Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
StR Dr. Katharina Böcherer-Linder und M.Sc. Pedro Núñez

Aufgabe 1. Sind die folgenden Aussagen wahr? Antworten Sie jeweils im Kästchen rechts davon mit 'Ja' oder 'Nein' und geben Sie darunter eine kurze Begründung in ein bis zwei Sätzen.

Die 2-dimensionale Sphäre bildet eine Inzidenzgeometrie mit den Großkreisen als Geraden.	
Sei (V, A) ein affiner Raum zum k-Vektorraum V, wobei k ein Körper ist. Sei $x, y \in A$ mit $\overrightarrow{xy} = 0$. Dann ist $x = y$.	
Zwei verschiedene Geraden im zweidimensionalen projektiven Raum haben genau einen Schnittpunkt.	
Die Abbildung $z \mapsto z^{-1}$ ist eine Möbiustransformation über $\mathbb{C}$.	
Es gibt hyperbolische Bewegungen, die keine Fixpunkte haben.	
In der hyperbolischen Ebene gibt es zu jeder Geraden g und jedem Punkt P außerhalb von g genau eine parallele Gerade zu g durch P.	
Die Menge aller Verschiebungen in einer fast-euklidischen Ebene ist eine kommutative Gruppe.	
Sei (X, G, Z, K) eine fast-euklidische Ebene und $g \in G$ eine Gerade. Es gibt genau vier Kongruenzabbildungen k mit $k(g) = g$.	
Wenn zwei Teilmengen einer euklidischen Ebene kongruent sind, dann haben Sie die gleiche Anzahl von Elementen.	

(Bitte wenden)

Aufgabe 2. Sei $n \geq 2$ und seien $l \neq l'$ zwei verschiedene affine Geraden in $A = \mathbb{R}^n$, aufgefasst als affiner Raum über sich selbst. Zeigen Sie, dass $l \parallel l'$ im Sinne der affinen Geometrie, *genau dann*, wenn eine affine Ebene $E \subset A$ existiert mit $l, l' \subseteq E$ und $l \cap l' = \varnothing$.

Aufgabe 3. Sei $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ die projektive Ebene über $\mathbb{R}$ mit homogenen Koordinaten x_0, x_1, und x_2. Wir betrachten die Gerade L_1 durch die Punkte $[1 : 2 : 7]$ und $[5 : 3 : 9]$ und die Gerade L_2 durch die Punkte $[2 : 3 : 12]$ und $[3 : 15 : 3]$. Bestimmen Sie den Schnitt $L_1 \cap L_2$.

Aufgabe 4. Wir betrachten die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}^2$ und darin die hyperbolischen Geraden

$$g := \{r \cdot i \mid r \in \mathbb{R}_{>0}\} \quad \text{und} \quad h := \{r \cdot i + 1 \mid r \in \mathbb{R}_{>0}\},$$

sowie die Möbiustransformation φ_M gegeben durch

$$M := \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass das Bild $\varphi_M(g)$ von g parallel ist zum Urbild $\varphi_M^{-1}(h)$ von h, dass also gilt

$$\varphi_M(g) \parallel \varphi_M^{-1}(h).$$

Aufgabe 5. Sei (X, G, Z, K) eine euklidische Ebene.

(a) Definieren Sie den Begriff der Kongruenz von Winkeln.

(b) Formulieren und beweisen Sie den Gegenwinkelsatz.