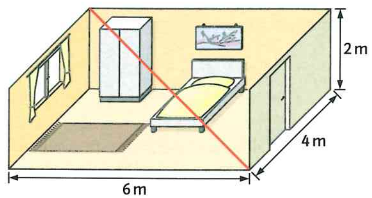


Fig. 2

Kannst du das noch?

6 a) Gib eine Alltagssituation an, bei der eine proportionale Zuordnung auftritt.
b) Gib eine Alltagssituation an, bei der eine antiproportionale Zuordnung auftritt.

7 Welche Tabelle könnte zu einer proportionalen Zuordnung gehören, welche Tabelle zu einer antiproportionalen Zuordnung?

x	0,5	10	1,25
y	10	0,5	4

x	3,4	0,68	10,2
y	0,5	0,1	1,5

8 a) Eine Reisegruppe mit 50 Personen zahlt für einen Museumsbesuch insgesamt 430 €. Hierin ist der Eintrittspreis pro Person und der Pauschalpreis für die Führung enthalten. Eine zweite Gruppe von 45 Personen zahlt bei gleichem Eintrittspreis pro Person und bei gleichem Pauschalpreis für die Führung 390 €. Welchen Gesamtpreis müsste eine Gruppe von 48 Personen bei gleichen Bedingungen bezahlen?

9 Der Stab in Fig. 1 wird senkrecht von oben beleuchtet. Zwischen ihm und seinem Schatten ist ein Winkel von 60°.
a) Lege ein räumliches Koordinatensystem fest.
b) Bestimme eine Gleichung für die Gerade, die durch den Schatten festgelegt wird.
c) Bestimme eine Gleichung für die Gerade, die durch den beleuchteten Stab festgelegt wird.

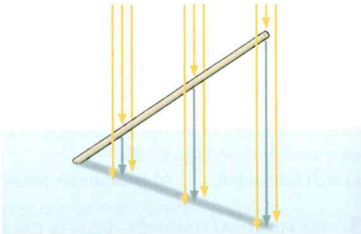


Fig. 1

10 Das Dach des Sonnenschirms bildet eine Pyramide mit quadratischem Grundriss. Die Grundfläche der Pyramide ist $4\,m^2$ groß. Der Ständer des Sonnenschirms ragt 2,50 m aus dem Boden heraus. Die unteren Kanten des Schirms befinden sich 2 m über dem Boden.
a) Lege ein räumliches Koordinatensystem fest.
b) Bestimme die Gleichungen der Geraden, die durch die Kanten der Pyramide festgelegt sind.

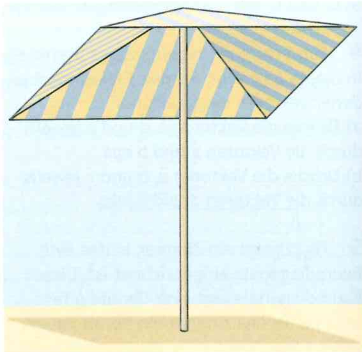


Fig. 2

11 Gib mithilfe von Vektoren eine Gleichung einer Geraden an, die durch den Punkt P geht und zur Geraden h parallel ist.

a) $P(0|0)$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $P(0|-1|2)$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

12 Fig. 3 zeigt einen Würfel. Die roten Geraden g und h gehen durch die eingezeichneten Kantenmitten. Die blauen Geraden gehen alle durch den Punkt $Q(0|0|2)$ und durch einen Punkt auf der rechten vorderen Kante, die parallel zur x_3-Achse ist. Die blauen Punkte auf dieser Kante haben alle die x_1-Koordinate 2 und die x_2-Koordinate 2. Die x_3-Koordinaten dieser Punkte liegen zwischen den Zahlen 0 und 2. Ein solcher Punkt kann mit $P_a(2|2|a)$ angegeben werden; hierbei gilt $0 \leqq a \leqq 2$. Die jeweilige Gerade durch Q und P_a wird mit g_a bezeichnet.
Bestimme a so, dass sich g und g_a (h und g_a) schneiden.

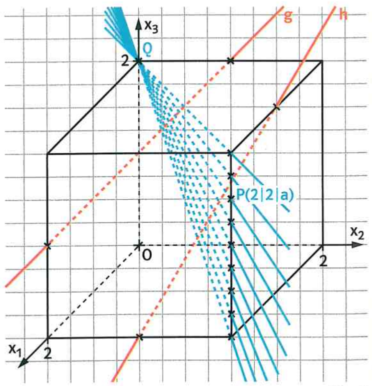


Fig. 3

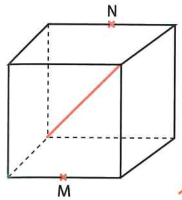


Fig. 1

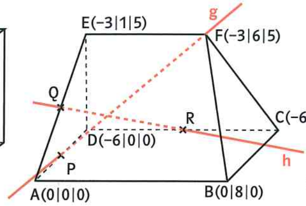


Fig. 2

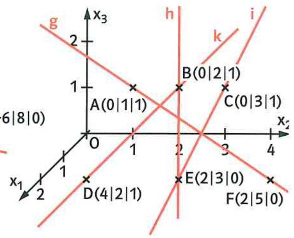


Fig. 3

13 Fig. 1 zeigt einen Würfel. Die Punkte M und N sind jeweils die Mitte einer Kante des Würfels. Schneidet die rot eingezeichnete Diagonale die Strecke $\overline{MN}$?

14 In Fig. 2 sind die Punkte P, Q und R die Mitten der jeweiligen Kanten. Schneiden sich die Geraden g und h oder sind sie zueinander windschief?

15 Untersuche die gegenseitigen Lagen der Geraden g, h, i und k von Fig. 3.

16 Setzt man für t verschiedene Zahlen ein, so erhält man die Gleichungen verschiedener Geraden. Die Gerade, die man zum Beispiel durch Einsetzen der Zahl 3 für t erhält, wird mit g_3 bezeichnet usw. Bestimme eine Zahl für t, so dass die Geraden sich schneiden. Bestimme anschließend eine Zahl t, so dass g_t und h_t zueinander windschief sind.

a) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4t \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3t \end{pmatrix}$; $h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2t \\ 4 \end{pmatrix}$

17 Gibt es für die Variablen a, b, c und d Zahlen, so dass $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} b \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$

a) identisch sind,
b) zueinander parallel und verschieden sind,
c) sich schneiden,
d) zueinander windschief sind?

18 Die Gerade g in Fig. 4 durchstößt im Punkt P die x_1x_2-Ebene und im Punkt Q die x_2x_3-Ebene.
a) Dass der Punkt P in der x_1x_2-Ebene liegt, kann man an einer seiner Koordinaten erkennen. Gib diese Koordinate an.
b) Betrachtet wird die Gerade h mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimme die Koordinaten der Punkte R, S und T bei denen die Gerade h die x_1x_2-Ebene, die x_2x_3-Ebene und die x_1x_3-Ebene durchstößt.
c) Gib die Gleichung einer Geraden an, die nicht die x_1x_2-Ebene durchstößt.
d) Gib die Gleichung einer Geraden an, die weder die x_1x_2-Ebene noch die x_2x_3-Ebene durchstößt.

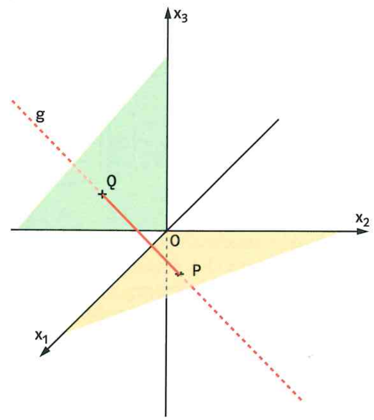


Fig. 4

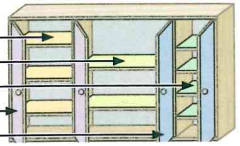
Vektoren als Warenlisten

Bei der Aufstellung von Warenlisten kann die Vektorschreibweise in Spalten sehr hilfreich sein. Eine Möbelfirma stellt Schränke in einem Baukastensystem her. Die Schrankmodelle Schwarzwald, Odenwald und Pfälzerwald haben alle den gleichen Korpus. Lediglich die Anzahlen der großen, mittleren und kleinen Einlageböden und die Anzahlen der gleich großen rechten und linken Türen sind verschieden.

Das Schrankmodell Schwarzwald besteht aus
- drei mittleren Einlegeböden,
- zwei großen Einlegeböden,
- vier kleinen Einlegeböden,
- zwei linken Türen,
- zwei rechten Türen.

Schrankmodell Schwarzwald

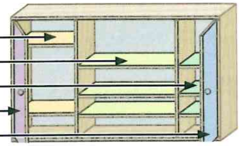
$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$



Beim Schrankmodell Odenwald bleibt der mittlere Teil offen, es besteht aus
- zwei mittleren Einlegeböden,
- drei großen Einlegeböden,
- drei kleinen Einlegeböden,
- einer linken Tür,
- einer rechten Tür.

Schrankmodell Odenwald

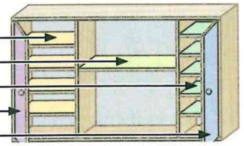
$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Auch beim Schrankmodell Pfälzerwald bleibt der mittlere Teil offen, es besteht aus
- vier mittleren Einlegeböden,
- einem großen Einlegeboden,
- fünf kleinen Einlegeböden,
- einer linken Tür,
- einer rechten Tür.

Schrankmodell Pfälzerwald

$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Werden nun sieben Schränke des Modells Schwarzwald, fünf des Modells Odenwald und zwölf des Modells Pfälzerwald bestellt, so kann man die Anzahlen der Einzelteile mithilfe von „Vektoren mit fünf Koordinaten" berechnen.

Es werden insgesamt benötigt:

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 12 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 79 \\ 41 \\ 103 \\ 31 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{79 mittlere Einlegeböden} \\ \text{41 große Einlegeböden} \\ \text{103 kleine Einlegeböden} \\ \text{31 linke Türen} \\ \text{31 rechte Türen} \end{array}$$

1 Am Gymnasium am Kaiserdom haben Schülerinnen und Schüler eine sogenannte Schulfirma gegründet. Diese Firma stellt vier verschieden gestaltete Briefbögen her und verkauft sie in drei Paketen.
Paket 1 enthält zwei Bögen der Sorte I, vier Bögen der Sorte II, drei Bögen der Sorte III und einen Bogen der Sorte IV. Paket 2 enthält drei Bögen der Sorte I, fünf Bögen der Sorte II, einen Bogen der Sorte III und einen Bogen der Sorte IV. Paket 3 enthält einen Bogen der Sorte I, einen Bogen der Sorte II, drei Bögen der Sorte III und fünf Bögen der Sorte IV. Gib eine Vektorgleichung an, mit der man aufgrund der Anzahlen der bestellten Pakete bestimmen kann, wie viele der einzelnen Bögen man benötigt.

Vektoren in der Physik

In der Physik gibt es zwei verschiedene Arten von Größen: Die **skalaren Größen** und die **vektoriellen Größen**.

Skalare Größen sind zum Bespiel die Masse und die Zeit. Zu ihrer Angabe benötigt man jeweils eine Maßzahl und eine Einheit. Die Angaben 2kg und 3h setzen sich aus den Maßzahlen 2 bzw. 3 und den Einheiten kg bzw. h zusammen.

Vektorielle Größen sind zum Beispiel die Kraft und die Geschwindigkeit. Zu ihrer Angabe benötigt man neben einer Maßzahl und einer Einheit auch noch eine Richtung. Man kann sie mithilfe von „Vektorpfeilen" angeben. Kennt man die Einheit der Größe, so stellt die Länge des Pfeils die Maßzahl dar.
Die Kräfte, mit der die Hunde ziehen, sind durch die Pfeile dargestellt. Ihre Kräfte wirken in verschiedene Richtungen. Der eine Pfeil ist doppelt so lang wie der andere, deshalb zieht der braune Hund mit doppelter Kraft.
Die Geschwindigkeiten der Autos sind ebenfalls durch Pfeile dargestellt. Sie fahren in verschiedene Richtungen. Da ihre Pfeile gleich lang sind, fahren sie gleich schnell.

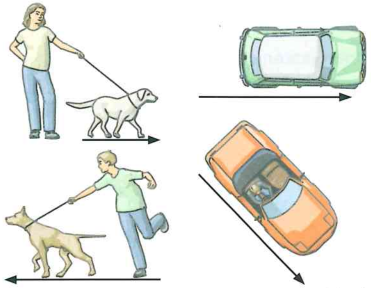


Fig. 1

Vektorielle Größen addiert man genau so wie die Vektoren, die wir aus der Geometrie kennen.

Das Flugzeug hat bei Windstille relativ zur Erde die Geschwindigkeit $\vec{v_1}$. Würde das Flugzeug nur – wie z.B. ein Heißluftballon – durch den Wind bewegt, so hätte es relativ zur Erde die Geschwindigkeit $\vec{v_2}$. Beide Geschwindigkeiten ergeben zusammen die Geschwindigkeit, mit der sich das Flugzeug tatsächlich relativ zur Erde bewegt.

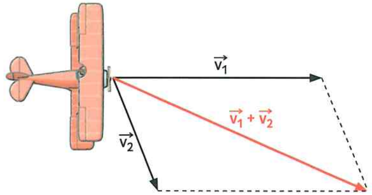


Fig. 2

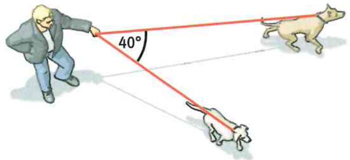


Fig. 3

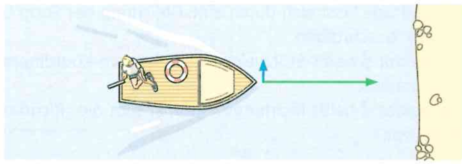


Fig. 4

2 Der Hund, der den Mann in Fig. 3 nach links zieht, zieht mit der Kraft von 4kN. Der Hund, der den Mann nach rechts zieht, zieht mit der Kraft von 3kN.
In welche Richtung und mit welcher Kraft wird der Mann insgesamt gezogen?

3 Das Boot in Fig. 4 fährt mit 5km/h direkt auf das rechte Flussufer zu (grüner Pfeil). Die Geschwindigkeit des Wassers relativ zum Ufer beträgt 1km/h (blauer Pfeil). Bestimme die Fahrtrichtung des Bootes, wenn der Bootsführer die Stellung des Steuers nicht veränderte, das Wasser jedoch plötzlich still stehen würde.

Rückblick

Koordinatensystem zeichnen

Die x_1-Achse zeichnet man nach vorn,
die x_2-Achse zeichnet man nach rechts und
die x_3-Achse zeichnet man nach oben.
Die Einheiten auf der x_1-Achse zeichnet man kleiner als die Einheiten auf den anderen Achsen. Wählt man z. B. auf der x_2-Achse und der x_3-Achse jeweils zwei Kästchen als Einheit, so kann man auf der x_1-Achse eine Kästchendiagonale als Einheit wählen.

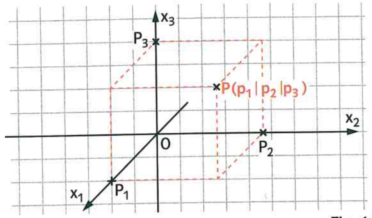


Fig. 1

Koordinaten eines Vektors bestimmen

Sind die Punkte $A(a_1 | a_2 | a_3)$ und $B(b_1 | b_2 | b_3)$ gegeben, so gilt für den Vektor, der einen Weg von A nach B beschreibt:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$.

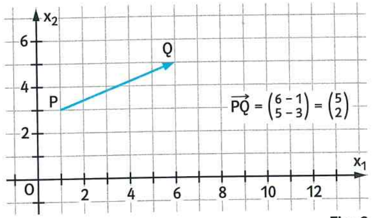


Fig. 2

Addition zweier Vektoren

Für zwei Vektoren $\binom{a_1}{a_2}$; $\binom{b_1}{b_2}$ bzw. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt

$\binom{a_1}{a_2} + \binom{b_1}{b_2} = \binom{a_1 + b_1}{a_2 + b_2}$ bzw. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$.

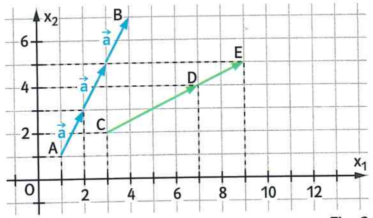


Fig. 3

$\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \vec{a} = 3 \cdot \binom{1}{2} = \binom{3 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \binom{3}{6}$

$\overrightarrow{CE} = 1{,}5 \cdot \overrightarrow{CD} = 1{,}5 \cdot \binom{4}{2} = \binom{1{,}5 \cdot 4}{1{,}5 \cdot 2} = \binom{6}{3}$

Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Vektor

Für einen Vektor $\binom{a_1}{a_2}$ bzw. $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und eine reelle Zahl r gilt:

$r \cdot \binom{a_1}{a_2} = \binom{r \cdot a_1}{r \cdot a_2}$ bzw. $r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$.

Beschreibung einer Geraden mithilfe von Vektoren

Jede Gerade lässt sich durch eine Gleichung der Form $\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ ($r \in \mathbb{R}$) beschreiben.
Der Vektor $\vec{p}$ heißt Stützvektor. Er führt vom Koordinatenursprung zur Geraden.
Der Vektor $\vec{u}$ heißt Richtungsvektor. Er gibt die „Richtung" der Geraden vor.

Lage von Geraden

Zwei Geraden g und h des Raumes können
- sich schneiden.
  Sie besitzen einen einzigen gemeinsamen Punkt.
- zueinander parallel sein.
  Sie besitzen keine gemeinsamen Punkte.
- zueinander windschief sein.
  Sie besitzen keine gemeinsamen Punkte und sind nicht zueinander parallel.

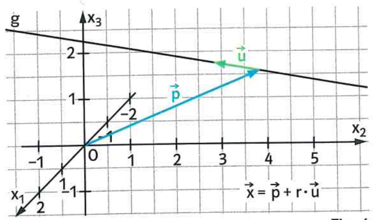


Fig. 4

Training

Runde 1

1 Berechne

a) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $2 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} - (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ c) $-0{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -49 \\ -77 \\ 14 \end{pmatrix}$

2 Gib die Koordinaten eines Punktes an, der
a) nicht in der x_2x_3-Ebene liegt,
b) in der x_2x_3-Ebene und in der x_1x_3-Ebene liegt,
c) weder in der x_2x_3-Ebene noch in der x_1x_2-Ebene liegt,
d) in der x_2x_3-Ebene und in der x_1x_3-Ebene, jedoch nicht in der x_1x_2-Ebene liegt.

3 Wie erkennt man an den Koordinaten eines Punktes, dass er
a) in der x_2x_3-Ebene liegt,
b) nicht in der x_1x_3-Ebene liegt,
c) weder in der x_1x_2-Ebene noch in der x_1x_3-Ebene liegt?

4 Zu dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ mit $A(1|2|3)$ und $B(5|-1|-7)$ und dem Vektor $\overrightarrow{CD}$ gehören dieselben Pfeile. Bestimme die Koordinaten des Punktes C für
a) $D(0|0|0)$, b) $D(-2|-3|-4)$, c) $D(117|-0{,}5|\frac{3}{8})$.

5 Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden g und h. Bestimme gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes.

a) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Runde 2

1 Gib zwei verschiedene Gleichungen an, die die gleiche Gerade im Raum beschreiben.

2 Fig. 1 zeigt eine Skizze eines Quaders. Für seine Kantenlängen gilt: $\overline{AB} = 5$ cm; $\overline{BC} = 3$ cm und $\overline{CG} = 4$ cm.
Der Punkt M ist die Mitte der Kante CG.
Schneiden sich die Geraden durch die Ecken A und M sowie B und H?
Begründe deine Antwort.

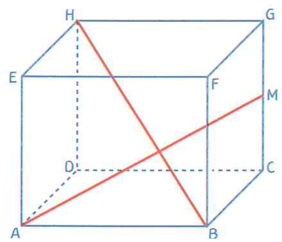


Fig. 1

3 Gib die Gleichungen zweier Geraden g und h des Raumes an, die
a) sich schneiden,
b) zueinander parallel sind,
c) zueinander windschief sind.

4 Schneiden sich die beiden Geraden g und h? Falls ja, bestimme den Schnittpunkt.

a) g: $\vec{x} = \binom{1}{7} + t \cdot \binom{1}{3}$; h: $\vec{x} = \binom{1}{2} + r \cdot \binom{3}{1}$ b) g: $\vec{x} = \binom{-1}{1} + t \cdot \binom{2}{6}$; h: $\vec{x} = \binom{2}{1} + r \cdot \binom{2}{6}$