Aufgabe 4.1. Betrachten Sie den affinen Raum $A = V = \mathbb{R}^2$. Sei $x_1 := (2,4) \in A$, $x_2 := (3,1) \in A$ sowie $f_1 \in \mathrm{SO}(2)$ die Drehung um den Ursprung im Uhrzeigersinn um 180 Grad und $f_2 \in \mathrm{SO}(2)$ die Drehung um den Ursprung gegen den Uhrzeigersinn um 90 Grad. Wir definieren (vgl. Beispiel (ii) im Skript auf Seite 17) die affinen Bewegungen

$$\phi_1 := \phi_{x_1,f_1}, \qquad \phi_2 := \phi_{x_2,f_2}.$$

(a) Machen Sie eine Skizze, die illustriert, wie ϕ_1 und ϕ_2 auf A operieren.

(b) Stellen Sie $\phi := \phi_2 \circ \phi_1$ auf *zwei Arten* in der Form

$$\tau_{\overrightarrow{x_0\phi(x_0)}} \circ \phi_{x_0,f}$$

dar (vgl. Korollar 2.8), einmal für $x_0 := x_1$ und einmal für $x_0 := x_2$.

(c) Machen Sie eine weitere Skizze, die illustriert, wie ϕ auf die zwei verschiedenen Arten dargestellt werden kann.

(6 Punkte)

Aufgabe 4.2. Sei k ein Körper und V, V' Vektorräume über k. Seien A und A' affine Räume über V bzw. V'. Beweisen Sie den ersten Teil der Bemerkung nach Definition 2.4 im Skript: Sei (ϕ, f) eine affine Abbildung von A nach A'. Dann gilt für alle $x, y \in A$:

$$f(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{\phi(x)\phi(y)}.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 4.3. Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ als affinen Raum über $\mathbb{R}$.

(a) Wir betrachten eine Drehung von 90 Grad um $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$ als eine lineare Abbildung in $\mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ wie im Satz 2.9. Zeigen Sie, dass es in $\mathbb{R}^2$ keine Eigenvektoren gibt, und finden Sie einen Eigenvektor in $\mathbb{R}^3$.

(b) Wir betrachten eine Translation um einen Vektor (v_1, v_2) in $\mathbb{R}^2$ als eine lineare Abbildung in $\mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$ wie im Satz 2.9. Finden Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren in $\mathbb{R}^3$.

(4 Punkte)

(Bitte wenden)

Aufgabe 4.4. Zeigen Sie, dass die Gruppe der affine Bewegungen transitiv auf der affinen Ebene operiert. Rechnen Sie die Standgruppen aus.

(4 Punkte)

Bonusaufgabe 4.5. Sei k ein Körper.

(a) Zeigen Sie, dass jeder Automorphismus von Inzidenzgeometrien $\phi\colon k^2 \to k^2$ parallele Geraden auf parallele Geraden abbildet.

(b) Zeigen Sie, dass jeder Automorphismus von Inzidenzgeometrien $\phi\colon k^2 \to k^2$ mit $\phi(0) = 0$ additiv ist, also $\phi(x + x') = \phi(x) + \phi(x')$ für alle $x, x' \in k^2$.

(4 Bonuspunkte)

Aufgabe 4.6 (Aufgabe mit Schulbezug)**.** Schon in der Grundschule werden Parkettierungen genutzt, um das Erkennen von Mustern und Strukturen zu fördern (Parkette legen, Parkette weiterzeichnen, Parkette selbst erfinden, ...). Die Regelmäßigkeiten, die solchen Mustern zu Grunde liegen, lassen sich mathematisch mit Hilfe von Invarianzabbildungen beschreiben. Frage: Welche Abbildungen lassen das nebenstehende Parkett invariant? Beschreiben Sie diese (unendlich vielen) Abbildungen möglichst systematisch.

(2 Bonuspunkte)