# Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie

## Sommersemester 2024

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Fassung vom 17. Juli 2024

**Dies ist ein Vorlesungsskript und kein Lehrbuch.
Mit Fehlern muss gerechnet werden!**

Math. Institut
Ernst-Zermelo-Str.1
79104 Freiburg

0761-203-5560
annette.huber@math.uni-freiburg.de

# Kapitel 0

# Einleitung

Geometrie beschäftigt sich mit Objekten wie Kreisen, Kugeln und ähnlichem. Die eigentliche Heimat ist die *Differentialgeometrie*. Dort ist der zentrale Begriff der der Mannigfaltigkeit: ein topologischer Raum, der lokal so aussieht wie eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Man arbeitet dann mit der vollen Kraft der Analysis.

Viele geometrische Objekte (z.B. eben Kreis und Kugel) werden jedoch durch *Polynomgleichungen* beschrieben. Sie sind Objekte der *algebraischen* Geometrie. Die Voraussetzung ist sehr einschränkend, enthält aber viele interessante Beispiele. Historisch behandelte man zuerst den Grundkörper $\mathbb{C}$ und verwendete weiter analytische Methoden. Es gelang dann aber, immer mehr Sätze mit rein algebraischen Methoden zu beweisen. Der Vorteil ist, dass dann auch andere Grundkörper erlaubt werden können oder sogar beliebige Ringe. Mein Arbeitsgebiet, die arithmetische Geometrie, arbeitet vor allem über $\mathbb{Z}$.

In dieser Vorlesung werden wir uns auf Körper einschränken, meist algebraisch abgeschlossene. Es ist nicht falsch an $\mathbb{C}$ zu denken – aber Vorsicht in positiver Charakteristik.

## Algebraische Mengen

Wir beginnen mit der Einführung des zentralen Begriffes dieser Vorlesung:

**Definition 0.1.** *Sei $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Der* affine Raum der Dimension *$n$ über $k$ ist*

$$\mathbb{A}^n = k^n.$$

*Elemente von $\mathbb{A}^n$ heißen* Punkte*. Für $P = (a_1, \dots, a_n)$ heißen die $a_i$ Koordinaten von $P$. Wir interpretieren den Polynomring*

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = k[X_1, \dots, X_n]$$

*als Funktionen*

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^n &\to k\\ (a_1,\dots,a_n) &\mapsto f(a_1,\dots,a_n)\end{aligned}$$

*Sei $S \subset k[X_1,\dots,X_n]$ eine Teilmenge. Die durch $S$ definierte* algebraische Menge *ist die Menge*

$$V(S) = \{(x_1,\dots,x_n) \in k^n | f(x_1,\dots,x_n) = 0 \text{ für alle } f \in S\}$$

*Ist $S = \{f\}$, so heißt $V(f) = V(\{f\})$ auch* affine Hyperfläche*.*

**Beispiel.** (i) Sei $n = 1$, $f = X^2 + 1$. Dann gilt $V(f) = \{\pm\sqrt{-1}\}$. Dies sind zwei Punkte oder ein Punkt. Es ist nämlich

$$\sqrt{-1} = -\sqrt{-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{-1} = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$$

Zur Erinnerung: Der Körper $k$ hat *Charakteristik* 2 falls $2 = 0$ in $k$.

Ist der Körper nicht algebraisch abgeschlossen, so hat die Gleichung eventuell gar keine Lösungen. Diese Zusatzkomplikation wollen wir in diesem Semester umgeben, daher die Einschränkung auf algebraisch abgeschlossenes $k$.

(ii) Sei $n = 2$, $S = X^2 + Y^2 - 1$. Die Menge $V(f)$ hat unendlich viele Punkte - für jede Wahl von $x \in k$ zwei oder einen Wert $y$. Über den reellen Zahlen erhalten wir einen Kreis, aber natürlich ist $\mathbb{R}$ nicht algebraisch abgeschlossen. Über den komplexen Zahlen ist $V(f)$ als Mannigfaltigkeit eine Ebene.

(iii) $n = 2$, $S = \{X^2 + Y^2 - 1, X + 3Y\}$

$$x = -3y \Rightarrow 1 = 9y^2 + y^2 = 10y^2$$

Falls die Charakteristik von $k$ gleich 2 oder 5 ist, so ist die Gleichung unlösbar, also $V(S) = \emptyset$. Andernfalls ist $y = \pm 10^{-\frac{1}{2}}$ und $V(S)$ besteht aus zwei Punkten.

(iv) Sei $k = \mathbb{C}$, $n = 1$, $f = \sin(z)$. Dann ist

$$\{\sin(z) = 0\} = \mathbb{Z}\pi$$

Dies ist *keine* algebraische Menge. Zunächst ist sin kein Polynom. Ist $g \in \mathbb{C}[Z]$ ein Polynom, so hat $V(g)$ nur endlich viele Nullstellen, während $\sin(z)$ unendlich viele hat.

**Lemma 0.2.** *Sei $V(S) \subset \mathbb{A}^1_k$ eine algebraische Menge. Dann ist entweder $V(S) = \mathbb{A}^1$ oder $V(S)$ hat nur endlich viele Elemente.*

*Beweis:* Angenommen, es gibt $f \in S$ mit $f \neq 0$. Dann ist $V(S) \subset V(f)$. Als Polynom in einer Variablen hat $f$ nur endlich viele Nullstellen.
Andernfalls ist $S = \emptyset$ oder $S = \{0\}$ und wir haben $V(S) = \mathbb{A}^1_k$. $\square$

**Bemerkung.** Unterschiedliche Gleichungen können also die gleiche algebraische Menge definieren.

Allgemein bestehen alle null-dimensionalen algebraischen Mengen nur aus endlich vielen Punkten - aber dafür müssten wir erstmal definieren, was die Dimension einer Varietät ist. Dies (wie vieles andere auch) lesen wir an einem Ring ab, der zur Varietät gehört.

**Definition 0.3.** *Sei $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$ eine Teilmenge, $V = V(S)$. Dann heißt*

$$\mathcal{O}(V) = k[V] = \{f : V \to k \mid \text{ es gibt } F \in k[X_1, \dots, X_n], \; f(x_1, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_n) \text{ für alle } (x_1, \dots, x_n) \in V\}$$

affiner Koordinatenring *von $V$. Die Elemente von $k[V]$ heißen* algebraische Funktionen *auf $V$. Üblich ist auch der Name* reguläre Funktionen.

**Beispiel.** Sei $g \in k[X]$ nicht konstant, $V = V(g) = \{P_1, \dots, P_d\}$. Dann ist

$$k[V] \cong k^d \qquad f \mapsto (f(P_i))_{i=1}^d$$

wobei $k^d$ mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation zu einem Ring wird.

*Beweis:* Nach Definition von $k[V]$ ist die Zuordnung ein injektiver Ringhomomorphismus. Sei nun $(a_1, \dots, a_n) \in k^d$ ein Tupel. Das Polynom

$$F(X) = \sum_{i=1}^{d} (X - P_i + a_i) \prod_{j \neq i} \frac{X - P_j}{P_i - P_j}$$

erfüllt $F(P_i) = a_i$, denn $P_i$ ist Nullstelle jedes Summanden außer dem zu $i$. Dies ist das gesuchte Urbild. □

## Inhalt der Vorlesung

Wir wollen die Eigenschaften von algebraischen Mengen verstehen, dies bedeutet automatisch, dass wir ihre Koordinatenringe verstehen müssen. Dazu werden wir die Grundlagen der kommutativen Algebra erarbeiten, die auch in anderen Situationen angewendet wird, etwa in der algebraischen Zahlentheorie.
Konkret:

(i) Korrespondenz von affinen Varietäten und Koordinatenringen: Ideale, Hilbertscher Nullstellensatz

(ii) Zur Definition einer affinen Varietät reichen endlich viele Gleichungen aus: Theorie der noetherschen Ringe und Moduln

(iii) Funktionenkörper und lokale Ringe: Lokalisierung von Ringen und Moduln

(iv) Dimensionstheorie: ganze Ringerweiterungen und ihre Eigenschaften

(v) Singularitäten und Glattheit: reguläre Ringe (wenn die Zeit reicht)

(vi) Schnitte von Untervarietäten und Satz von Bézout: Graduierte Ringe, Hilbert-Samuel-Polynome

Vermutlich ist dann das Semester lange vorbei. Sonst wären algebraische Kurven und Riemann-Roch das natürliche nächste Ziel.

## Nötige Vorkenntnisse

Vor allem lineare Algebra 1 und 2. Der Inhalt der Vorlesung Algebra und Zahlentheorie wird *nicht* vorausgesetzt. Ehrlicherweise sollte gesagt sein, dass der Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes ohne diese Vorlesung vermutlich nicht zu verstehen ist. Diesen kann man aber als Blackbox benutzen, so dass es danach wieder weitergeht.
Zur algebraischen Geometrie passt als Ergänzung sehr gut Funktionentheorie, auch wenn in diesem Semester nicht klar werden wird, warum.

## Literatur

kommutative Algebra:

- Atiyah, MacDonald, Introduction to commutative algebra.
  Das Wichtigste schön kurz und knapp, aber auch sehr dicht geschrieben. Enthält Unmengen von Übungsaufgaben.

- Zariski, Samuel, Commutative algebra, Vol 1 und 2
  Klassiker. Enthält das Doppelte an Stoff, reicht auch für vertiefende Vorlesungen in algebraischer Geometrie.

- Bourbaki, Algèbre commutative (oder Commutative algebra)
  Enzyklopädisch, eher zum Nachschlagen als zum Erarbeiten.

- Matsumura, Commutative ring theory.

- Matsumura, Commutative algebra.
  Die beiden Matsumuras sind zwei verschiedene Bücher, nicht Neuauflage oder Band 1 und 2. Sie sind weder überschneidungsfrei noch deckungsgleich. Thematisch ähnlich ausführlich wie Zariski, Samuel, aber moderner.

- Eisenbud: Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry.
  Kenne ich noch nicht. Der Titel klingt genau richtig für unsere Vorlesung, der Inhalt scheint aber deutlich weiter zu gehen.

algebraische Geometrie:
Die Bücher zur algebraischen Geometrie fallen in (mindestens) drei Gruppen, je nachdem, was für $k$ erlaubt ist:

(i) $k$ algebraisch abgeschlossen. Das ist unser Fall, Theorie der Varietäten. Etwas veraltet, aber gut zugänglich.

(ii) $k = \mathbb{C}$ mit Einsatz von analytischen Methoden, oft eine schöne Ergänzung, wenn man sich in Funktionentheorie auskennt.

(iii) $k$ beliebiger Ring, Theorie der Schemata. Der allgemeinste Fall. Die Theorie der Varietäten ist ein Spezialfall, nicht etwa Voraussetzung. Da ich Zahlentheoretikerin bin, ist $k = \mathbb{Z}$ für mich besonders interessant. Wir werden uns aber dieses Semester (noch) nicht mit Schemata beschäftigen. Wer bei mir promoviert, kommt um Schemata nicht herum, wer Master macht vielleicht.

In diesem Sinne:

- Reid, Undergraduate Algebraic Geometry
  Knapp, gut lesbar, übersichtlich wie ein Vorlesungsskript, umfasst aber nicht den ganzen Stoff der Vorlesung.

- Shafarevich, Basic algebraic geometry
  Klassiker, sehr geometrisch, enthält das meiste, was man über Varietäten sagen kann.

- Fulton, Algebraic Curves
  Nach einer allgemeinen Einführung konzentriert sich der Text auf ebene Kurven, Bézout fehlt. Versucht mit möglichst wenig Technik auszukommen, ein wenig zu wenig für meinen Geschmack. Schöner Beweis von Riemann-Roch.

- Hartshorne, Algebraic Geometry
  Kapitel I behandelt Varietäten einschließlich der Schnittheorie im projektiven Raum, wie sie in der Vorlesung drankommt. Danach kommen Schemata und Kohomologie. Mir haben Kapitel II und III für die Promotion und noch einiges mehr gereicht.

- Mumford, The red book of varieties and schemes
  Die erste Hälfte Varietäten, die zweite Schemata. Im Niveau deutlich unter Hartshorne. Ich mag es persönlich sehr gerne, insbesondere wird die Dimensionstheorie vermutlich diesem Text folgen.

- Griffiths, Harris, Principles of algebraic geometry.
  Klassiker über $\mathbb{C}$ mit viel komplexer Analysis. Passt nicht zur Vorlesung, ist aber sonst sehr schön.

- Grothendieck Éléments de géométrie algébrique., kurz EGA
  *Die* Originalquelle zu Schemata. Enthält alle Grundlagen. Wer sich die Mühe macht, den Text komplett durchzuarbeiten, hat dann eine tolle Grundlage. Es sind mehrere Bände der Zeitschrift Publ. IHES, nämlich 4, 8, 11, 20, 24, 28, 32.

# Kapitel 1

# Grundbegriffe der algebraischen Geometrie

Den Begriff der affinen Menge und des Rings der algebraischen Funktionen kennen wir ja schon. Sei weiterhin $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper. Alle Ringe sind kommutativ mit 1. Alle Ringhomomorphismen bilden 1 auf 1 ab.

**Bemerkung.** Es gibt ein ärgerliches Problem mit der Frage, ob $1 = 0$ erlaubt sein soll. Zur Erinnerung: in einem Körper ist nach Voraussetzung $1 \neq 0$. Ist in einem Ring $0 = 1$, so folgt $a = 1a = 0a = 0$ für alle $a$, also enthält der Ring nur ein einziges Element. Wenn man ihn erlaubt, muss man ständig an den Ausnahmefall denken. Das ist lästig. Andererseits wollen wir gerne, dass die leere Menge auch einen Koordinatenring hat. Für $V(1) = \emptyset \subset \mathbb{A}^n$ setzen wir nämlich

$$\mathcal{O}(\emptyset) = 0.$$

Daher erlauben wir $1 = 0$. Auch der Nullring ist ein Ring mit 1.

**Definition 1.1.** *Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge. Es sei*

$$I(V) = \{f \in k[X_1, \dots, X_n] | f(P) = 0 \text{ für alle } P \in V\}$$

*das* Verschwindungsideal von *$V$.*

**Bemerkung.** (i) Falls $V = V(S)$ für $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$, so gilt nach Definition $S \subset I(V)$.

(ii) Für $f, g \in I(V)$ folgt $f + g \in I(V)$, denn

$$(f + g)(P) = f(P) + g(P) = 0 + 0 = 0 \text{ für alle } P \in V$$

(iii) Für $f \in I(V)$ und $g \in k[X_1, \dots, X_n]$ gilt $gf \in I(V)$, denn

$$(gf)(P) = g(P)f(P) = g(P)0 = 0 \text{ für alle } P \in V$$

D.h. $I(V)$ ist ein Ideal.

**Definition 1.2.** *Sei $A$ ein Ring. Eine Untergruppe $I \subset A$ heißt* Ideal, *falls für alle $x \in I$, $a \in A$ gilt $ax \in I$.*

**Lemma 1.3.** *Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist* $\mathrm{Ker}(\phi)$ *ein Ideal.*

*Beweis:* Sei $a \in A$, $x \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Dann folgt

$$\phi(ax) = \phi(a)\phi(x) = \phi(a)0 = 0$$

□

Nach Definition gilt $I(V) = \mathrm{Ker}(\varrho)$, wobei $\varrho$ die Einschränkungsabbildung $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \to \mathcal{O}(V)$ ist.

**Satz 1.4.** *Sei $A$ ein Ring, $I \subset A$ ein Ideal. Dann ist die Menge der Nebenklassen*

$$A/I := \{a + I | a \in A\}$$

*mit der Addition und Multiplikation von Nebenklassen*

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$
$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

*ein Ring. Die Projektionsabbildung $A \to A/I$ mit $a \mapsto a + I$ ist ein Ringhomomorphismus mit Kern $I$.*

*Beweis:* Wie bei Quotientenvektorräumen und Restklassengruppen ist das Problem die Wohldefiniertheit von Addition und Multiplikation. Die Rechnung für die Addition ist die gleiche wie für Vektorräume oder Gruppen und wird hier weggelassen.
Interessanter ist die Multiplikation. Sei $a + I = a' + I$

**Behauptung.** *$ab + I = a'b + I$ für alle $b \in A$*

Die Voraussetzung ist äquivalent zu $a - a' \in I$. Da $I$ ein Ideal ist, ist dann auch $ab - a'b = (a - a')b \in I$. Dies ist die Behauptung.
Der Rest folgt wie für Vektorräume. □

**Korollar 1.5.** *Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge Dann gilt*

$$\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I(V)$$

*Beweis:* Die Restriktionsabbildung $\varrho : \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \to \mathcal{O}(V)$ ist nach Definition surjektiv mit Kern $I(V)$. Daher ist die induzierte Abbildung

$$\overline{\varrho} : \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I(V) \to \mathcal{O}(B) \qquad f + I(V) \mapsto \varrho(f)$$

bijektiv. □

**Bemerkung.** Das Korollar gilt auch für $V = \emptyset$, denn dann ist $I(V) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ (jedes Polynom verschwindet auf allen – also keinen – Punkten) und $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I(V) = 0$.

Im Beweis haben wir bereits den Homomorphiesatz verwendet:

**Satz 1.6** (Homomorphiesatz)**.** *Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus mit Kern $I$. Dann ist*

$$\overline{\phi} : A/I \to \mathrm{Im}(\phi) \qquad a + I \mapsto \phi(a)$$

*ein Ringisomorphismus.*

*Beweis:* Wie für Vektorräume oder Gruppen. □

**Definition 1.7.** *Sei $A$ ein Ring, $S \subset A$ eine Teilmenge. Dann setzen wir*

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset I \subset A} I$$

*den Schnitt aller Ideale $I$, die $S$ enthalten. Dies ist das von $S$ erzeugte Ideal.*

Man sieht leicht, dass $\langle S \rangle$ selbst ein Ideal ist.

**Korollar 1.8.** *Sei $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ eine Teilmenge, $V = V(S)$ die zugehörige algebraische Menge. Dann ist*

$$\langle S \rangle \subset I(V)$$

*Beweis:* $I(V)$ ist ein Ideal, das $S$ enthält. □

Gilt vielleicht sogar Gleichheit?

**Beispiel.** Sei $S = \{XY\} \subset k[X, Y]$, also $\langle XY \rangle = k[XY](XY)$. Es ist

$$V(XY) = \{(x, y) \in k^2 | xy = 0\} = \{(0, y) | y \in k\} \cup \{(x, 0) | x \in k\ .\}$$

das Achsenkreuz in der Ebene.
Wir berechnen $I = I(V(XY))$. Sei $f = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j \in I$. Dann gilt

$$f(0, y) = \sum_{i,j} a_{ij} 0^i Y^j = \sum_j a_{0j} y^j = 0 \text{ für alle } y \in k$$

Da $k$ algebraisch abgeschlossen ist, ist dies nur möglich, falls $a_{0j} = 0$ für alle $j$. Ebenso folgt $a_{i0} = 0$ für alle $i$. In anderen Worten: $a_{ij} \neq 0 \Rightarrow i, j > 0$. Damit ist $f$ ein Vielfaches von $XY$. Es gilt tatsächlich $I = \langle XY \rangle$.

**Beispiel.** Sei $S = \{X^2\} \subset k[X]$. Dann ist $\langle X^2 \rangle = k[X]X^2$, $V = \{0\} \subset \mathbb{A}^1$ und $I(V) = k[X]X$. Die Gleichungen $X$ und $X^2$ definieren dieselbe algebraische Menge!

**Definition 1.9.** *Sei $I \subset A$ ein Ideal. Dann heißt*

$$\sqrt{I} = \{x \in A| \text{ es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n \in I \ \}$$

Radikal *von $I$. Ein Ideal heißt* Radikalideal*, wenn es mit seinem Radikal übereinstimmt.*

**Lemma 1.10.** *Das Radikal ist ein Ideal.*

*Beweis:* Seien $x, y \in \sqrt{I}$, $x^n, y^m \in I$. Ohne Einschränkung ist $n \geq m$. Dann ist

$$(xy)^n = x^n y^n \in I$$

da $I$ ein Ideal. Außerdem

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} x^i y^{n+m-i}$$

Falls $i \geq n$, so ist der Summand in $I$, da $x^i \in I$. Andernfalls ist $i < n$ und daher $m + n - i \geq m$. Dann ist der Summand in $I$, da $y^{n+m-i} \in I$. Jeder Summand ist in $I$, also auch die Summe. □

**Korollar 1.11.** *Sei $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ eine Teilmenge, $V = V(S)$ die zugehörige algebraische Menge. Dann gilt*

$$\sqrt{\langle S \rangle} \subset I(V)$$

*Beweis:* Sei $f \in \sqrt{\langle S \rangle}$, $f^n \in \langle S \rangle \subset I(V)$, d.h. $f(P)^n = f^n(P) = 0$ für alle $P \in V$. Da $k$ ein Körper ist, folgt $f(P) = 0$ für alle $P \in V$. □

Hier gilt tatsächlich Gleichheit! Das wird unser erstes großes Ziel sein, der Hilbertsche Nullstellensatz. Er erlaubt uns, zwischen Varietäten und Idealen hin und her zu schalten. Eine einfache Teilaussage können wir bereits festhalten.

**Lemma 1.12.** *Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ algebraische Teilmenge. Dann gilt*

$$V = V(I(V)).$$

*Beweis:* Sei $V = V(S)$. Wegen $S \subset I(V)$ folgt $V(S) \supset V(I(V))$. Sei $P \in V$. Nach Definition von $I(V)$ ist $P$ Nullstelle jedes Elementes von $I(V)$, liegt also in $V(I(V))$.

□

**Bemerkung.** Bisher haben wir nicht benutzt, dass $k$ algebraisch abgeschlossen ist. Schon der Fall $n = 1$ zeigt aber, dass die Voraussetzung für den Hilbertschen Nullstellensatz nötig ist.

Zunächst aber noch etwas mehr Geometrie.

## Zariski-Topologie

**Definition 1.13.** *Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge. Eine Teilmenge $W \subset V$ heißt* abgeschlossen, *wenn $W$ selbst eine algebraische Menge ist. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt* offen, *wenn $V \setminus U$ abgeschlossen ist.*

**Satz 1.14.** *Dies ist eine Topologie, die Zariski-Topologie.*

*Beweis:* Wir müssen die Axiome eines topologischen Raums überprüfen.

(i) $\emptyset$ und $V$ sind offen ($\Leftrightarrow$ $V$ und $\emptyset$ sind abgeschlossen).

(ii) Der Schnitt zweier offener Menge ist offen ($\Leftrightarrow$ Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen).

(iii) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen ($\Leftrightarrow$ Der Schnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen).

Zu (i): Wir wählen $S = \{0\}$ und $S = \{1\}$.
Zu (ii): Sei $W_1 = V(S_1)$, $W_2 = V(S_2)$

**Behauptung.** $W_1 \cup W_2 = V(S_1S_2)$

Hier bedeutet $S_1S_2 = \{f_1f_2 | f_1 \in S_1, f_2 \in S_2\}$. Sei $P \in W_1$, also $f(P) = 0$ für alle $f \in S_1$. Dann folgt

$$fg(P) = 0 \text{ für alle } f \in S_1, g \in S_2$$

d.h. wir haben $W_1 \subset V(S_1S_2)$. Ebenso für $W_2$. Sei nun umgekehrt $P \in V(S_1S_2)$, dh. $fg(P) = 0$ für alle $f \in S_1, g \in S_2$. Entweder ist $P \in W_1$, d.h. $f(P) = 0$ für alle $f \in S_1$. Oder es gibt ein $f_0 \in S_1$ mit $f_0(P) \neq 0$. Dann gilt für alle $g \in S_2$

$$0 = f_0(P)g(P) \Rightarrow g(P) = 0$$

In diesem Fall ist $P \in W_2$.
Zu (iii): Sei $W_\alpha = V(S_\alpha)$. Dann gilt

$$\bigcap_\alpha W_\alpha = V\left(\bigcup_\alpha S_\alpha\right)$$

(einfach). □

In dieser Sprache sind die algebraischen Mengen die abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{A}^n$.

**Beispiel.** Eine Teilmenge von $\mathbb{A}^1 = k$ ist abgeschlossen, wenn sie gleich $k$ ist oder nur endlich viele Elemente hat. Die Topologie ist also ganz anders als bei metrischen Räumen. Je zwei offene nichtleere Mengen haben einen nichtleeren Schnitt. Jede unendliche Menge ist dicht!

**Definition 1.15.** *Eine algebraische Menge $V \subset \mathbb{A}^n$ mit der Zariski-Topologie heißt* affine Varietät. *Eine offene Teilmenge von $V$ mit der induzierten Topologie heißt* quasi-affine Varietät.

**Bemerkung.** Nicht alle quasi-affinen Varietäten sind affin, z.B. $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$. Das können wir aber erst später beweisen.

**Bemerkung.** In der älteren Literatur wird der Begriff Varietät meist für irreduzible Varietäten reserviert, dazu kommen wir noch.

# Kapitel 2

# Noethersche Ringe und Moduln

Um algebraische Varietäten zu verstehen, muss man Polynomringe über einem Körper verstehen. Wir beginnen mit einer ganz grundlegenden Eigenschaft.

**Definition 2.1.** *Sei $A$ ein Ring, $I \subset A$ ein Ideal. $I$ heißt* endlich erzeugt*, wenn es eine endliche Menge $S \subset I$ gibt mit $\langle S \rangle = I$.*
*Ein Ring heißt* noethersch*, wenn jedes Ideal endlich erzeugt ist.*

**Beispiel.** (i) Sei $K$ ein Körper. Dann gibt es nur zwei Ideale 0 und $K$, denn falls ein Ideal $I$ ein Element $x \neq 0$ enthält, dann auch $x^{-1}x = 1$ und damit ganz $K$. Insbesondere ist jedes Ideal endlich erzeugt.

(ii) Im Falle $A = \mathbb{Z}$ sind alle Ideale von der Form $(n)$ für $n \in \mathbb{Z}$ (das gilt sogar für die Untergruppen von $\mathbb{Z}$!), werden also von nur einem Element erzeugt. Solche Ideal heißen *Hauptideale*, solche Ringe heißen *Hauptidealringe*. Hauptidealringe sind noethersch.

(iii) $A = K[X]$ ($K$ ein Körper) ist ebenfalls ein Hauptidealring. (Übungsaufgabe)

**Lemma 2.2.** *Sei $f : A \to B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus und $A$ noethersch. Dann ist $B$ noethersch.*

*Beweis:* Sei $I \subset B$ ein Ideal. Dann ist $f^{-1}I \subset A$ ebenfalls ein Ideal. Da $A$ noethersch ist, ist $f^{-1}I$ endlich erzeugt über $A$. Da $f$ surjektiv ist, ist dann auch $I$ endlich erzeugt über $B$. $\square$

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass für jede algebraische Menge der Ring $\mathcal{O}(V)$ noethersch ist. Dafür brauchen wir aber Rechenregeln für noethersche Ringe. Es hilft, wenn wir verallgemeinern und gleich noethersche Moduln betrachten.

## Moduln

**Definition 2.3.** *Sei $A$ ein Ring. Ein $A$-*Modul *$M$ ist eine abelsche Gruppe $(M,+)$ zusammen mit einer* Skalarmultiplikation

$$A \times M \to M$$

*so dass für alle $a,b \in A$, $x,y \in M$ gilt:*

*(i)* $a(x+y) = ax + ay$,

*(ii)* $(a+b)x = ax + bx$,

*(iii)* $a(bx) = (ab)x$,

*(iv)* $1x = x$.

*Seien $M,N$ Moduln. Eine Abbildung $f: M \to N$ ist ein* Modulhomomorphismus*, falls sie ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist und zusätzlich für alle $a \in A$, $x \in M$ gilt: $f(ax) = af(x)$.*

**Beispiel.** (i) $A = K$ ein Körper. Dann ist ein $A$-Modul das Gleiche wie ein $K$-Vektorraum. Modulhomomorphismen von $K$-Vektorräumen sind genau die linearen Abbildungen aus der linearen Algebra.

(ii) Ein $\mathbb{Z}$-Modul ist das Gleiche wie eine abelsche Gruppe. Modulhomomorphismen von $\mathbb{Z}$-Moduln sind genau die Gruppenhomomorphismen. Präzise: Die Kategorie der abelschen Gruppen ist isomorph zur Kategorie der $\mathbb{Z}$-Moduln.

*Beweis:* Sei $M$ ein $\mathbb{Z}$-Modul, dann ist nach Definition $(M,+)$ eine abelsche Gruppe. Jeder Modulhomorphismus ist nach Definition ein Gruppenhomomorphismus.

Interessant ist also die Gegenrichtung. Sei $M$ eine abelsche Gruppe, $x \in M$, $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren rekursiv $1x = x$, $nx = x + (n-1)x$. Für negative $n$ setzen wir $nx = -(-n)x$. Die Modulaxiome gelten alle. Man beweist alles mit Induktion, z.B.

$$n(x+y) = (x+y)+(n-1)(x+y) = x+y+(n-1)x+(n-1)y = nx+ny\ .$$

Dies ist die einzige mögliche Modulstruktur. Gruppenhomomorphismen sind automatisch linear für die so definierte Skalarmultiplikation. $\square$

Man sieht an der Beispielrechung, dass die Kommutativität von $M$ wirklich benötigt wird.

(iii) Sei $K$ ein Körper. Ein $K[X]$-Modul ist dasselbe wie ein $K$-Vektorraum $V$ zusammen mit einem $K$-Endomorphismus $\phi: V \to V$.

*Beweis:* Sei $V$ ein $K[X]$-Modul. Durch Einschränken der skalaren Multiplikation auf konstante Polynome erhält man die $K$-Vektorraumstruktur. Die Multiplikation mit $X$ ist eine $K$-lineare Abbildung $V \to V$.

Ist umgekehrt $V$ ein $K$-Vektorraum mit Endomorphismus $\phi$, so definieren wir die skalare Multiplikation als

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) v = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi^i(v) \qquad n \geq 0, a_i \in K, v \in V$$

Man überprüft leicht die Modulaxiome. □

Sätze über Vektorräume mit Endomorphismus aus der LA 2 (z.B. Jordansche Normalform) sind in Wirklichkeit Sätze über $K[X]$-Moduln.

**Bemerkung.**
- Ob $A$ eine Eins hat, ist für die allgemeine Theorie nicht wichtig.
- Ist $A$ nicht kommutativ, so muss man unterscheiden zwischen *Linksmoduln* (Formeln wie oben) und *Rechtsmoduln* mit einer skalaren Multiplikation $M \times A \to M$, so dass das Axiom (iii) gilt in der Form: $(ma)b = m(ab)$ für alle $m \in M$, $a, b \in A$. Man unterscheidet dann auch zwischen Links- und Rechtsidealn. Zweiseitige Ideale sind dann diejenigen, so dass $A/I$ wieder ein Ring wird.

Die Grundlagen der Theorie funktionieren wie für Körper. Begriffe wie linear unabhängig, Erzeugendensystem, direkte Summe, Untermodul, Quotientenmodul etc. werden genau wie in der lineare Algebra definiert. Ein Modul heißt *endlich erzeugt*, wenn er ein endliches Erzeugendensystem hat.

**Beispiel.** $A$ ist auch ein $A$-Modul. Die Untermoduln von $A$ sind genau die Ideale. Ist $A \to B$ ein Ringhomomorphismus, so ist $B$ ein $A$-Modul.

Beim Begriff der Basis muss man aufpassen:

**Definition 2.4.** *Sei $M$ ein $A$-Modul. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $M$ heißt* Basis. *$M$ heißt* frei*, falls es eine Basis gibt. Die Mächtigkeit einer Basis heißt* Rang *von $M$.*

Der Rang eines Moduls ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Basis (Reduktion auf den Fall eines Körpers, Übungsaufgabe).

**Beispiel.**
(i) Wenn $A$ ein Körper ist, so sind alle Moduln frei. (Basisexistenzsatz, Lineare Algebra). Der Rang ist nichts anderes als die Dimension.

(ii) Sei $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dieser Modul ist nicht frei, denn für jedes Element gilt $2x = 0$. Es gibt keine linear unabhängigen Teilmengen!

(iii) $A^2$ ist frei vom Rang 2 mit Basis $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Wie in der linearen Algebra sind Kern und Bild eine Modulhomomorphismus Untermoduln. Ist $N \subset M$ ein Untermodul, so ist $M/N$ ein Modul mit der induzierten Skalarmultiplikation. Ist speziell $M = A$ der Ring und $N \subsetneq M$, so erhalten wir den Ring $A/N$ zurück.

**Satz 2.5** (Homomorphiesatz, Noethersche Isomorphiesätze). *(i) Sei $f : M \to N$ ein $A$-Modulhomomorphismus. Dann ist die induzierte Abbildung*

$$\overline{f} : M/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$$

*ein Isomorphismus von $A$-Moduln.*

*(ii) Sind $N, N' \subset M$ Untermoduldn, so ist*

$$(N + N')/N \cong N'/(N \cap N')$$

*ein kanonischer Isomorphismus.*

*(iii) Sind $N' \subset N \subset M$ Untermoduln, so ist*

$$(M/N')/(N/N') \cong M/N$$

*ein kanonischer Isomorphismus.*

*Beweis:* In der Algebra zeigt man diese Ausagen für abelsche Gruppen, in der linearen Algebra für Vektorräume. Die Verträglichkeit mit der $A$-Modulstruktur ist leicht zu überprüfen. Wir zeigen beispielhaft die zweite Aussage. Wir betrachten den Homomorphismus

$$f : N' \to (N + N') \to (N + N')/N$$

Er hat den Kern $\{x \in N' | x + N = 0 + N\} = \{x \in N' | x \in N\} = N \cap N'$. Nach dem Homomorphiesatz erhalten wir einen Isomorphismus

$$\overline{f} : N'/N' \cap N \to \operatorname{Im}(f)$$

Zu zeigen bleibt die Surjektivität von $f$. Ein beliebiges Element von $(N+N')/N$ hat die Form $x+x'+N$ mit $x \in N$ und $x' \in N'$. Wegen $x+x'+N = x'+N = f(x)$ liegt es im Bild. □

## Noethersche Moduln

**Definition 2.6.** *Sei $A$ ein Ring, $M$ ein $A$-Modul. $M$ heißt* noethersch*, wenn jede Kette von Untermoduln von $M$*

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M$$

*stationär wird, d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $M_i = M_{i+1}$ für alle $i \geq n$.*

**Lemma 2.7.** *Ein Modul ist genau dann noethersch, wenn jeder Untermodul endlich erzeugt ist. Ein Ring ist noethersch, wenn er noethersch ist als Modul über sich selbst.*

*Beweis:* Sei $A$ ein Ring, $M$ ein $A$-Modul, $N \subset M$ ein Untermodul. Angenommen, $N$ ist *nicht* endlich erzeugt. Wir konstruieren eine Folge von Elementen $x_1, x_2, \dots \in N$ mit

$$\langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subsetneq \dots$$

Sei $x_1 \in N$ beliebig. Angenommen, wir haben $x_1, \dots, x_n$ konstruiert. Da $N$ nicht endlich erzeugt ist, gilt $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \neq N$. Wir wählen $x_{n+1} \in N \smallsetminus \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Dies hat die gewünschte Eigenschaft. Die Folge von Untermoduln wird nicht stabil, also ist $M$ nicht noethersch.
Sei umgekehrt jeder Untermodul von $M$ endlich erzeugt. Wir betrachten eine Folge von Untermoduln

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \dots$$

Es sei $N = \bigcup_i N_i$.

**Behauptung.** *$N$ ist ein Untermodul.*

Seien $x, y \in N$, $a, b \in A$. Nach Voraussetzung ist $x \in N_i$ und $y \in N_j$ für geeignete $i, j$. Ohne Einschränkung ist $i \geq j$. Nach Voraussetzung ist $N_j \subset N_i$, also $x, y \in N_i$. Da $N_i$ ein Untermodul ist, gilt $ax + by \in N_i \subset N$.
Nach Voraussetzung ist $N$ endlich erzeugt. Seien $x_1, \dots, x_m$ Erzeuger. Jedes $x_i$ liegt in einem $N_{k_i}$. Sei $k = \max_i k_i$. Dann liegen alle $x_i$ in $N_k$. Dies bedeutet

$$N = \langle x_1, \dots, x_m \rangle \subset N_k \subset N_{k'} \subset N$$

also Gleichheit für alle $k' \geq k$.
Sei nun $A$ ein noetherscher Ring. Nach Definition sind alle Ideale, also alle Untermoduln von $A$ endlich erzeugt. Nach der ersten Hälfte des Lemmas ist $A$ nothersch als $A$-Modul. Ebenso folgt die Umkehrung. $\square$

Es gibt eigentlich nur eine Rechenregel für noethersche Moduln. Um die zu formulieren, führen wir die Sprache der exakten Sequenzen und kommutativen Diagramme ein. Wenn man sich daran gewöhnt hat, ist es eine sehr effiziente Art der Buchhaltung.

**Definition 2.8.** *Eine (endliche oder unendliche) Folge von Modulhomomorphismen*

$$N_1 \xrightarrow{f_1} N_2 \xrightarrow{f_2} N_3 \to \dots \to N_n$$

*heißt* exakt*, falls für $1 < i < n$ gilt*

$$\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \mathrm{Ker}(f_i)$$

**Beispiel.** (i) $0 \to N_1 \xrightarrow{f} N_2$ ist genau dann exakt, wenn $f$ injektiv ist: Das Bild der Nullabbildung ist der Nullmodul, also lautet die Bedingung $0 = \mathrm{Ker}(f)$.

(ii) $M_1 \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ ist genau dann exakt, wenn $g$ surjektiv ist: Der Kern der Nullabbildung ist ganz $M_2$, also lautet die Bedingung $\mathrm{Im}(g) = M_2$.

(iii) $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ ist genau dann exakt, wenn $g$ surjektiv ist mit Kern gleich $\mathrm{Im}(f) \cong M_3$. Solche exakten Sequenzen heißen *kurze exakte Sequenz.*

**Definition 2.9.** *Ein Diagram von A-Moduln*

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 \\ {\scriptstyle g_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g_2} \\ N_1 & \xrightarrow[f_2]{} & N_2 \end{array}$$

*heißt* kommutativ*, wenn* $f_1 g_1 = g_2 f_2$.

**Lemma 2.10.** *Sei A ein Ring,*

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

*eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Dann ist* $M_2$ *genau dann noethersch, wenn* $M_1$ *und* $M_3$ *noethersch sind.*

*Beweis:* Sei $M_2$ noethersch.

**Behauptung.** $M_1$ *ist noethersch.*

$M_1$ ist ein Untermodul von $M_2$. Alle Untermoduln von $M_1$ sind auch Untermoduln von $M_2$, also endlich erzeugt.

**Behauptung.** $M_3$ *ist noethersch.*

Sei $\pi : M_2 \to M_3$ die surjektive Abbildung. Gegeben sei eine Folge

$$N_1 \subset N_2 \subset \dots$$

von Untermoduln von $M_3$. Wir betrachten die Urbildfolge

$$\pi^{-1}N_1 \subset \pi^{-1}N_2 \subset \dots$$

von Untermoduln von $M_2$. Da $M_2$ noethersch ist, wird die Folge stabil. Wegen $N_i \cong \pi^{-1}N_i/M_1$ (Homomorphiesatz) ist dann auch die Ausgangsfolge stabil.

Seien nun $M_1, M_3$ beide noethersch. Wir betrachten eine Folge

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots$$

von Untermoduln von $M_2$.

**Behauptung.** *Die Folge wird stabil.*

Zu jedem $X_i$ gehört eine kurze exakte Sequenz (Homomorphiesatz)

$$0 \to X_i \cap M_1 \to X_i \to \pi(X_i) \to 0$$

Die Folge der $X_i \cap M_1$ wird stabil, da $M_1$ noethersch. Die Folge $\pi(X_i)$ wird stabil, da $M_3$ noethersch. Für genügend großes $i$ haben wir die Sitatution

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & X_{i+1} \cap M_1 & \longrightarrow & X_{i+1} & \longrightarrow & \pi(X_{i+1}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \cong\big\uparrow & & \big\uparrow\subset & & \big\uparrow\cong & & \\
0 & \longrightarrow & X_i \cap M_1 & \longrightarrow & X_i & \longrightarrow & \pi(X_i) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Wir wollen zeigen, dass $X_i \to X_{i+1}$ surjektiv ist. Sei also $x \in X_{i+1}$. Dann hat $\pi(x)$ ein Urbild in $\pi(X_i)$. Dieses hat wiederum ein Urbild $x' \in X_i$. Wir betrachten nun $y = x - x' \in X_{i+1}$. Es liegt nach Konstruktion im Kern von $\pi$, also im Bild von $X_{i+1} \cap M_1$. Nach Voraussetzung hat $y$ dann ein Urbild in $X_i \cap M_1$, also erst recht in $X_i$. Wegen $x = x' + y$ haben wir ein Urbild für $x$ gefunden. □

**Korollar 2.11.** *Sei $A$ ein noetherscher Ring, $M$ endlich erzeugter $A$-Modul. Dann ist $M$ noethersch.*

*Beweis:* $A$ ist noethersch als $A$-Modul. Durch wiederholtes Anwenden von Lemma 2.10 sehen wir, dass $A^n = A \oplus A \oplus A \dots A$ noethersch ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien $x_1, \dots, x_n$ Erzeuger von $M$. Dann definiert

$$A^n \to M \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

einen surjektiven Modulhomomorphismus. Nach Lemma 2.10 ist $M$ noethersch. □

Leider kennen wir nur wenige noethersche Ringe. Das folgende Theorem ändert das ganz dramatisch.

**Theorem 2.12** (Hilbertscher Basissatz)**.** *Sei $A$ ein noetherscher Ring. Dann ist der Polynomring $A[X]$ noethersch.*

*Beweis:* Sei $I \subset A[X]$ ein Ideal. Wir suchen nach endlich vielen Erzeugern. Um zu verstehen, wie wir vorgehen müssen, erinnern wir uns an den Fall, dass $A = K$ ein Körper ist. Dann wissen wir ja, dass jedes Ideal von nur einem Element erzeugt wird. Wir finden den Erzeuger als ein Polynom minimalen Grades ungleich 0. Das jedes solches Element ein Erzeuger ist, wird mit Hilfe des euklidischen Algorithmuses (also Polynomdivision) gezeigt. Dies müssen wir variieren, da wir durch Koeffizienten nicht dividieren können. Daher:
Für jedes $n \geq 0$ sei $I_n \subset I \subset A[X]$ die Menge der Polynome in $I$ vom Grad kleiner gleich $n$. Dies ist ein $A$-Modul. Sei

$$J_n = \{a \in A | \text{ es gibt } P \in I_n, P = aX^n + \dots\}$$

Dies ist ein Ideal von $A$, also endlich erzeugt. Wegen $XI_n \subset I_{n+1}$ gilt $J_n \subset J_{n+1}$. Da $A$ noethersch ist, wird die Folge von Koeffizientenidealen

$$J_0 \subset J_1 \subset J_2 \ldots$$

konstant. Sei $d$ so, dass $J_n = J_d$ für alle $n \geq d$. Wir wählen für $n \leq d$ $A$-Erzeuger $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_{r_n}^{(n)} \in J_n$. Wir wählen weiter $P_j^{(n)} \in I_n$ mit

$$P_j^{(n)} = a_j^{(n)} X^n + \ldots$$

**Behauptung.** *Die $P_j^{(n)}$ für $n \leq d$, $j = 1, \ldots, r_n$ erzeugen $I$.*

Sei $Q = bX^m + \ldots$. Der Beweis wird durch Induktion über $m$ geführt. Sei zunächst $m \leq d$. Wir rechnen in $I_m$ und $J_m$. Dann gibt es $c_1, \ldots, c_{r_m} \in A$, so dass

$$b = \sum_{i=1}^{r_m} c_i a_i^{(m)}$$

Es folgt:

$$Q - \sum_{i=1}^{r_m} c_i P_i^{(m)}$$

hat Grad echt kleiner als $m$. Nach Induktionsannahme wird es durch die Erzeuger ausgedrückt, daher gilt dasselbe auch für $Q$.
Sei nun $m \geq d$. Dann gibt es $c_1, \ldots, c_{r_d} \in A$, so dass

$$b = \sum_{i=1}^{r_d} c_i a_i^{(d)}$$

Es folgt

$$Q - \sum_{i=1}^{r_d} c_i X^{m-d} P_i^{(d)}$$

hat Grad echt kleiner als $m$. Wieder sind wir nach Induktionsannahme fertig.
Der Induktionsanfang ist übrigens für $I_{-1} = 0$ □

**Korollar 2.13.** *Sei $A = \mathbb{Z}$ oder $A = K$ ein Körper. Dann ist $A[X_1, \ldots, X_n]$ noethersch.*

*Beweis:* Induktion. □

Hieraus werden noch viel mehr Beispiele.

**Definition 2.14.** *Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus. $B$ heißt* endlich erzeugte $A$-Algebra*, wenn es Elemente $b_1, \ldots, b_n \in B$ gibt, so dass jedes Element $b \in B$ geschrieben werden kann als*

$$b = \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{i}} b_1^{i_1} b_2^{i_2} \ldots b_n^{i_n} \qquad a_{\underline{i}} \in A, \text{ fast alle } 0$$

*(mit Multiindizes $\underline{i} = (i_1, \ldots, i_n)$).*

Mit anderen Worten, es gibt einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$A[X_1, \dots, X_n] \to B \qquad X_i \mapsto b_i$$

**Korollar 2.15.** *Sei $A$ ein noetherscher Ring, $B$ endlich erzeugte $A$-Algebra. Dann ist $B$ noethersch.*

*Beweis:* Hilbertscher Basissatz und Lemma 2.2 □

Und damit endlich:

**Korollar 2.16.** *Sei $k$ algebraisch abgeschlossener Körper, $V \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge über $k$. Dann ist $\mathcal{O}(V)$ noethersch. Jede algebraische Menge wird durch endlich viele Gleichungen definiert. Sie ist Schnitt von endlich vielen Hyperflächen.*

*Beweis:* Der Ring $\mathcal{O}(V) \cong k[X_1, \dots, X_n]/I(V)$ ist endlich erzeugte $k$-Algebra, also noethersch. Als Ideal in einem noetherschen Ring ist $I(V)$ endlich erzeugt,

$$I(V) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$$

und offensichtlich

$$V \overset{1.12}{=} V(I(V)) = V(f_1, \dots, f_m) = \bigcap_{i=1}^{m} V(f_i)$$

□

Es ist sehr schwer anzugeben oder zu charakterisieren, wieviele Gleichungen benötigt werden. Man benötigt wenigsten $n - \dim(V)$-viele (das werden wir zeigen). Das ist auch der sogenannte generische Fall, den man für zufällige Gleichungen erwarten kann. Der allgemeine Fall ist jedoch offen!

# Kapitel 3

# Quasi-projektive Varietäten

Wir verallgemeinern den Varietätenbegriff.

**Definition 3.1.** *Sei $K$ ein Körper. Der* projektive Raum $\mathbb{P}^n(K)$ der Dimension $n$ über $K$ *ist die Menge der eindimensionalen Untervektorräume des $K^{n+1}$, d.h. die Menge der Äquivalenzklassen*

$$\mathbb{P}^n(K) = (K^{n+1} \smallsetminus \{0\})/\sim$$

*wobei $(x_0, \ldots, x_n) \sim (y_0, \ldots, y_n)$ falls es $\lambda \in K^*$ gibt mit $x_i = \lambda y_i$ für $0 \leq i \leq n$. Wir schreiben $[x_0 : \cdots : x_n]$ für die Äquivalenzklasse von $(x_0, \ldots, x_n)$. Wir nennen $x_0, \ldots, x_n$* homogene Koordinaten *auf $\mathbb{P}^n(K)$.*
*Für $i = 0, \ldots, n$ heißt die Teilmenge*

$$U_i = \{[x_0 : \cdots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$$

$i$-te standardaffine Karte.

**Lemma 3.2.** *(i) Auf $U_i$ sind die Funktionen $y_j = x_j/x_i$ wohldefiniert und induzieren eine Bijektion*

$$\phi_i : U_i \to K^n \qquad [x_0 : \cdots : x_n] \mapsto (y_0, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$$

*(ii) Es gilt $\mathbb{P}^n(K) \smallsetminus U_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(K)$ (Weglassen der $i$-ten Koordinate).*

*(iii) $\mathbb{P}^n(K) = \bigcup_{i=0}^n U_i$*

*Beweis:* Auf $U_i$ darf durch $x_i$ geteilt werden. Wegen $\lambda x_j/\lambda x_i = x_j/x_i$ ist $y_j$ unabhängig von der Wahl des Respräsentanten. Die Abbildung

$$\psi_i : K^n \to \mathbb{P}^n(K) \qquad (a_0, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \mapsto [a_0 : \cdots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \ldots, a_n]$$

hat Werte in $U_i$. Offensichtlich sind $\phi_i$ und $\psi_i$ invers zueinander.
Das Komplement von $U_i$ besteht aus Punkten mit $x_i = 0$. Nach Voraussetzung hat jeder Punkt des $\mathbb{P}^n(K)$ eine Koordinate ungleich 0, liegt also in einem $U_i$. $\square$

Wir fassen ab sofort $K^n$ via $\phi_0$ als Teilmenge des $\mathbb{P}^n(K)$ auf.

**Beispiel.** Für $n = 0$ besteht $\mathbb{P}^n(K)$ aus genau einem Punkt. Für $n = 1$ ist $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$.

Wir wollen nun algebraische Teilmengen als Nullstellenmengen von Polynomen definieren. Der Funktionswert eines Polynoms ist jedoch *nicht* wohldefiniert, da die homogenen Koordinaten nicht wohldefiniert sind.

**Definition 3.3.** *Ein Polynom $P \in K[X_0, \dots, X_n]$ heißt* homogen vom Grad $d$, *wenn es von der Form*

$$P = \sum_{d_0+\cdots+d_n=d} a_{d_0,\dots,d_n} X_0^{d_0} \dots X_n^{d_n}$$

*ist.*

**Lemma 3.4.** *Sei $f$ ein homogenes Polynom vom Grad $d$, $x = (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1}$, $\lambda \in K^*$. Dann gilt*

$$f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$$

Für homogene Polynome ist also der Funktionswert auf dem projektiven Raum nicht wohldefiniert, wohl aber die Eigenschaft zu verschwinden.
Ist $f$ ein beliebiges Polynom, so schreiben wir es als $f = \sum_{d=0}^m f_d$, wobei die $f_d$ homogen vom Grad $d$ sind.

**Definition 3.5.** *Sei $k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, $S \subset k[X_0, \dots, X_n]$ eine Menge von Polynomen. Dann heißt*

$$V(S) = \{P \in \mathbb{P}^n(k) | f(P) = 0 \text{ für alle homogenen } \ f \in S\}$$

*durch $S$ definierte* projektive algebraische Menge.
*Sei $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ eine algebraische Menge. Dann heißt*

$$I(V) = \{f = \sum_d f_d \in k[X_0, \dots, X_n] | f_d(P) = 0 \text{ für alle } P \in V, d \geq 0\}$$

Verschwindungsideal von $V$ *und*

$$S[V] = k[X_0, \dots, X_n]/I(V)$$

homogener Koordinatenring von $V$.

**Beispiel.** Sei $n = 2$. Für die projektive Ebene benutzt man meist die Koordinaten $X = X_1, Y = X_2, Z = X_0$. Sei $f = X^2 + Y^2 + Z^2$. Um $V = V(f)$ zu verstehen, schneiden wir mit den standardaffinen Teilmengen. Es gilt

$$V \cap U_0 = \{[x : y : z] | z \neq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \cong \{(x, y) | x^2 + y^2 = -1\}$$

und analog in den beiden anderen Karten. In $V(Z) = \mathbb{P}^n(k) \setminus U_0$ liegen die Punkte

$$\{[x : y : 0] | x^2 + y^2 = 0\} = \{[1 : \sqrt{-1} : 0], -[1 : \sqrt{-1} : 0]\}$$

Es gilt dann $I(V) = \langle X^2 + Y^2 + Z^2 \rangle$ (Übungsaufgabe). Nicht alle Elemente von $I(V)$ sind homogen, sondern nur die der Form $gf$ mit homogenem $g$. Nach Definition ist dann $V(I(V)) = V$.

## Graduierte Ringe

**Definition 3.6.** *(i) Sei $A$ ein Ring. Eine* graduierte $A$-Algebra *ist eine direkte Summe*

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$$

*von $A$-Moduln zusammen mit einer Multiplikationsabbildung*

$$\mu : S \times S \to S$$

*mit $\mu(S_n, S_m) \subset S_{n+m}$, die $S$ zu einer $A$-Algebra macht.*

*(ii) Ein* homogenes Ideal *$I$ von $S$ ist ein graduierter Untermodul von $S$, d.h.*

$$I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I \cap S_d).$$

**Beispiel.** Sei $A = K$ ein Körper. Dann ist $K[X_0, \ldots, X_n]$ ein graduierter Ring mit $K[X_0, \ldots, X_n]_d$ der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad $d$.

**Lemma 3.7.** *Ist $V \subset \mathbb{P}_k^n$ algebraisch, so ist $I(V)$ ein graduiertes Ideal.*

*Beweis:* Wir erinnern uns:

$$I(V) = \left\{ \sum f_d | f_d(V) = 0 \right\}$$

Die Menge ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation mit homogenen Polynomen. Da jedes Polynom Summe von homogenen Polynomen ist, ist $I(V)$ ein Ideal.
Sei $f_d \in I(V)$ homogen vom Grad $d$, $s_m \in k[X_0, \ldots, X_n]_m$ homogen vom Grad $m$. Dann ist $s_m f_d$ homogen vom Grad $m + d$. Damit ist $I(V)$ ein homogenes Ideal. □

**Lemma 3.8.** *Sei $S$ graduierter Ring, $I \subset S$ homogenes Ideal. Dann ist*

$$S/I \cong \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d/I_d$$

*wieder graduiert.*

*Beweis:* Wir betrachten die offensichtliche Abbildung von rechts nach links. Sie ist offensichtlich surjektiv.
Sei $s = \sum_{d=0}^{n} s_d$ im Kern, d.h. $s \in I$. Dann gilt $s_d \in I_d$ für alle $d$, da $I$ ein homogenes Ideal ist. Die Abbildung ist auch injektiv. □

**Korollar 3.9.** *Sei $V \subset \mathbb{P}^n$ projektiv. Der* homogene Koordinatenring $S[V] = k[X_0, \ldots, X_n]/I(V)$ *ist eine graduierte $k$-Algbra.*

**Bemerkung.** $S$ soll an die symmetrische Algebra erinnern, denn

$$k[X_0, \ldots, X_n] \cong \mathrm{Sym}^* V$$

wobei $V$ ein $k$-Vektorraum der Dimension $n + 1$.

## Die Zariski-Topologie

**Lemma 3.10.** *Sei $V$ eine projektive algebraische Menge. Wir nennen eine Teilmenge $Z \subset V$ abgeschlossen, wenn sie algebraisch ist. Dies definiert eine Topologie auf $V$.*

*Beweis:* Wie im affinen Fall. Es geht nur ein, dass das Produkt von zwei homogenen Polynomen homogen ist. □

**Definition 3.11.** *Sei $\mathbb{P}^n_k$ der projektive Raum $\mathbb{P}^n(k)$ zusammen mit seiner Topologie. Eine* projektive Varietät *ist eine projektive algbraische Menge zusammen mit ihrer Topologie. Eine* quasi-projektive Varietät *ist eine offene Teilmenge einer projektiven Varietät mit der induzierten Topologie.*

Wegen $U_i = \mathbb{P}^n_k \smallsetminus V(X_i)$ sind die standard-affinen Teilmengen offen.

**Lemma 3.12.** *Die Kartenabbildung $\phi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$ ist ein Homöomorphismus, d.h. bijektiv, stetig und offen.*

*Beweis:* Ohne Einschränkung betrachten wir $i = 0$. Die Bijektivität haben wir schon überprüft.
Wir zeigen, dass $\phi_0$ eine Bijektion der Mengen von abgeschlossenen Teilmengen von $U_0$ und $\mathbb{A}^n$ induziert.
Sei $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom, $V = V(F) \subset \mathbb{P}^n_k$. Dann gilt

$$V \cap U_0 = \{[1 : x_1 : \dots, x_n] : F(1, x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

Das Bild dieser Abbildung unter $\phi_0$ ist also $V(f)$ mit $f = F(1, X_1, \dots, X_n)$. Also sind Bilder abgeschlossener Teilmengen von $U_0$ abgeschlossen.
Sei umgekehrt $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom vom Grad $d$. Sei $F$ die Homogenisierung von $f$, d.h.

$$F = X_0^d f(X_1/X_0, \dots, X_n/X_0)$$

Dann ist

$$V(F) \cap U_0 = \{[1 : x_1 : \dots : x_n] | 1^d f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

das gesuchte Urbild von $V(f)$, also abgeschlossen in $U_0$. □

**Beispiel.** Sei $n = 2$, $f = X^2 + 2XY + Y + 2$, $V(f) \subset \mathbb{A}^2$. Dies ist ein Polynom vom Grad $d = 2$. Seine Homogenisierung ist

$$F = Z^2 f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = Z^2\left(\frac{X^2}{Z^2} + 2\frac{X}{Z}\frac{Y}{Z} + \frac{Y}{Z} + 2\right) = X^2 + 2XY + YZ + 2Z^2 \ ,$$

d.h. alle Monome von $f$ werden mit $Z$-Faktoren aufgefüllt zum Grad 2.

**Bemerkung.** Die beiden Operationen "Einsetzen von $X_0 = 1$" und "Homogenisieren eines Polymons in den Variablen $X_1, \dots, X_n$" definieren eine Bijektion zwischen homogenen Polynomen in $X_0, \dots, X_n$, die nicht durch $X_0$ teilbar sind und Elementen von $k[X_1, \dots, X_n]$. Geometrisch entspricht dem eine Bijektion zwischen algebraischen Teilmengen des $\mathbb{P}^n_k$ und denjenigen algebraischen Teilmengen des $\mathbb{A}^{n+1}$, die mit einem Punkt auch die Nullpunksgerade durch diesen Punkt enthalten.

Wir können also den projektiven Raum (und alle projektiven Varietäten) mit affinen Karten überdecken. Der Schnitt $U_i \cap U_j = \{[x_0 : \cdots : x_n] | x_i, x_j \neq 0\}$ wird unter der Kartenabbildung $\phi_i$ abgebildet auf die Menge der Punkte mit $y_j \neq 0$, also die standardoffene Menge $U_{y_j}$. Die Kartenwechselabbildung

$$\phi_j \phi_i^{-1} : U_{y_j} \to U_{y_i}$$

kann leicht berechnet werden. Wir geben die Formel an im Fall $i = 0, j = 1$.

$$\begin{aligned}(y_1, \ldots, y_n) \mapsto [1 : y_1 : \cdots : y_n] = [1/y_1 : 1 : y_2/y_1 : \ldots y_n/y_1]& \\ \mapsto (1/y_1, y_2/y_1, \ldots, y_n/y_n)&\end{aligned}$$

Jeder Eintrag ist eine algebraische Funktion auf $U_{y_1}$.

**Bemerkung.** Quasi-affine Varietäten sind quasi-projektiv.

## Offene Überdeckungen

**Definition 3.13.** *Sei $V$ eine affine oder projektive Varietät. Dann heißen offene Menge der Form*

$$U_f = V \smallsetminus V(f)$$

*für $f \in k[V]$ bzw. für homogenes $f \in S[V]$* standardoffene Mengen *in $V$.*

**Bemerkung.** Wir haben bisher nur $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ für $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ definiert. In der Definition ist $f \in k[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$. Das ist aber ein harmloser Unterschied. Es hat ein Urbild $\tilde{f} \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Es ist dann

$$V(f) = V(\tilde{f}) \cap V$$

und dies ist unabhängig von der Wahl von $\tilde{f}$. Mit anderen Worten:

$$V(f) = \{P \in V | f(P) = 0\}.$$

**Lemma 3.14.** *Sei $V$ eine affine oder projektive Varietät.*

*(i) Sei $A \subset V$ abgeschlossen. Dann ist*

$$A = V(f_1, \ldots, f_n) = \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i)$$

*für $f_1, \ldots, f_n \in k[V]$ bzw. homogene $f_1, \ldots, f_n \in S[V]$.*

*(ii) $U \subset V$ offen. Dann ist $U$ Vereinigung von endlich vielen standardoffenen Mengen.*

*(iii) Der Schnitt von endlich vielen standardoffenen Mengen ist standardoffen.*

Insbesondere sind die standardoffenen Menge eine Basis für die Topologie.

*Beweis:* Wir beginnen im affinen Fall. Sei $A \subset V$ abgeschlossen. Nach Lemma 1.12 ist

$$A = V(I(V))$$

wobei $I(V) \subset k[V]$ das Verschwindungsideal. Da $k[V]$ noethersch ist, ist das Ideal endlich erzeugt. Seien $f_1, \dots, f_n$ die Erzeuger. Dann ist

$$V(I(V)) = V(\langle f_1, \dots, f_n \rangle) = V(f_1, \dots, f_n).$$

Im projektiven Fall ist $I(V) \subset S[V]$ ebenfalls endlich erzeugt. Da das Ideal homogen ist, enthält es mit jedem Element seine endlich vielen homogenen Komponenten.
Sei $U = V \smallsetminus A$ offen. Nach dem ersten Teil gilt

$$A = \bigcap_{f \in S} V(f) \Rightarrow U = V \smallsetminus V(S) = \bigcup_{f \in S} (V \smallsetminus V(f)) = \bigcup_{f \in S} U_f.$$

Sind $U_f$ und $U_g$ standardoffen, so ist

$$U_f \cap U_g = (V \smallsetminus V(f)) \cap (V \smallsetminus V(g)) = V \smallsetminus (V(f) \cup V(g)) = V \smallsetminus V(fg) = U_{fg}.$$

□

**Definition 3.15.** *Ein topologischer Raum heißt* noethersch*, wenn jede absteigende Kette*

$$Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$$

*von abgeschlossenen Teilmengen stabil wird.*

**Beispiel.** Affine und projektive Varietäten sind noethersch, denn Ketten von Varietäten definieren aufsteigende Ketten von Verschwindungsidealen im Koordinatenring, der noethersch ist.

**Lemma 3.16.** *Sei $Y$ noetherscher topologischer Raum und $X \subset Y$ offen. Dann ist $X$ noetherscher topologischer Raum.*

*Beweis:* Wir betrachten eine Folge

$$X_1 \supset X_2 \supset \dots$$

von abgeschlossenen Teilmenge von $X$. Nach Definition ist die Folge der Abschlüsse

$$\overline{X}_1 \supset \overline{X}_2 \supset$$

eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von $Y$. Da $Y$ noethersch ist, wird sie stabil. Wegen $X \cap \overline{X}_i = X_i$ ist dann auch die Ausgangsfolge stabil. □

**Lemma 3.17.** *Sei $Y$ noetherscher topologischer Raum, $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung, d.h $U_i \subset Y$ offen*

$$Y = \bigcup_{i \in I} U_i$$

*Dann existiert eine endliche Teilüberdeckung* $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$*, d.h. endliche viele* $i_1, \dots, i_n \in I$ *mit*

$$Y = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$$

**Bemerkung.** Topologische Räume mit dieser Eigenschaft heißen *quasi-kompakt* (oder auch kompakt, je nach Quelle). Ein topologischer Raum ist kompakt, wenn er quasi-kompakt und hausdorff ist. Da Varietäten (fast) nie hausdorff sind, interessiert uns Quasikompaktheit.

*Beweis:* Angenommen, $Y$ hat keine endliche Teilüberdeckung. Dann konstruieren wir induktiv eine Folge $U_{i_j}$ für $j \in \mathbb{N}$ so dass für $U'_{i_j} = \bigcup_{1 \le j' \le j} U_{i_j}$ gilt

$$U'_{i_1} \subsetneq U'_{i_2} \subsetneq U'_{i_3} \subsetneq$$

Sei nämlich $i_1$ beliebig. Da $Y$ nicht von einem $U_i$ überdeckt wird, gibt es $P \in Y \setminus U'_{i_1}$. Da die $U_i$ ganz $Y$ überdecken, gibt es einen Index $i_2$ mit $P \in U_{i_2}$. Da $Y$ nicht von zwei offenen Mengen überdeckt wird, gibt es $Q \in Y \setminus U_{i_1} \cup U_{i_2}$ etc. Komplementär gibt es eine absteigende Folge

$$Z_1 \supsetneq Z_2 \supsetneq \dots$$

von abgeschlossenen Mengen in $Y$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $Y$ noethersch ist. □

**Korollar 3.18.** *Alle quasi-affinen und quasi-projektiven Varietäten sind quasi-kompakt.*

*Beweis:* Affine/projektive Varietäten sind noethersch. Nach Lemma 3.16 sind dann auch quasi-affine/quasi-projektive noethersch. Nach Lemma 3.17 sind sie quasi-kompakt. □

# Kapitel 4

# Irreduzibilität

**Definition 4.1.** *Ein topologischer Raum $Y$ heißt* irreduzibel*, wenn $Y \neq \emptyset$ und er nicht Vereinigung $Y = Y_1 \cup Y_2$ von echten abgeschlossenen Teilmengen ist.*

**Beispiel.** (i) $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Topologie ist nicht irreduzibel.

(ii) $\mathbb{A}^1$ mit der Zariski-Topologie ist irreduzibel.

(iii) Einelementige algebraische Mengen sind irreduzibel.

(iv) $V(X_1X_2) = V(X_1) \cup V(X_2) \subset \mathbb{A}^2$ ist reduzibel.

Da die Zariski-Topologie sich durch Ideale beschreiben lässt, muss auch diese Eigenschaft eine Charakterisierung in Termen des Ideals haben. Offensichtliches Problem sind Funktionen wie $X_1, X_2 \in I(V(X_1X_2))$.

**Definition 4.2.** *Sei $A$ ein Ring, $I \subset A$ ein Ideal. $I$ heißt* Primideal*, wenn $I \neq A$ und für alle $a, b \in A$ gilt: aus $ab \in I$ folgt $a \in I$ oder $b \in I$.*

**Beispiel.** Sei $I = (n) \subset \mathbb{Z}$ ein Primideal, $n \in \mathbb{N}$. Wegen $I \neq \mathbb{Z}$ ist $n \neq 1$. Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$

$$ab \in (n) \Leftrightarrow n|ab \Rightarrow n|a \text{ oder } n|b$$

Dies ist die Definition von Primelement. $n$ ist Primzahl.

**Bemerkung.** Primideale sind Radikalideale, d.h. abgeschlossen unter Wurzelziehen.

**Satz 4.3.** *Eine affine oder projektive Varietät $Y$ ist irreduzibel genau dann, wenn $I(Y)$ ein Primideal ist.*

*Beweis:* Wir betrachten zuerst den affinen Fall. Sei $Y$ irreduzibel, seien $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$, $fg \in I(Y)$. Dann gilt $Y \subset V(fg) = V(f) \cup V(g)$. Daher

$$Y = (V(f) \cap Y) \cup (V(g) \cap Y)$$

Da $Y$ irreduzibel, so gilt ohne Einschränkung $Y = V(f) \cap Y$, also $Y \subset V(f)$ und daher $f \in I(Y)$.
Sei umgekehrt $J = I(Y)$ ein Primideal. Sei $V(J) = Y_1 \cup Y_2$. Dann ist $J = I(Y_1 \cup Y_2) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$. Angenommen $J \neq I(Y_1), I(Y_2)$. Dann gibt es $f_i \in I(Y_i) \setminus J$. Es folgt $f_1 f_1 \in I(Y_1) \cap I(Y_2) = J$. Dies ist ein Primideal, also $f_1 \in J$ oder $f_2 \in J$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl der $f_i$. Es gilt also ohne Einschränkung $I(Y) = J = I(Y_1)$. Wegen $Y = V(I(Y))) = V(I(Y_1)) = Y_1$ (Lemma 1.12) folgt $Y = Y_1$. Damit ist $Y = V(J)$ irreduzibel.
Sei nun $Y$ projektiv, also $I(Y)$ ein homogenes Ideal. Alle obigen Überlegungen funktionieren für homogene Elemente. Dies genügt für den Beweis der Rückrichtung, denn $f_i \in I(Y_i) \setminus J$ kann homogen gewählt werden. Die Hinrichtung folgt wegen des folgenden Lemmas. □

**Lemma 4.4.** *Sei $S$ ein graduierter Ring, $I \subset S$ ein homogogenes Ideal. Dann ist $I$ genau dann ein Primideal, wenn für alle homogenen $f, g \in S$ gilt: aus $fg \in I$ folgt $f \in I$ oder $g \in I$.*

*Beweis:* Seien $a, b \in S$ beliebig mit $ab \in I$. Wir schreiben $a = \sum_{i=0}^{n} a_i$, $b = \sum_{j=0}^{m} b_j$. Angenommen, $a, b \notin I$. Dann gibt es maximale $n_0, m_0$ mit $a_{n_0}, b_{m_0} \notin I$. Wir zerlegen $a = a' + a''$ , $b = b' + b''$ mit

$$a' = \sum_{i \leq n_0} a_i, \quad a'' = \sum_{i > n_0} a_i, \quad b' = \sum_{j \leq m_0} b_j, \quad b'' = \sum_{j > m_0} b_j.$$

Nach Voraussetzung ist $a'', b'' \in I$, also auch

$$a'b' = ab - a''b - a'b''.$$

Da $I$ homogen ist, liegt auch $(a'b')_{n_0+m_0} = a_{n_0} b_{m_0}$ in $I$. Nach voraussetzung des Lemmas liegt einer der Faktoren in $I$. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl. □

Gut zu wissen:

**Lemma 4.5.** *Sei $A$ ein Ring, $I \subset A$ ein Ideal. Dann ist $I$ ein Primideal genau dann, wenn $A/I$ ein nullteilerfreier Ring ist.*

Ein Ring heißt *nullteilerfrei* oder auch *Integritätsbereich*, wenn $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$. Außerdem verlangen wir $0 \neq 1$ in $A$.

*Beweis:* Sei $I$ Primideal. Wegen $I \neq A$ ist $0 \neq 1$ im Ring $A/I$. Sei $\overline{a} = a + I, \overline{b} = b + I \in A/I$ mit $\overline{a}\overline{b} = 0$. Dann gilt $ab + I = 0 + I \Leftrightarrow ab \in I$. Da $I$ Primideal ist, folgt $a \in I$ oder $b \in$I, bzw. $\overline{a} = 0$ oder $\overline{b} = 0$. Die Umkehrung geht genauso. □

**Beispiel.** $\mathbb{A}^n$ ist irreduzibel, denn $k[X_1, \ldots, X_n]$ ist ein Integritätsbereich. Ist $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ irreduzibel, so ist $V(f)$ ebenfalls irreduzibel (Übungsaufgabe).

**Beispiel.** Sei $V$ affine Varietät, $P \in V$. Dann ist $\{P\}$ irreduzibel, also

$$I(P) = \{f \in \mathcal{O}(V) \mid f(P) = 0\}$$

ein Primideal. In diesem Fall ist $\mathcal{O}(V)/I(P) \cong \mathcal{O}(P) \cong k$ via $f \mapsto f(P)$.

Wir erinnern uns:

**Definition 4.6.** *Sei $A$ ein Ring, $I \subset A$ ein Ideal. Dann heißt $I$* maximal, *wenn es maximal ist in der teilgeordneten Menge der echten Ideale. D.h. $I \neq A$ und für alle Ideale $J$ mit $I \subset J \subset A$ ist $I = J$ oder $J = A$.*

**Lemma 4.7.** *Sei $A$ ein Ring, $I \subset A$ ein Ideal. Dann ist $I$ genau dann maximal, wenn $A/I$ ein Körper ist.*

*Beweis:* Wir betrachten die surjektive Abbildung $\pi : A \to A/I$. Die Bedingung $I \neq A$ ist äquivalent dazu, dass $0 \neq 1$ in $A/I$. Dies setzen wir ab jetzt voraus.
Sei zunächst $I$ maximal, $\overline{f} = f + I \in A/I$ eine Restklasse ungleich 0. Wir betrachten

$$I \subset \pi^{-1}\langle\overline{f}\rangle \subset A$$

Da $I$ maximal ist, gilt entweder $I = \pi^{-1}(\langle\overline{f}\rangle)$ oder $\pi^{-1}\langle\overline{f}\rangle = A$. Im ersten Fall folgt $f \in \pi^{-1}\langle\overline{f}\rangle \subset I \Rightarrow \overline{f} = 0$, d.h. wir sind im zweiten Fall. Dann gibt es ein $g \in A$ mit $gf = 1$. Es folgt $\pi(g)\pi(f) = \pi(g)\overline{f} = 1$. Damit ist $A/I$ ein Körper.
Sei umgekehrt $A/I$ ein Körper und $I \subset J \subset A$ ein Ideal. Da $I \subset J$, gilt $J = \pi^{-1}\pi(J)$. Wir betrachten

$$0 = \pi(I) \subset \pi(J) \subset A/I$$

In einem Körper gibt es nur zwei Ideale, daher ist entweder $\pi(J) = 0$ (also $J = \pi^{-1}\pi(J) = \pi^{-1}0 = I$) oder $\pi(J) = A/I$ (also $J = A$). □

**Korollar 4.8.** *Maximale Ideale sind stets Primideale.*

*Beweis:* Körper sind nullteilerfrei. □

## Irreduzible Komponenten

Die weiteren Überlegungen benutzen nur, dass Varietäten noethersch sind als topologische Räume.

**Satz 4.9.** *Sei $X$ ein noetherscher topologischer Raum. Dann ist jede abgeschlossene Teilmenge $Y \subset X$ Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Teilmengen.*

*Beweis:* Angenommen, $Y$ ist nicht irreduzibel, also $Y = Y_0 \cup Y_1$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen $Y_0, Y_1$. Angenommen, $Y_0$ ist nicht irreduzibel, also $Y_0 = Y_{00} \cup Y_{01}$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen $Y_{00}, Y_{01}$. Angenommen, $Y_1$ ist nicht irreduzibel, also $Y_1 = Y_{10} \cup Y_{11}$ mit echten abgeschlossenen Teilmengen $Y_{10}, Y_{11}$. Diesen Prozess setzen wir fort. Es entsteht ein Baum, dessen Blätter jeweils irreduzibel sind. Angenommen, der Baum ist nicht endlich. Dann gibt es eine Kette von abgeschlossenen Teilmengen, die nicht stabil wird. Dies ist ein Widerspruch zu $Y$ noethersch. □

**Definition 4.10.** *Sei $Y$ ein noetherscher topologischer Raum. Eine irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y' \subset Y$ heißt* irreduzible Komponente, *wenn für jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge $Y' \subset Y'' \subset Y$ gilt $Y' = Y''$.*

**Theorem 4.11** (Zerlegung in irreduzible Komponenten)**.** *Sei $Y$ noetherscher topologischer Raum. Dann hat $Y$ endlich viele irreduzible Komponenten $Y_i$ für $i = 1, \dots, n$ und es gilt*

$$Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$$

*Ist $Y' \subset Y$ irreduzibel, so gibt es $i$ mit $Y' \subset Y_i$.*

*Beweis:* Sei $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_m$ die Zerlegung aus dem Satz. Wir setzen weiter voraus, dass die Zerlegung minimal gewählt ist, d.h. wir können keine der irreduziblen Mengen weglassen.

**Behauptung.** *Sei $Y' \subset Y$ irreduzibel. Dann gibt es $i$ mit $Y' \subset Y_i$.*

Wir betrachten $Y'_i = Y_i \cap Y'$. Es gilt

$$Y' = \bigcup_{i=1}^{m} Y'_i$$

Da $Y'$ irreduzibel ist, folgt $Y' = Y'_i$ für ein $i$. D.h. es gilt $Y' \subset Y_i$.

**Behauptung.** *$Y_1, \dots, Y_n$ sind irreduzible Komponenten.*

Wir betrachten ohne Einschränkung $Y_1$. Sei $Y_1 \subset Y' \subset Y$ mit irreduziblem $Y'$. Dann gilt $Y' \subset Y_i$ für ein $i$. Falls $i \neq 1$, so ist $Y_1$ in der Zerlegung überflüssig. Das wäre ein Widerspruch zur Minimalität. Also ist $Y' \subset Y_1 \subset Y'$. Das macht $Y_1$ zu einer irreduziblen Komponente.

**Behauptung.** *Jede irreduzible Komponente ist ein $Y_i$ mit $i \leq m$.*

Wir wenden die erste Behauptung auf eine irreduzible Komponente $Y$' an. Es folgt $Y' = Y_i$. □

**Definition 4.12.** *Sei $X$ ein topologischer Raum. Die* (Krull)-Dimension *von $X$ ist*

$$\dim X = \sup\{n \in \mathbb{N}_0 | \text{ es gibt eine Kette } X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_n, \quad X_i \subset X \text{ irreduzibel, abgeschlossen}\}$$

**Beispiel.** (i) $X = \{P\} \Rightarrow \dim X = 0$, denn die einzige irreduzible Teilmenge ist $X$ selbst.

(ii) $X = \mathbb{A}^1$ hat Dimension 1, die Ketten haben die Form $\{P\} \subset \mathbb{A}^1$ für beliebiges $P$.

(iii) Sei $V = V(XY, XZ) \subset \mathbb{A}^3$. Es gilt

$$V = \{(x, y, z) | xy = 0, xz = 0\} = \{(0, y, z) | y, z \in k\} \cup \{(x, 0, 0) | x \in k\}$$

Diese Menge hat Dimension $\geq 2$. Die irreduzible Komponente $V(Y, Z)$ hat Dimension 1.

**Bemerkung.** Sogar in noetherschen topologischen Räumen muss die Krulldimension nicht immer endlich sein.

Einige Eigenschaften der Dimension sind klar.

**Bemerkung.** (i) Sei $Y \subset W$ abgeschlossene Teilmenge. Dann ist $\dim Y \leq \dim W$, denn jede Kette von irreduziblen Teilmengen von $Y$ ist auch eine in $W$.

(ii) $\dim \mathbb{A}^n \geq n$, denn es gibt die Kette

$$\mathbb{A}^n \supset V(X_1) \supsetneq V(X_1, X_2) \supsetneq \cdots \supsetneq V(X_1, \ldots, X_n)$$

Tatsächlich gilt $\dim \mathbb{A}^n = n$, aber das wird uns noch einige Mühe machen. Insbesondere sind *alle* Varietäten endlich-dimensional.
Ist $k = \mathbb{C}$, so trägt jede Zariski-abgeschlossene Teilmenge $Y \subset \mathbb{C}^n$ auch die gewöhnliche Topologie und hat eine Dimension als Mannigfaltigkeit (mit Singularitäten). Tatsächlich stimmen die Dimensionsbegriffe überein, aber das werden wir nicht beweisen.

# Hilbertscher Nullstellensatz

Wir kehren nun wieder zur Situation von affinen Varietäten zurück. Wir wollen die Korrespondenz von Idealen und affinen Varietäten verstehen.

$$V : \left\{ S \subset k[X_1, \ldots, X_n] \right\} \to \left\{ V(S) \subset \mathbb{A}^n \right\}$$

ordnet jeder Teilmenge eine abgeschlossene Teilmenge zu; die durch $S$ definierte affine Varietät.

$$I : \{V \subset \mathbb{A}^n\} \to \{S \subset k[X_1, \ldots, X_n]\}$$

ordnet jeder Teilmenge das Verschwindungsideal zu. Wir hatten bereits überprüft (Lemma 1.12) dass

$$V(I(V)) = V$$

für alle algebraischen Mengen.
Wir haben gesehen, dass nur reduzierte Ideale auftauchen, denn wenn $f^n \in I(V)$ für ein $f \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$, $n \in \mathbb{N}$, so ist $f \in I(V)$.
Ziel ist zu verstehen:

**Theorem 4.13** (Hilbertscher Nullstellensatz)**.** *Sei $k$ algebraisch abgeschlossener Körper. Für jede Teilmenge $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ gilt*

$$I(V(S)) = \sqrt{\langle S \rangle}$$

*Insbesondere erhalten wir eine Bijektion zwischen Radikalidealen von $k[X_1, \ldots, X_n]$ und abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{A}^n$.*

Dies bedeutet auch $I(V(I)) = I$ für alle Radikalideale $I$.
Den vollen Beweis verschieben wir in ein späteres Kapitel. Wir diskutieren jedoch schon jetzt eine wesentliche Reduktion auf einen Spezialfall, nämlich den der maximalen Ideale.

**Beispiel.** Sei $P \in \mathbb{A}^n$ ein Punkt. Dann ist $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I(P) = \mathcal{O}(P) \cong k$. Dies ist ein Körper, also ist $I(P)$ maximal. Ist $P = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n$, so liegen die Funktionen $X_i - a_i$ für $i = 1, \ldots, n$ in $I(P)$. Offensichtlich gilt sogar

$$I(P) = \langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle$$

**Theorem 4.14** (Schwacher Nullstellensatz)**.** *Sei $k$ algebraisch abgeschlossen und $A = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$. Dann sind alle maximalen Ideale von der Form*

$$\langle X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n \rangle \text{ mit } a_i \in k \text{ für } i = 1, \ldots, n$$

Mit anderen Worten: Alle Funktionen des maximalen Ideals haben eine gemeinsame Nullstelle, nämlich $P = (a_1, \ldots, a_n)$.

**Beispiel.** Sei $n = 1$. Dann sind alle Ideale Hauptideale, d.h. erzeugt von einem Polynom. Die maximalen Ideale werden dabei von den irreduziblen Polynomen erzeugt. Da $k$ algebraisch abgeschlossen ist, sind die irreduziblen Polynome linear.

Den Beweis von Theorem 4.14 verschieben wir in das Kapitel zur Dimensionstheorie. Aber:

*Beweis von Theorem 4.13:* Sei $k$ algebraisch abgeschlossen, $J \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal.

**Behauptung.** $I(V(J)) = \sqrt{J}$

Die Inklusion $\supset$ ist klar.
Für die Umkehrung sei $J = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$, $g \in I(V(J))$. Wir benutzen einen Trick. Sei $X_0$ eine weitere Unbestimmte. Wir betrachten das Ideal

$$J' = \langle f_1, \ldots, f_m, 1 - X_0 g \rangle \subset k[X_0, \ldots, X_n]$$

Angenommen, dies ist nicht ganz $k[X_0, \ldots, X_n]$.

**Unterbehauptung.** *$J'$ ist einem maximalen Ideal $J'_M$ enthalten.*

Wenn $J'$ nicht maximal ist, so ist es echt in einem größeren enthalten, das nicht der ganze Ring ist. Ist dieses nicht maximal, so gibt es ein echt größeres, etc. Da der Ring noethersch ist, endet dieser Prozess.
Nach dem schwachen Nullstellensatz, Theorem 4.14, hat dieses maximale Ideal $J'_M$ eine gemeinsame Nullstelle $P' = (a_0, \ldots, a_n)$, die dann auch gemeinsame Nullstelle aller Elemente von $J'$ ist. Insbesondere ist $P = (a_1, \ldots, a_n)$ gemeinsame Nullstelle von $f_1, \ldots, f_m$, liegt also in $V(J)$. Wegen $g \in I(V(J))$ folgt $g(P) = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $1 - a_0 g(P) = 0$.

Damit ist $J' = k[X_0, \ldots, X_n]$. Also gibt es $h_0, \ldots, h_m \in k[X_0, \ldots, X_n]$ mit

$$1 = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_m f_m + h_0(1 - X_0 g)$$

Wir ersetzen in dieser Relation $X_0$ durch $1/g$ (Achtung, auch die $h_i$ hängen von $X_0$ ab!) und multiplizieren mit einer hohen Potenz von $g$, so dass die Vorfaktoren der $f_i$ Elemente von $k[X_1, \ldots, X_n]$ (also ohne Nenner) werden. Dies ergibt

$$g^N = h'_1 f_1 + \cdots + h'_m f_m \Rightarrow g \in \sqrt{J}$$

□

**Bemerkung.** Wir haben also Bijektionen

$$\begin{aligned} \{\text{Radikalideale}\} &\leftrightarrow \{\text{affine Varietäten}\} \\ \{\text{Primideale}\} &\leftrightarrow \{\text{irreduzible affine Varietäten}\} \\ \{\text{maximale Ideale}\} &\leftrightarrow \{\text{Punkte}\} \end{aligned}$$

**Korollar 4.15.** *Sei $X$ affine Varität. Die Dimension von $X$ ist gleich der Krulldimension von $\mathcal{O}(X)$, d.h. gleich der maximalen Länge einer echten Kette von Primidealen.*

*Beweis:* Klar nach dem Hilbertschen Nullstellensatz. □

# Kapitel 5

# Lokale Ringe und Lokalisierung

## Der irreduzible Fall

**Definition 5.1.** *Sei $A$ Integritätsbereich. Dann heißt*

$$Q(A) = \left\{ \frac{a}{s} | a \in A, s \in A \setminus \{0\} \right\}$$

Quotientenkörper *von $A$. Dabei ist $\frac{a}{s}$ die Äquivalenzklasse des Paars $(a, s) \in A \times (A \setminus \{0\})$ bezüglich der Äquivalenzrelation*

$$(a, s) \sim (a', s') \Leftrightarrow as' = a's$$

*für alle $a, a', s, s' \in A, s, s' \neq 0$. Die Addition und Multiplikation ist die Addition und Multiplikation von Brüchen.*

**Beispiel.** $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$.

**Definition 5.2.** *Sei $V$ eine irreduzible affine Varietät. Dann heißt*

$$k(V) = Q(k[V])$$

Funktionenkörper von $V$. *Die Elemente von $k(V)$ heißen* rationale Funktionen auf $V$. *Ist $V$ quasi-affin mit Zariski-Abschluss $\overline{V}$ (und irreduzibel), so setzen wir auch*

$$k(V) = k(\overline{V}).$$

*Sei $P \in V$ und $f \in k(V)$. Dann heißt $f$* regulär *in $P$, falls $f = \frac{g}{h}$ mit $h(P) \neq 0$. In diesem Fall setzen wir $f(P) = \frac{g(P)}{h(P)}$. Andernfalls setzen wir $f(P) = \infty$. Der Ring*

$$\mathcal{O}_P = \{f \in k(V) | f \text{ regulär in } P\}$$

*heißt* lokaler Ring von $V$ in $P$.

**Bemerkung.** Es ist leicht zu sehen, dass $f(P)$ wohldefiniert ist.

**Definition 5.3.** *Ein Ring heißt* lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal hat.*

**Lemma 5.4.** *Sei $V$ irreduzible affine Varietät, $P \in V$. Dann ist $\mathcal{O}_P$ lokal mit maximalem Ideal $m_P = \{f \in \mathcal{O}_P | f(P) = 0\}$.*

*Beweis:* Wir betrachten die Auswertungungsfunktion

$$\mathcal{O}_P \to k, \qquad f \mapsto f(P)$$

Sie ist surjektiv da $k \subset k[V] \subset \mathcal{O}_P$ und hat den Kern $m_P$. Damit ist $m_P$ maximal.

**Behauptung.** *Jedes Element in $\mathcal{O}_P \smallsetminus m_P$ ist invertierbar.*

Sei $f = g/h \in \mathcal{O}_P \smallsetminus m_P$ mit $h(P) \neq 0$. Nach Voraussetzung ist $g(P) \neq 0$. Dann ist $h/g$ das gesuchte Inverse.

**Behauptung.** *Jedes echte Ideal ist in $m_P$ enthalten.*

Sei $I \subsetneq \mathcal{O}_P$ ein echtes Ideal. Dann enthält $I$ keine invertierbaren Elemente, d.h.

$$I \cap (\mathcal{O}_P \smallsetminus m_P) = \emptyset \Leftrightarrow I \subset m_P$$

In dieser Situation ist jedes maximale Ideal in $m_P$ enthalten, also gleich $m_P$. $\square$

Wir halten das Kriterium fest, dass wir gerade im Beweis verifiziert haben:

**Lemma 5.5.** *Sei $A$ ein Ring, $m \subset A$ ein Ideal. Dann ist $A$ genau dann lokal mit maximalem Ideal $m$, wenn $A \smallsetminus m$ die Menge der invertierbaren Elemente von $A$ ist.*

**Definition 5.6.** *Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ quasi-affin und irreduzibel. Dann setzen wir*

$$\mathcal{O}(V) = \bigcap_{P \in V} \mathcal{O}_P \subset k(V)$$

*den* Ring der algebraischen Funktionen *auf $V$.*

**Bemerkung.** Jetzt müssen wir eigentlich sofort überprüfen, dass für affine Varietäten $k[V] = \mathcal{O}(V)$ (im obigen Sinn.) Das ist wahr, aber wir verschieben den Beweis, bis wir uns von der Irreduzibilitätsvoraussetzung lösen können. Fürs Erste unterscheiden wir $k[V]$ und $\mathcal{O}(V)$.

**Lemma 5.7.** *Sei $V$ eine irreduzible affine Varietät, $f \in k(V)$. Dann ist*

$$U = \{P \in V | f \text{ regulär in } P\}$$

*offen in $V$.*

*Beweis:* Sei $I = \{(g,h) \in k[V]^2 | f = g/h\}$. Dann gilt

$$U = \bigcup_{(g,h)\in I} U_h,$$

wobei wie vorher $U_h = V \smallsetminus V(h)$. □

**Korollar 5.8.** *Sei $V$ quasi-affin, irreduzibel, $P \in V$. Dann gilt*

$$\mathcal{O}_P = \bigcup_{P\in U} \mathcal{O}(U)$$

*wobei $U$ alle offenen Teilmengen von $V$ durchläuft, die $P$ enthalten.*

Die Elemente von $\mathcal{O}_P$ heißen daher auch *Keime von algebraischen Funktionen*, ein Begriff aus der Garbentheorie.

## Lokalisierung von Moduln

Wir wollen nun allgemeiner das Rechnen mit Brüchen $\frac{m}{s}$ verstehen, wobei $m$ aus einem Modul kommt, $s$ aus dem Ring. Wir erinnern uns an die Additions- und Multiplikationsregeln:

$$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'm + sm'}{ss'}, \qquad \frac{a}{s}\frac{m'}{s'} = \frac{am'}{ss'}$$

Dafür muss man Nenner multiplizieren können.

**Definition 5.9.** *Sei $A$ ein Ring. Eine Teilmenge $S \subset A$ heißt* multiplikativ*, wenn $1 \in S$, $0 \notin S$ und $S$ abgeschlossen unter Multiplikation.*

**Beispiel.** (i) Sei $f \in A$ ein Element. Dann ist $S_f = \{1, f, f^2, \dots\}$ multiplikativ, falls $f$ nicht nilpotent ist.

(ii) Sei $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann ist $S_\mathfrak{p} = A \smallsetminus \mathfrak{p}$ multiplikativ.

(iii) Sei $A$ Ring, $S$ die Menge aller Elemente ungleich 0, die keine Nullteiler sind. Diese Menge ist multiplikativ. Ist $A$ nullteilerfrei, so ist dies $S = A \smallsetminus \{0\}$.

**Definition 5.10.** *Sei $A$ ein Ring, $S \subset A$ multiplikative Teilmenge, $M$ ein $A$-Modul. Auf $M \times S$ definieren wir eine Relation durch*

$$(m,s) \sim (m',s') \Leftrightarrow \text{ es gibt } t \in S \text{ mit } ts'm = tsm'$$

*für alle $m, m' \in M$, $s, s' \in S$. Wir schreiben $\frac{m}{s}$ für die Äquivalenzklasse von $(m,s)$. Dann heißt*

$$S^{-1}M = \left\{\frac{m}{s} | m \in M, s \in S\right\}$$

Lokalisierung von $M$ an $S$.
*Für $f \in A$ nicht nilpotent schreiben wir $M_f = S_f^{-1}M$. Für ein Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ schreiben wir $M_\mathfrak{p} = S_\mathfrak{p}^{-1}M$.*

Die Relation ist so gemacht, dass zwei Brüche gleich sind, wenn sie nach Erweitern gleich sind. Wenn der Ring keine Nullteiler enthält, genügt Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner, z.B. das Produkt der Nenner. Wenn $A$ Nullteiler enthält, muss man die zusätzliche Erweiterung um ein weiteres $t$ zulassen.

**Lemma 5.11.** *Seien $A, S, M$ wie in der Definition.*

*(i)* $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation.*

*(ii) Mit der Addition von Brüchen ist $S^{-1}M$ eine abelsche Gruppe.*

*(iii) $S^{-1}A$ mit der Addition und Multiplikation von Brüchen ist ein Ring. Die Abbildung $a \mapsto \frac{a}{1}$ ist ein Ringhomomorphismus.*

*(iv) Mit der Multiplikation von Brüchen ist $S^{-1}M$ ein $S^{-1}A$-Modul.*

*Beweis:* Symmetrie und Reflexivität ist klar. Sei

$$(m, s) \sim (m', s') \sim (m'', s'')$$

Dann gibt es nach Voraussetzung $t, t' \in S$ mit

$$ts'm = tsm', t's''m' = t's'm'' \Rightarrow tt's's''m = t's''(tsm') = ts(t's'm'')$$

Also $(m, s) \sim (m'', s'')$ via $tt's' \in S$.
Die Verifikation aller anderen Aussagen ist elementares Rechnen mit Brüchen. Wir behandeln bespielhaft die Wohldefiniertheit der Addition. Sei

$$\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'}, \frac{n}{t} = \frac{n'}{t'}$$

mit $m, m', n, n' \in M$, $s, s', t, t' \in S$. Nach Definition gibt es dann $u, v \in S$ mit

$$\begin{aligned} \frac{us'm}{ss'u} = \frac{usm'}{ss'u} &\Rightarrow \frac{vtt'us'm}{vtt'ss'u} = \frac{vtt'usm'}{vtt'ss'u} \\ \frac{vt'n}{tt'v} = \frac{vtn'}{tt'v} &\Rightarrow \frac{uss'vt'n}{uss'tt'v} = \frac{uss'vtn'}{uss'tt'v} \end{aligned}$$

Ebenso

$$\frac{tm + sn}{st} = \frac{s't'uv(tm + sn)}{uvtt'ss'}, \frac{t'm' + s'n'}{s't'} = \frac{stuv(t'm' + s'n')}{uvtt'ss'}$$

Einsetzen ergibt die Behauptung. □

**Beispiel.** Sei $A = k[V]$ für eine irreduzible affine Varietät, $S = A \setminus \{0\}$. Dann ist $k(V) = S^{-1}A$. Sei $P \in V$ und $\mathfrak{m} = I(P)$ das zugehörige maximale Ideal. Dann ist $\mathcal{O}_P = A_{\mathfrak{m}}$.

**Bemerkung.** Gibt es einen Nullteiler $s \in S$, so ist $A \to S^{-1}A$ nicht injektiv, denn $\frac{s}{1} = \frac{0}{1}$. (Übungsaufgabe)

Ist $f : M \to N$ ein Morphismus von $A$-Moduln, $S \subset A$ multiplikativ, so erhält man durch $f(\frac{m}{s}) = \frac{f(m)}{s}$ für alle $m \in M$, $s \in S$ einen induzierten Morphismus von $S^{-1}A$-Moduln. Wir schreiben $S^{-1}f$ oder auch abkürzend $f$ für diesen induzierten Morphismus.

**Lemma 5.12.** *Sei $A$ ein Ring, $S \subset A$ eine multiplikative Menge,*

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

*eine exakte Sequenz von $A$-Moduln. Dann ist*

$$S^{-1}M_1 \to S^{-1}M_2 \to S^{-1}M_3$$

*eine exakte Sequenz von $S^{-1}A$-Moduln.*

Funktoren mit dieser Eigenschaft nennt man *exakt*.

*Beweis:* Nach Voraussetzung gilt $g \circ f = 0$. Sei nun $\frac{m_1}{s} \in S^{-1}M_1$ mit $m_1 \in M_1, s \in S$. Dann ist

$$g \circ f(\frac{m_1}{s}) = \frac{g \circ f(m_1)}{s} = \frac{0}{s}$$

Dies bedeutet $\operatorname{Im} S^{-1}f \subset \operatorname{Ker} S^{-1}g$.
Sei nun $\frac{m_2}{s} \in S^{-1}M_2$, das im Kern von $S^{-1}g$ liegt, also

$$\frac{g(m_2)}{s} = \frac{0}{1} \Leftrightarrow t \cdot 1 \cdot g(m_2) = ts \cdot 0 \text{ für ein } t \in S.$$

Wegen der $A$-Linearität von $g$ folgt

$$g(tm_2) = tg(m_2) = 0$$

Wegen der Exaktheit der Sequenz gibt es $m_1 \in M_1$ mit $f(m_1) = tm_2$. Dann ist

$$S^{-1}f\left(\frac{m_1}{ts}\right) = \frac{f(m_1)}{ts} = \frac{tm_2}{st} = \frac{m_2}{s}$$

□

**Korollar 5.13.** *Sei $A$ ein Ring, $S \subset A$ multiplikativ, $I \subset A$ ein Ideal. Dann ist $S^{-1}I \subset S^{-1}A$ ein Ideal. Es ist $S^{-1}I = S^{-1}A$ genau dann, wenn $S \cap I \neq \emptyset$.*

*Beweis:* Da $S^{-1}$ exakt ist, ist $S^{-1}I \subset S^{-1}A$ ein Untermodul, also ein Ideal. Wir haben Gleichheit genau dann, wenn $\frac{1}{1} \in S^{-1}I$, d.h. von der Form $\frac{s}{s}$ mit $s \in S$ (Nenner) und $s \in I$ (Zähler). □

**Lemma 5.14.** *Sei $A$ ein Ring, $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dann ist $A_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}_\mathfrak{p} = S_\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}$.*

*Beweis:* $S_\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}$ ist ein Ideal. Wir zeigen, dass alle Elemente von $S_\mathfrak{p}^{-1}A \smallsetminus S_\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}$ invertierbar sind. (Dann sind alle echten Ideal in $S_\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}$ enthalten, der Ring ist lokal.) Sei also $\frac{a}{s}$ im Komplement. D.h. $a \in A \smallsetminus \mathfrak{p} = S_\mathfrak{p}$. Dann ist $\frac{s}{a}$ das gesuchte Inverse. □

Eine Eigenschaft von Ringen oder Moduln heißt *lokal*, wenn man sie nach Lokalisierung an allen Primidealen überprüfen kann. Beispiele sind Regularität, ganz abgeschlossen, flach. Das wichtigste Beispiel ist das folgende:

**Satz 5.15.** *Sei $A$ ein Ring, $M$ ein $A$-Modul. Dann sind äquivalent:*

*(i)* $M = 0$

*(ii)* $M_{\mathfrak{p}} = 0$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p} \subset A$.

*(iii)* $M_{\mathfrak{m}} = 0$ *für alle maximalen Ideale* $\mathfrak{m} \subset A$.

*Beweis:* Die ersten beiden Implikationen sind trivial. Wir müssen also (iii) nach (i) überprüfen.
Angenommen $M \neq 0$, aber $M_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle maximalen Ideale von $A$. Sei $0 \neq m \in M$. Sei $I = \{a \in A | am = 0\}$. Dies ist ein Ideal von $A$, also in einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ enthalten. (Für noethersche Ringe ist dies einfach, im allgemeinen braucht man das Zornsche Lemma. Wir können uns für die algebraische Geometrie mit dem noetherschen Fall zufriedengeben.) Nach Voraussetzung ist $M_{\mathfrak{m}} = 0$, also auch $\frac{m}{1} = \frac{0}{1}$. Dies bedeutet, dass es $t \in S_{\mathfrak{m}}$ gibt mit $tm = 0$. Dann ist $t \in I \subset \mathfrak{m}$. Dies ist ein Widerspruch zu $t \in S_{\mathfrak{m}} = A \smallsetminus \mathfrak{m}$. □

Zum Abschluss noch die graduierte Version:

**Lemma 5.16.** *Sei $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ ein graduierter Ring, $S \subset A$ eine multiplikative Menge von homogenen Elementen. Dann ist $S^{-1}A$ ein graduierter Ring (wobei negative Grade erlaubt sind).*

*Beweis:* Sei $a = \sum a_i$, $f \in S$. Dann ist

$$\frac{a}{f} = \sum \frac{a_i}{f}$$

wobei $a_i/f$ den Grad $i - \deg(f)$ erhält. Alle Rechenregeln gelten. □

Ist $A$ graduiert, $\mathfrak{p} \subset A$ ein homogenes Primideal, so ist die Menge $T_{\mathfrak{p}}$ der homogenen Elemente von $A \smallsetminus \mathfrak{p}$ multiplikativ.

**Lemma 5.17.** *Der Ring $(T_{\mathfrak{p}}^{-1}A)_0$ ist lokal mit maximalem Ideal $(T_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{p})_0$.*

*Beweis:* Elemente von $(T_{\mathfrak{p}}^{-1}A)_0$ sind von der Form $x = \frac{a}{f}$, wobei $a \in A$, $f \in T_{\mathfrak{p}}$, beide homogen vom selben Grad. Wenn $x \notin T_{\mathfrak{p}}^{-1}\mathfrak{p}$, so ist $a \notin \mathfrak{p}$, also $a \in T_{\mathfrak{p}}$. Das Inverse ist $\frac{f}{a}$. □

## Lokale Ringe von Varietäten

Wir kehren zurück zu den Koordinatenringen von affinen Varietäten, jetzt ohne Irreduzibilität vorauszusetzen.

**Definition 5.18.** *Sei $V$ eine affine Varietät, $P \in V$ mit zugehörigem maximalen Ideal $m_p \in k[V]$. Dann heißt*

$$\mathcal{O}_P = k[V]_{m_P}$$

lokaler Ring *von $V$ in $P$.*

Dies passt zu unserer Definition im irreduziblen Fall.
Wir wollen die Elemente von $\mathcal{O}_P$ als Funktionen auffassen. Die Elemente von $\mathcal{O}_P$ haben die Form $f/g$ mit $f, g \in k[V]$, $g(P) \neq 0$. Der Bruch definiert also eine Abbildung

$$\frac{f}{g} : U_g \to k.$$

Die Repräsentation als Bruch ist aber nicht eindeutig. Angenommen $f/g = f'/g' \in \mathcal{O}_P$. Diese definieren also Abbildungen auf $U_g$ und $U_{g'}$. Wie hängen die Abbildungen zusammen? Nach Definition gibt es $h \in k[V]$ mit $h(P) \neq 0$, so dass

$$hg'f = hgf' \in k[V]$$

Die beiden Seiten sind also gleich als Abbildungen $V \to k$. Hieraus folgt auf $U_h \cap U_g \cap U_{g'} = U_{hgg'}$

$$\frac{f}{g} = \frac{hg'f}{hgg'} = \frac{hgf'}{hgg'} = \frac{f'}{g'} : U_{hgg'} \to k.$$

**Definition 5.19.** *Sei $V$ eine affine Varietät, $P \in V$. Ein* Funktionenkeim *in $P$ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren $(U, \alpha)$, wobei $U \subset V$ offen, $\alpha : U \to k$ eine Abbildung und*

$$(U, \alpha) \sim (U', \alpha')$$

*genau dann, wenn es eine offene Teilmenge $W \subset U \cap U'$ gibt mit $P \in W$ und $\alpha|_W = \alpha'|_W$. Wir schreiben $\alpha_P$ für die Klasse von $(U, \alpha)$.*

Da jede offene Umgebung von $U$ eine standardoffene Menge enthält, genügt es standardoffene $U, U'$ und $W$ zu betrachten. Wir fassen unsere Vorüberlegungen zusammen:

**Lemma 5.20.** *Sei $V$ eine affine Varietät, $P \in V$. Dann definiert jedes Element von $\mathcal{O}_P$ einen eindeutigen Funktionenkeim in $P$.*

Sei nun $V \subset \mathbb{P}^n$ projektiv. Wir können die Elemente von $S[V]$ nicht als Funktionen auffassen. Sind aber $f$ und $g$ homogen vom selben Grad, so ist $f/g$ eine wohldefinierte Funktion auf $U_g$.

**Definition 5.21.** *Sei $V$ projektive Varietät, $P \in V$ mit zugehörigem maximalen Ideal $m_P \in S[V]$. Dann heißt*

$$\mathcal{O}_P = \left(T_{m_p}^{-1} S[V]\right)_0$$

*($T_{m_p}$ die multiplikative Menge der homogenen Elemente von $S[V] \smallsetminus m_p$)* lokaler Ring von $V$ in P. *Ist $V$ irreduzibel, so heißt*

$$k(V) = \left(T_0^{-1}S[V]\right)\Big)_0$$

*(wobei $T_0$ die Menge der homogenen Elente ungleich $0$ in $S[v]$)* Funktionenkörper *von $V$.*

Wie im affinen Fall definiert jedes Element von $\mathcal{O}_P$ einen eindeutigen Funktionenkeim. Man sieht leicht, dass $k(V)$ ein Körper ist, da das Nullideal ein homogenes Primideal ist.

## Algebraische Funktionen

**Definition 5.22.** *Sei $V$ eine affine oder projektive Varietät, $U \subset V$ offen. Eine Abbildung $\alpha : U \to k$ heißt* algebraisch*, wenn der Keim von $(U, \alpha)$ für jeden Punkt $P \in U$ in $\mathcal{O}_P$ liegt. Es sei $\mathcal{O}(U)$ der Ring der algebraischen Funktionen.*

**Beispiel.** Im Fall $V = U$ affin ist jedes Element von $k[V]$ algebraisch.
Sei nun $U = U_f$ für $f \in k[V]$ nicht nilpotent, $U = U_f$. Jedes Element $a/f^n \in k[V]_f$ definiert eine algebraische Funktion auf $U_f$. Dasselbe gilt auch für homogene $f \in S[V]$.

**Satz 5.23.** *Sei $V$ affine Varietät, $f \in k[V]$ nicht nilpotent. Dann ist die natürliche Abbildung*

$$k[V]_f \to \mathcal{O}(U_f)$$

*ein bijektiver Ringhomomorphismus, insbesondere*

$$k[V] = \mathcal{O}(V).$$

*Beweis:* Wir erledigen zunächst die Injektivität. Sei $a/f^n \in k[V]_f$ gleich 0 aufgefasst als Funktion in $\mathcal{O}(U_f)$, d.h. $a(Q)/f(Q)^n = 0$ für alle $Q \in U_f$. (Dies ist wohldefiniert, da $f(Q) \neq 0$ in ganz $U_f$.) Es folgt $a(Q) = 0$ für alle $Q \in U_f$. Mit anderen Worten, $V(a) \supset U_f$ beziehungsweise $V(a) \cup V(f) = V$. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist dann $0 = \sqrt{\langle af \rangle} \Rightarrow af = 0$. Hieraus folgt in $k[V]_f$ die Gleichheit

$$\frac{a}{f^n} = \frac{af}{f^{n+1}} = 0 \; .$$

Das ist Injektivität.

Sei $\phi : U_f \to k$ algebraisch. Für jedes $P \in U$ ist der Keim $\phi_P$ von $\phi$ ein Element $\phi_P \in \mathcal{O}_P$. Dieses wird repräsentiert durch einen Bruch $a_P/f_P$, dessen Keim mit $\phi_P$ übereinstimmt. Ohne Einschränkung gilt diese Gleichheit auf einer standardoffenen Umgebung von $P$, nach Erweitern des Bruchs (d.h. Ersetzen von $f_p$ durch ein Vielfaches) sogar auf $U_{f_P}$. Da $U_f$ quasi-kompakt ist, genügen endlich viele der $U_{f_P}$, um ganz $U_f$ zu überdecken. Damit sind wir in der folgenden Situation:

$U_f = \bigcup_{i=1}^N U_{f_i}$ eine standardoffene Überdeckung, so dass $\phi_i = \phi|_{U_{f_i}}$ von der Form $a_i/f_i$. Man beachte, dass $U_{f_i} \cap U_{f_j} = U_{f_i f_j}$. Für $i \neq j$ gilt dann

$$\frac{a_i f_j}{f_i f_j} = g|_{U_{f_i f_j}} = \frac{a_j f_i}{f_i f_j}$$

als Funktionen auf $U_{f_i f_j}$. Wegen der Injektivität gilt die Gleichheit dann bereits in $k[V]_{f_i f_j}$. Wir müssen also zeigen:

**Behauptung.** *Für $U_f = \bigcup_{i=1}^N U_{f_i}$ ist die Sequenz*

$$0 \to k[V]_f \to \bigoplus_{i=1}^N k[V]_{f_i} \to \bigoplus_{i,j} k[V]_{f_i f_j}$$

*exakt, wobei die zweite Abbildung*

$$(a_i/f_i)_i \mapsto (a_j/f_j - a_i/f_i)_{i,j}$$

*ist.*

Unser Element liegt also im Kern der zweiten Abbildung. Dies bedeutet, dass es $n \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$f_i^n f_j^n (a_i f_j - a_j f_i) = 0 \Leftrightarrow f_j^{n+1}(a_i f_i^n) = f_i^{n+1}(a_j f_j^n)$$

zunächst für ein Paar $i, j$. Wir wählen $n$ so groß, dass die Gleichung für alle $i, j$ gleichzeitig gilt.
Nun ersetzen wir $f_i$ durch $f_i^{n+1}$ und $a_i$ durch $a_i f_i^n$. Dann gilt weiterhin $\phi_i = a_i/f_i$ in $U_{f_i}$ und außerdem

$$a_i f_j = a_j f_i$$

für alle $i, j$.
Nach Voraussetzung gilt $\bigcup_{i=1}^N U_{f_i} = U_f$. Dies impliziert $\bigcap_{i=1}^n V(f_i) \subset V(f)$, also nach dem Hilbertschen Nullstellensatz $f \in \sqrt{\langle f_1, \dots, f_N \rangle}$. Es gibt also $m \in \mathbb{N}$ und $b_i \in k[V]$ mit

$$f^m = \sum_{i=1}^N b_i f_i$$

Sei $a = \sum_{i=1}^N b_i a_i$.

**Behauptung.** *$a/f^m \in k[V]_f$ repräsentiert $\phi$.*

Es folgt nämlich

$$f_j a = \sum_i b_i a_i f_j = \sum_i b_i f_i a_j = a_j f^m$$

Also $a/f^m = a_j/f_j = g_j$ in $U_{f_j}$ □

**Bemerkung.** Ist $V$ irreduzibel, so erhalten wir also Definition 5.2 für $\mathcal{O}(U)$ zurück. Dann stimmen auch Definition 5.6 und die allgemeinere Definition 5.22 für algebraische Funktionen überein.

# Kapitel 6

# Hilbertscher Nullstellensatz und Dimensionstheorie

Wir greifen nun den Faden im affinen Fall wieder auf und wollen zeigen, dass die Dimension des $\mathbb{A}^n$ tatsächlich $n$ ist. Der Beweis wird auch viele andere Eigenschaften der Dimension implizieren. Nebenbei beweisen wir auch den Hilbertschen Nullstellensatz.

## Endliche Morphismen

Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus, $b_1, \dots, b_n \in B$ Elemente. Wir schreiben $A[b_1, \dots, b_n]$ für den Teilring von $B$, der als $A$-Algebra von $b_1, \dots, b_n$ erzeugt wird.

**Definition 6.1.** *Sei $f : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.*

*(i) $B$ heißt* endlich *über $A$, falls $B$ ein endlich erzeugter $A$-Modul ist.*

*(ii) Ein Element $b \in B$ heißt* ganz *über $A$, falls $A[b]$ ein endlich erzeugter $A$-Modul ist.*

*(iii) $B$ heißt* ganz *über $A$, falls alle Elemente von $B$ ganz über $A$ sind.*

**Bemerkung.** Achtung! Für Ringhomomorphismen $f : A \to B$ sind *endlich* und *endlich erzeugt* ganz unterschiedliche Dinge!.

**Beispiel.** (i) Sei $A = k[X]$, $B = k[X, Y]/f$ mit $f = X^2 + Y^2 - 1$. Dann wird $B$ als $A$-Modul erzeugt von $1, Y \mod f$. Also ist $B$ endlich über $A$.

(ii) Sei $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$. Dann wird $B$ als $\mathbb{Z}$-Modul erzeugt von $1, \sqrt{3}$.

(iii) Sei $A = k[X]$, $B = k[X, Y]$. Dann ist $B$ endlich erzeugt als $A$-Algebra, aber nicht als $A$-Modul, denn $1, Y, Y^2, \dots$ ist eine $A$-Basis. Die Erweiterung ist nicht endlich.

(iv) Sei $A = K$ ein Körper. Dann ist $B$ genau dann endlich über $A$, falls $\dim_K B < \infty$.

**Bemerkung.** (i) Ist in (iv) auch $B = L$ ein Körper, so nennt man $L/K$ eine *endliche Körpererweiterung*. Ihre Eigenschaften werden ausführlich in der Algebra-Vorlesung besprochen.

(ii) In der algebraischen Zahlentheorie betrachtet man $A = \mathbb{Z}$, $B$ die Menge aller ganzen Elemente in einem Körper $K/\mathbb{Q}$. Man zeigt dann, dass $B$ ein Ring ist und sogar endlich, falls $K/\mathbb{Q}$ endlich. Bei uns werden diese Fragen keine Rolle spielen.

Zunächst einfache Rechenregeln.

**Lemma 6.2.** *Sei $f : A \to B$ endlicher Ringhomomorphismus.*

*(i) Sei $g : B \to C$ endlich. Dann ist auch $g \circ f : A \to C$ endlich.*

*(ii) Seien $I \subset A$, $J \subset B$ Ideale mit $f(I) \subset J$. Dann ist*

$$\overline{f} : A/I \to B/J$$

*endlich.*

*(iii) Sei $S \subset A$ multiplikativ. Dann ist*

$$S^{-1}f : S^{-1}A \to S^{-1}B$$

*endlich.*

*Beweis:* Sei $b_1, \dots, b_n$ ein Erzeugendensystem von $B$ als $A$-Modul. Dann sind die Restklassen $\mod J$ Erzeuger von $B/J$. Die Brüche $b_i/1$ sind Erzeuger von $S^{-1}B$.
Ist $c_1, \dots, c_m$ ein Erzeugendensystem von $C$ als $B$-Modul, so sind die $g(b_i)c_j$ ein $A$-Erzeugendensystem von $C$. □

**Bemerkung.** Sind $E/L$ und $L/K$ endliche Körpererweiterungen, so ist nach (i) auch die Erweiterung $E/K$ endlich.

**Lemma 6.3.** *Sei $A \to B$ Ringhomomorphismus, $b \in B$ ein Element. Das Element $b$ ist genau dann ganz über $A$, wenn $b$ Nullstelle eines normierten Polynoms $F \in A[X]$ ist.*

*Beweis:* Sei $F = X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_n \in A[X]$ mit Nullstelle $b$.

**Behauptung.** $1, b, b^2, \dots, b^{n-1}$ *erzeugen* $A[b]$.

Es ist

$$b^n = -a_1b^{n-1} - \cdots - a_n \in \langle 1, \dots, b^{n-1}\rangle_A \subset B$$

Diese Relation multiplizieren wir mit $b$ und es folgt

$$b^{n+1} = -a_1b^n - \cdots - a_nb \in \langle b, \dots, b^n\rangle_A \subset \langle 1, \dots, b^{n-1}\rangle_A$$

Ebenso folgt iterativ, dass alle $b^i$ in diesem Modul liegen.
Sei umgekehrt $A[b]$ als $A$-Modul erzeugt von $b_1, \dots, b_n$. Sei $b^N$ die maximale Potenz von $b$, die in $b_1, \dots, b_n$ vorkommt. Dann lässt sich $b^{N+1}$ als Linearkombination von $b_1, \dots, b_n$ schreiben. Dies ergibt die gesuchte normierte Polynomrelation für $b$ über $A$. □

Wir erinnern an einen Satz aus der Körpertheorie.

**Lemma 6.4.** *Sei $K$ Körper, $K \to E$ eine endliche, nullteilerfreie $K$-Algebra. Dann ist $E$ ein Körper.*

*Beweis:* Sei $y \in E \smallsetminus 0$. Multiplikation mit $y$ ist eine $K$-lineare Abbildung $\phi_y : E \to E$. Wegen $y1 = y$ ist dies nicht die Nullabildung. Wir betrachten das charakteristische Polynom von $\phi_y$

$$\chi = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i \text{ mit } b_i \in K \tag{1}$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton (lineare Algebra) ist $\chi(\phi_y) = 0$. Anwenden auf die Zahl 1 ergibt

$$\sum_{i=0}^{m} b_i y^i = 0$$

Falls $b_0 = 0$, so teilen wir die Relation durch $y$. Da $E$ nullteilerfrei ist, erhalten wir eine neue kürzere Relation. Durch mehrfaches Anwenden erhalten wir eine Relation mit $b_0 \neq 0$, oder ohne Einschränkung $b_0 = 1$. Dann lösen wir auf:

$$-y \sum_{i=1}^{m-1} b_i y^{i-1} = 1$$

Damit hat $y$ ein inverses Element. □

Endliche Morphismen sind für uns wichtig, da wir die Dimensionen vergleichen können.

**Satz 6.5** (Going-Down)**.** *Sei $f : A \to B$ endlicher Ringhomomorphismus, $P \subsetneq Q$ Primideale von $B$. Dann sind $f^{-1}P \subsetneq f^{-1}Q$ ebenfalls verschiedene Primideale. Insbesondere gilt*

$$\dim B \leq \dim A$$

*Beweis:* Urbilder von Primidealen sind Primideale. Es gilt $f^{-1}P \subset f^{-1}Q$. Angenommen, es ist $f^{-1}P = f^{-1}Q =: \mathfrak{p}$.

**Behauptung.** *Ohne Einschränkung ist $A$ lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}$.*

Sei $S = S_{\mathfrak{p}} = A \setminus \mathfrak{p}$. Wir lokalisieren an $S$. Dann ist $S^{-1}A = A_{\mathfrak{p}}$ lokal mit maximalem Ideal $S^{-1}\mathfrak{p}$. Es ist $0 \notin f(S)$, da $S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$. Es gilt weiter $S^{-1}B = f(S)^{-1}B$ (links wird als $A$-Modul lokalisiert, rechts als $B$-Modul.) Wegen $f(S) \cap P = f(S) \cap Q = \emptyset$ bleibt $S^{-1}P \subset S^{-1}Q$ eine echte Inklusion von Primidealen. Beide haben das Urbild $\mathfrak{p}$ in $A$. Der Ringhomomorphismus $f_{\mathfrak{p}} : A_{\mathfrak{p}} \to S^{-1}B$ ist endlich.
Sei also nun ohne Einschränkung $A$ wie in der Behauptung.

**Behauptung.** *Ohne Einschränkung ist $A$ ein Körper.*

$A/\mathfrak{p} \to B/B\mathfrak{p}$ ist endlich. Es gilt

$$B\mathfrak{p} \subset P \subsetneq Q \Rightarrow P/B\mathfrak{p} \subsetneq Q/B\mathfrak{p}$$

d.h. die echte Inklusion von Primidealen bleibt erhalten. Beide haben das Urbild 0 in $A/\mathfrak{p}$. $A/\mathfrak{p}$ ist ein Körper, da $\mathfrak{p}$ maximal war.
Sei nun $A = K$, $B$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum. Wir betrachten

$$K \to B/P \twoheadrightarrow B/Q$$

Hierin sind $B/P$ und $B/Q$ Integritätsbereiche, die endlich sind über $K$. Nach Lemma 6.4 sind beides Körper. Eine surjektive Abbildung von Körpern ist ein Isomorphismus. Dies impliziert $P = Q$, der gesuchte Widerspruch.
Die Dimensionsaussage folgt sofort: Ist eine Primidealkette in $B$ gegeben, so bilden die Urbilder eine Primidealkette derselben Länge in $A$. $\square$

Im Allgemeinen gilt keine Gleichheit.

**Beispiel.** Sei $A = k[X, Y]$, $B = k[X, Y]/Y$. Dann ist $A \to B$ endich, aber es gilt $\dim A = \dim \mathbb{A}^2 \geq 2$, $\dim B = \dim \mathbb{A}^{=}1$.

Das ist aber auch das einzige Problem.

**Theorem 6.6** (Going-Up)**.** *Sei $f : A \to B$ injektiver, endlicher Ringhomomorphismus, $A, B$ nullteilerfrei, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ Primideale von $A$, $P$ ein Primideal von $B$ mit $A \cap P = \mathfrak{p}$. Dann gibt es ein Primideal $Q \subset B$ mit $P \subsetneq Q$ und $Q \cap A = \mathfrak{q}$. Insbesondere gilt*

$$\dim A = \dim B$$

Hier identifizieren wir $A$ mit seinem Bild $f(A)$.

*Beweis:* Wir beginnen mit der Dimensionsaussage. Nach dem vorherigen Satz gilt $\geq$. Jede Primidealkette in $A$ lässt sich zu einer Kette in $B$ liften (Induktionsanfang für das Nullideal, Induktionsschritt Going-Up). Also gilt $\leq$.
Wie im letzten Beweis lokalisieren wir, diesmal an $\mathfrak{q}$. Sei $S = S_{\mathfrak{q}} = A \setminus \mathfrak{q}$. Dies ist eine multiplikative Teilmenge von $A$, aber auch von $B$. (Hier geht die Injektivität ein!) Dann ist

$$f : A_{\mathfrak{q}} \to S^{-1}B$$

weiterhin injektiver endlicher Ringhomomorphismus. Es genügt, die Behauptung in dieser Situation zu zeigen. Ist nämlich $\tilde{Q}$ ein Primdideal von $S^{-1}B$, das

$S^{-1}P$ und $S^{-1}\mathfrak{q}$ enthält, so ist $\tilde{Q} = S^{-1}Q$ für ein Primideal $Q$, das $P$ und $\mathfrak{q}$ enthält.
Sei also ohne Einschränkung $\mathfrak{q}$ maximal. Wieder wie im letzen Beweis gehen wir über zu

$$A/\mathfrak{p} \to B/P$$

Dies ist endlicher Ringhomomorphismus. Sei nun $\overline{Q}$ ein maximales Ideal von $B/P$, welches $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ enthält. Das geht, da $\mathfrak{q}/\mathfrak{p}$ ein echtes Ideal ist. Das Urbild $Q$ von $\overline{Q}$ in $B$ hat die gewünschte Eigenschaft. □

## Der Transzendenzgrad und seine Eigenschaften

In diesem Abschnitt geht es um endlich erzeugte, nullteilerfreie Algebren über einem Körper $K$.

**Definition 6.7.** *Sei $A$ eine nullteilerfreie $K$-Algebra. Eine Menge $a_1, \dots, a_n$ heißt* algebraisch abhängig über $K$, *wenn es ein Polynom $0 \neq P \in K[X_1, \dots, X_n]$ gibt mit Nullstelle $(a_1, \dots, a_n)$. Eine maximale algebraisch unabhängige Teilmenge von $A$ heißt* Transzendenzbasis *von $A$. Die Kardinalität einer Transzendenzbasis heißt* Transzendenzgrad $\mathrm{trdeg}_K(A)$ *von $A$ über $K$.*

**Bemerkung.** Oft macht man diese Definition nur für Körper. Eine Transzendenzbasis von $A$ ist aber auch eine Transzendenzbasis des Quotientenkörpers $Q(A)$, denn $a$ und $1/a$ sind algebraisch abhängig als Nullstelle des Polynoms $X_1X_2 - 1$.

**Beispiel.** Sei $A = K[X_1, \dots, X_n]$ der Polynomring. Dann sind $X_1, \dots, X_n$ eine Transzendenzbasis von $A$ und $\mathrm{trdeg} A = n$.

Für $a_1, \dots, a_n \in A$ bezeichnen wir mit $K[a_1, \dots, a_n]$ den Teilring von $A$, der von $a_1, \dots, a_n$ erzeugt wird. Wir bezeichnen mit $K(a_1, \dots, a_n)$ den Quotientenkörper von $K[a_1, \dots, a_n]$, also den durch $a_1, \dots, a_n$ erzeugten Teilkörper von $Q(A)$.

**Lemma 6.8.** *Sei $A$ eine nullteilerfreie $K$-Algebra. Seien $a_1, \dots, a_n \in A$. Dann ist die Menge*

$$\overline{K[a_1, \dots, a_n]} = \{a \in A | \{a, a_1, \dots, a_n\} \text{ algebraisch abhängig } \}$$

*ein Teilring von $A$.*

*Beweis:* Wie in der Algebravorlesung. Wir wiederholen schnell: Jedes Element $a \in K[a_1, \dots, a_n]$ erfüllt eine Polynomgleichung $a - P(a_1, \dots, a_n)$, ist also in $\overline{K[a_1, \dots, a_n]}$ enthalten.
Seien nun $a, b$ algebraisch über $K[a_1, \dots, a_n]$. Dann erfüllen sie nach Voraussetzung jeweils eine Polynomgleichung in einer Variablen über $K_1 = K(a_1, \dots, a_n)$. Daher ist

$$\dim_{K_1} K_1[a] < \infty, \dim_{K_1[a]} K_1[a][b] < \infty \Rightarrow \dim_{K_1} K_1[a, b] < \infty$$

(vergleiche Lemma 6.2 (i)). Sei $c \in K_1[a,b]$. Dann ist $\dim_{K_1} K_1[c] < \infty$ und nach Lemma 6.3 erfüllt alle Elemente von $K_1[a,b]$ eine Polynomgleichung mit Koeffizienten in $K_1$. Hieraus wird nach Erweitern eine Polynomgleichung in $n+1$ Variablen mit Koeffizienten in $K$. □

**Beispiel.** Sei $f = X^2 + Y^2 \in K[X,Y]$, $A = K[X,Y]/(f) = K[x,y]$. Dann ist $\{x,y\}$ algebraisch abhängig, also $\overline{K[x]} = A$ nach dem Lemma. Daher ist $x$ eine Transzendenzbasis, $\mathrm{trdeg}(A) = 1$.

**Satz 6.9.** *Sei $A$ eine nullteilerfreie $K$-Algebra.*

*(i) Jede algebraisch unabhängige Menge kann zu einer Transzendenzbasis erweitert werden.*

*(ii) Jedes System von Algebraerzeugern enthält eine Transzendenzbasis.*

*(iii) Der Transzendenzgrad ist wohldefiniert.*

*Beweis:* Wie für Vektorräume. Ersetze linear abhängig durch algebraisch abhängig. □

Wir sind nur an endlich erzeugten Algebren interessiert, dann ist auch der Transzendenzgrad endlich.

## Nullstellensatz

**Theorem 6.10** (Noethersches Normalisierungslemma)**.** *Sei $K$ Körper, $B$ endlich erzeugte nullteilerfreie $K$-Algebra vom Transzendenzgrad $d$. Dann gibt es Elemente*

$$x_1, \dots, x_d \in B \ ,$$

*die algebraisch unabhängig über $K$ sind, so dass $B$ endlich über $K[x_1, \dots, x_d]$. Mit anderen Worten, es gibt eine endlichen injektiven Algebrenhomomorphismus*

$$K[X_1, \dots, X_d] \to B \ .$$

**Bemerkung.** $K[X_1, \dots, X_d]$ und $B$ haben denselben Transzendenzgrad und nach Going-Up dieselbe Dimension. Wir werden das benutzen, um zu zeigen, dass beides übereinstimmt.

*Beweis:* Es ist $B = K[Y_1, \dots, Y_m]/\mathfrak{p}$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$. Sei $y_i = Y_i \mod \mathfrak{p}$.
Falls $m = d$, so ist $m = \mathrm{trdeg} K[y_1, \dots, y_m]$. Die Elemente sind algebraisch unabhängig, also $B \cong K[Y_1, \dots, Y_m]$ und es ist nichts zu zeigen.
Sei nun $d < m$. Wir argumentieren mit Induktion über $m$. Es genügt zu zeigen, dass es $B' \subset B$ gibt, so dass $B$ endlich ist über $B'$ und $B'$ wird (als $K$-Algebra) von $m-1$ Elementen erzeugt. (Denn dann ist $B'$ endlich über $K[X_1, \dots, X_d]$ nach Induktionsvoraussetzung und Endlichkeit ist transitiv.)
Da $m > d$, gibt es eine Relation $0 \neq f \in K[Y_1, \dots, Y_m]$

$$f(y_1, \dots, y_m) = 0 \ .$$

Seien $r_2, \dots, r_m \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$z_i = y_i - y_1^{r_i} \qquad \text{für } i = 2, \dots, m$$

Dann gilt

$$f(y_1, z_2 + y_1^{r_2}, \dots, z_m + y_1^{r_m}) = 0$$

d.h. $(y_1, z_2, \dots, z_m)$ ist Nullstelle eines Polynoms

$$F(Y_1, Z_2, \dots, Z_m) = f(Y_1, Z_2 + Y_1^{r_1}, \dots, Z_m + Y_1^{r_m}) \in K[Y_1, Z_2, \dots, Z_m]$$

Ein Monom $a \prod Y_i^{b_i}$ in $f$ induziert mehrere Terme in $F$, u.a. den führenden Term in $Y_1$

$$aY_1^{b_1 + r_2 b_2 + \dots + r_m b_m}$$

Wenn die $r_i$ groß genug sind und weit genug auseinander liegen, dann haben alle diese Monome unterschiedliche Grade. Einer von ihnen hat den höchsten Grad

$$F(Y_1, Z_2, \dots, Z_m) = bY_1^N + \text{ kleinere Terme bzgl. } Y_1$$

Dann ist $\frac{1}{b}F(Y_1, z_2, \dots, z_m)$ eine normierte Gleichung für $y_1$ über $K[z_2, \dots, z_m]$. Wir setzen

$$B' = K[z_2, \dots, z_m] \subset K[z_2, \dots, z_m][y_1] = B$$

Nach Lemma 6.3 ist $B$ ganz über $B'$. $\square$

**Satz 6.11** (Körpertheoretischer Nullstellensatz)**.** *Sei $K$ ein Körper, $K \to E$ eine endlich erzeugte $K$-Algebra. Wenn $E$ ein Körper ist, so ist $E$ eine endliche algebraische Erweiterung von $K$, d.h.* $\dim_K E < \infty$.

*Beweis:* Sei $d = \mathrm{trdeg} E$. Nach Noether-Normalisierung ist $E$ endliche Erweiterung von $K[X_1, \dots, X_d]$. Nach Going-up gilt

$$0 = \dim E = \dim K[X_1, \dots, X_d] \geq d\ .$$

Es gilt also $d = 0$. $\square$

*Beweis des schwachen Nullstellensatzes Theorem 4.14:* Sei $k$ algebraisch abgeschlossen, $I \subset k[X_1, \dots, X_n]$ maximal. Dann ist $E = k[X_1, \dots, X_n]/I$ ein Körper, der als $k$-Algebra endlich erzeugt ist. Nach Satz 6.11 ist $\dim_k E < \infty$.

**Behauptung.** *$E = k$.*

Sei $y \in E$. Dann ist $y$ endlich über $k$. Nach Lemma 6.3 ist $y$ Nullstelle eines nicht-trivialen Polynoms über $k$. Da $k$ algebraisch abgeschlossen ist, zerfällt es in Linearfaktoren. $y$ ist Nullstelle eines Linearfaktors, liegt also in $k$.
Sei $a_i$ das Bild von $X_i$ in $E = k$. Dann liegt $X_i - a_i$ in $I$. Es ist

$$\langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle \subset I$$

Beide Ideale sind maximal, also gleich. $\square$

## Dimension

**Lemma 6.12.** *Seien $P \subsetneq Q$ Primideale von $K[X_1, \ldots, X_n]$. Dann ist*

$$\operatorname{trdeg}(K[X_1, \ldots, X_n]/Q) < \operatorname{trdeg}(K[X_1, \ldots, X_n]/P)$$

*Beweis:* Der Homomorphismus $K[X_1, \ldots, X_n]/P \to K[X_1, \ldots, X_n]/Q$ ist surjektiv. Sind also Elemente algebraisch abhängig modulo $P$, dann auch modulo $Q$. Dies bedeutet, dass $\leq$ gilt.
Angenommen, es gilt Gleichheit. Sei $\alpha_i = X_i \mod P$ und $\beta_i = X_i \mod Q$. Sei ohne Einschränkung $\beta_1, \ldots, \beta_r$ eine Transzendenzbasis von $K[\beta_1, \ldots, \beta_n]$. Dann sind die Urbilder $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ algebraisch unabhängig und wegen der Gleichheit der Transzendenzgrade bilden sie eine Transzendenzbasis von $K[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$. Nun Lokalisieren wir wieder. Sei $S = K[X_1, \ldots, X_r] \setminus \{0\}$. Dies ist eine multiplikative Menge. Es gilt $S \cap P = S \cap Q = \emptyset$, da $X_1, \ldots, X_r$ algebraisch unabhängig modulo $P$ und $Q$ bleiben. Sei

$$E = S^{-1}K[X_1, \ldots, X_r] = K(X_1, \ldots, X_r) = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = K(\beta_1, \ldots, \beta_r)$$

und es gilt

$$S^{-1}K[X_1, \ldots, X_n]/P = E[\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n]$$

Hierin sind $\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n$ algebraisch über $E$. Nach Lemma 6.4 ist also $E[\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n]$ ein Körper. Dies bedeutet, dass $S^{-1}P$ ein maximales Ideal ist. Es ist aber $S^{-1}P \subset S^{-1}Q \subset S^{-1}K[X_1, \ldots, X_n]$. Wegen $S \cap Q = \emptyset$ sind dies echte Inklusionen, ein Widerspruch zur Maximalität. □

**Theorem 6.13.** *Sei $A$ nullteilerfreie, endlich erzeugte Algebra über einem Körper $K$. Dann ist*

$$\dim A = \operatorname{trdeg}_K A$$

*Insbesondere ist* $\dim \mathbb{A}^n = n$.

*Beweis:* Nach Noether Normalisierung gibt es eine injektive, endliche Ringerweiterung $K[X_1, \ldots, X_d] \to A$, wobei $d = \operatorname{trdeg} A$. Es folgt mit Going up

$$\dim A = \dim K[X_1, \ldots, X_d] \geq d = \operatorname{trdeg} A \ .$$

Wir zeigen nun die andere Implikation. Sei $A = K[X_1, \ldots, X_n]/P$ für ein Primideal $P$. Zu zeigen ist

$$\operatorname{trdeg}(A) = \dim A$$

Wir betrachten nun eine maximale Kette von Primidealen

$$0 = \overline{Q}_0 \subsetneq \overline{Q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{Q}_{\dim A}$$

Sei $Q_i$ das Urbild von $\overline{Q}_i$ in $K[X_1, \ldots, X_n]$, inbesondere $Q_0 = P$. Nach Lemma 6.12 gilt

$$\operatorname{trdeg}(K[X_1, \ldots, X_n]/Q_0) > \operatorname{trdeg}(K[X_1, \ldots, X_n]/Q_1) > \ldots$$
$$> \operatorname{trdeg}(K[X_1, \ldots, X_n]/Q_{\dim A})$$

Da die letzte Zahl mindestens 0 ist, folgt

$$\operatorname{trdeg}(K[X_1,\dots,X_n]/P) \geq \dim A$$

□

**Beispiel.** Sei $f \in K[X,Y]$ eine irreduzible Gleichung. Dann ist

$$\operatorname{trdeg}(K[X,Y]/f) = 1$$

also $\dim V(f) = 1$. Diese Varietäten heißen *ebene Kurven*.

**Korollar 6.14.** *Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ affin mit irreduziblen Komponenten $V_1,\dots,V_m$. Dann gilt*

$$\dim(V) = \max \operatorname{trdeg}(k(V_i)) \leq n.$$

*Beweis:* Direkt aus dem Theorem. □

# Kapitel 7

# Die Kategorie der quasi-projektiven Varietäten

**Definition 7.1.** *Seien $V \subset \mathbb{A}^n$ und $W \subset \mathbb{A}^m$ affine Varietäten. Eine Abbildung*

$$f : V \to W$$

*heißt* Morphismus *oder* reguläre Abbildung*, wenn es Polynome $F_1, \ldots, F_m \in k[X_1, \ldots, X_n]$ gibt, so dass*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_m(x_1, \ldots, x_n)) \qquad \text{für alle } (x_1, \ldots, x_n) \in V.$$

*Sie heißt* Isomorphismus*, wenn sie bijektiv ist und die Umkehrabbildung ebenfalls ein Morphismus ist.*

Wir haben also automatisch ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^n \arrow[r, "(F_1,\ldots,F_m)"] & \mathbb{A}^m \\ V \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & W \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

**Beispiel.** (i) Die Inklusion $V \subset \mathbb{A}^n$ ist ein Morphismus. Die Polynome sind $F_i = X_i$. Das obige Diagramm ist ein Diagramm von Morphismen.

(ii) Die Projektionsabbildungen $p_i : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$ sind Morphismen. Das Polynom ist $X_i$.

(iii) Sei $V$ eine affine Varietät. Ein Morphismus $f : V \to \mathbb{A}^1$ ist nichts anderes als eine algebraische Funktion $f \in \mathcal{O}(V)$.

Nicht jeder bijektive Morphismus ist ein Isomorphismus!

**Beispiel.** Sei $V = V(y^2 = x^3) \subset \mathbb{A}^2$. Dann ist

$$\mathbb{A}^1 \to V \qquad t \mapsto (t^2, t^3)$$

bijektiv, aber kein Isomorphismus, denn die Umkehrabbildung benötigt Wurzelfunktionen.

**Lemma 7.2.** *Kompositionen von Morphismen sind Morphismen.*

*Beweis:* Das Einsetzen von Polynomen in Polynome liefert Polynome. □

**Lemma 7.3.** *Morphismen sind stetig, d.h. Urbilder von offenen Mengen sind offen.*

*Beweis:* Es ist äquivalent, zu zeigen, dass Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Da affine Varietäten die Teilraumtopologie tragen, genügt es, Abbildungen $(F_1, \dots, F_m) : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ zu betrachten. Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^m$ ist Schnitt von Hyperflächen, daher genügt es $X = V(G)$ zu betrachten für ein $G \in k[X_1, \dots, X_m]$. Das Urbild ist

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_m)) \in V(G)\} = \\ \{(x_1, \dots, x_n) \mid G(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, \dots, x_m)) = 0\}.$$

Dies ist eine algebraische Teilmenge. □

**Definition 7.4.** *Ein Morphismus $f : V \to W$ von affinen Varietäten heißt* endlich*, wenn $k[W] \to k[V]$ ein endlicher Ringhomomorphismus ist.*

**Bemerkung.** Man sieht leicht (Übungsaufgabe), dass jeder Punkt nur endlich viele Urbilder unter einem endlichen Morphismus hat. Die Umkehrung gilt nicht!

Wir haben also gezeigt:

**Theorem 7.5.** *Sei $V$ affine Varietät der Dimension $n$. Dann existiert ein endlicher Morphismus $V \to \mathbb{A}^n$.*

*Beweis:* Noethersches Normalisierungslemma. □

## Lokale Ringe von projektiven Varietäten

Wir tragen nach:

**Lemma 7.6.** *Sei $V \subset \mathbb{P}^n_k$ eine projektive Varietät, $P \in V$. Sei $U_i \subset \mathbb{P}^n_k$ eine standardaffine Karte mit $P \in U_i$. Dann gilt*

$$\mathcal{O}_{V,P} \cong \mathcal{O}_{V \cap U_i, P}$$

*wobei die Abbildung gegeben ist durch Einsetzen $X_i = 1$. Insbesondere ist $\mathcal{O}_{V,P}$ lokal.*
*Ist $V$ irreduzibel, so gilt*

$$k(V) \cong k(V \cap U_i)\ .$$

*Insbesondere ist $k(V)$ ein Körper.*

*Beweis:* Sei ohne Einschränkung $i = 0$ und schreiben abkürzend $V_0 = U_0 \cap V$ für die affine Varietät.
Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung surjektiv ist. Sei $f/g \in \mathcal{O}_{V_0,P}$, d.h. $f, g \in k[V_0]$ mit $g(P) \neq 0$. Seien $\tilde{f}, \tilde{g} \in k[X_1, \ldots, X_n]$ Repräsentaten vom Grad $d_f$ und $d_g$. Seien weiter $\tilde{F}, \tilde{G} \in k[X_0, \ldots, X_n]$ deren Homogenisierungen und $F, G \in S[V]$ die Nebenklassen. Dann ist

$$\frac{X_0^{d_g} F}{X_0^{d_f} G}$$

das gesuchte Urbild.
Wir behandeln nun die Injektivität. Sei $F/G \in \mathcal{O}_{V,P}$, so dass

$$F(1, X_1, \ldots, X_n)/G(1, X_1, \ldots, X_n) = 0$$

in einer Umgebung $U$ von $P$. Wir schreiben $f = F(1, X_1, \ldots, X_n)$ und $g = G(1, X_1, \ldots, X_n)$. Ohne Einschränkung ist $U = U_h$ mit $h \in k[V_0]$, $h(P) \neq 0$. Sei $H$ die Homogenisierung von $h$. Wir ersetzen $G$ und $H$ durch $HG$, also ohne Einschränkung $H = G$ und $f/g$ verschwindet auf $U_g$. Aus der Strukturtheorie der algebraischen Funktionen im affinen Fall wissen wir, dass es dann eine Potenz von $g$ gibt mit $g^a f = 0$. Wir betrachten das homogene Polynom

$$G^a F X_0 \in S[V] \ .$$

Es verschwindet in $V(G) \cup V(X_0)$ und in $U_g$, also auf ganz $V$. Mit dem Hilbertschen Nullstellensatz folgt

$$G^a F X_0 = 0 \ .$$

Es folgt also

$$\frac{F}{G} = \frac{X_0 G^a F}{X_0 G^{a+1}} = 0 \ .$$

Sei nun $V$ irreduzibel. Nach Voraussetzung ist $P \in V_0$, also $V_0 \neq \emptyset$. Da $V$ nun irreduzibel ist, ist $V_0$ dicht in $V$. Wir zeigen zuerst, dass die Abbildung wohldefiniert ist. Sei $F/G \in k(V)$ mit Bild $f/g$. Angenommen, $g = 0$ in $k[V]$. Dann verschwindet $G$ auf $V_0$ und (da $V_0$ dicht ist) auch auf $V$, d.h. $G = 0$. Dies ist ein Widerspruch.
Die Surjektivität folgt wir im Fall von $\mathcal{O}_P$. Wir behandeln nun die Injektivität. Sei $F/G \in k(V)$ mit Bild $f/g \in k(V_0)$. Dann gibt es $h \in k[V_0] \setminus \{0\}$ mit $fh = 0$. Sei $H$ die Homogenisierung von $h$. Dann ist $H \neq 0$ in $S[V]$. Es folgt $HF = 0$, und daher $F/G = 0$. $\square$

## Morphismen von quasi-projektiven Varietäten

**Definition 7.7.** *Ein* Morphismus von Varietäten *ist eine stetige Abbildung*

$$\Phi : V \to W$$

*so dass für alle $P \in V$ gilt*

$$\Phi^*\mathcal{O}_{W,\Phi(P)} \subset \mathcal{O}_{V,P}.$$

*Mit anderen Worten: Für alle $P \in V$ und für jede Funktion $\alpha : W \to k$, die algebraisch in einer Umgebung von $\Phi(P)$ ist, ist die Komposition*

$$\alpha \circ \Phi : V \to W \to k$$

*algebraisch in einer Umgebung von $P$.*
*Ein Morphismus von Varietäten heißt* Isomorphismus*, wenn die Abbildung bijektiv ist und die Umkehrabbildung ein Morphismus von Varietäten ist.*

**Bemerkung.** In der Literatur findet man oft die Bezeichnung *regulär*, wo wir algebraisch sagen.

Quasi-projektive Varietäten bilden eine Kategorie:

**Satz 7.8.** *Die Verknüpfung von Morphismen von Varietäten ist ein Morphismus.*

*Beweis:* Seien $X \subset \mathbb{P}^r$, $Y \subset \mathbb{P}^s$, $Z \subset \mathbb{P}^t$ quasi-projektiv. Seien $\Phi : X \to Y$ und $\Psi : Y \to Z$ Morphismen. Dann ist $\Psi \circ \Phi$ stetig. Sei $P \in X$, $\alpha : Z \to k$ regulär in $\Psi(\Phi(P))$. Dann ist $\alpha\Psi$ regulär in $\Phi(P)$, da $\Psi$ ein Morphismus ist. Dann ist wiederum $\alpha\Psi\Phi$ regulär in $P$, da $\Phi$ ein Morphismus ist. Nach Definition ist $\Psi\Phi$ ein Morphismus. $\square$

Wir wollen nun besser verstehen, welche Beispiele von Morphismen es gibt. Wir vergleichen mit unserer Definition im affinen Fall.

**Lemma 7.9.** *Sei $V$ affin, $U_f \subset V$ standardoffen. Sei $\alpha \in \mathcal{O}(U_f)$. Dann ist $\alpha$ stetig als Morphismus $\alpha : U_f \to \mathbb{A}^1$. Es ist*

$$\mathcal{O}(U_f) = \mathrm{Mor}(U_f, \mathbb{A}^1)$$

*Beweis:* Sei $\alpha = g/f^n$ mit $g \in \mathcal{O}(V)$. Wir müssen zeigen, dass Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Dabei genügt es einelementige Mengen $\{a\} \subset \mathbb{A}^1$ zu betrachten. Das Urbild von $a$ besteht aus den Punkten mit

$$\alpha(P) = \frac{g(P)}{f(P)^n} = a \ ,$$

also den Nullstellen von $g - af^n$. Dies ist abgeschlossen.
Sei nun $\alpha$ ein Morphismus. Wir gehen die Definition durch. Jeder Punkt $P \in U_f$ hat eine standardoffene Umgebung $U_P$, so dass $\alpha|_{U_P} \in \mathcal{O}(U_P)$. D.h. $\alpha$ ist lokal algebraisch. Nach Definition liegt $\alpha \in \mathcal{O}(U_f)$.
Umgekehrt haben wir die Stetigkeit von $\alpha \in k[V]_f$ gezeigt. Dies ist dann nach Definition ein Morphismus. $\square$

**Satz 7.10.** *Seien $V \subset \mathbb{A}^n, W \subset \mathbb{A}^m$ affine Varietäten. Eine Abbildung $\Phi : V \to W$ ist genau dann ein Morphismus im Sinne von Definition 7.7, wenn sie ein Morphismus im Sinne von Definition 7.1 ist.*

*Beweis:* Sei $\Phi : V \to W$ ein Morphismus im Sinne der ursprünglichen Definition. Stetigkeit haben wir bereits etabiert. Sei $g \in \mathcal{O}_{\Phi(P)}$, also algebraisch in $\Phi(P)$. Dann ist $g \circ \Phi$ algebraisch in $P$, da das Einsetzen von Polynomen in Polynome wieder Polynome ergibt. Damit ist $\Phi$ ein Beispiel für einen Morphismus im Sinne von Definition 7.7.
Sei umgekehrt $\Phi$ ein Morphismus im Sinne der allgemeinen Definition. Die Projektionsabbildung $p_i : \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^1$ auf die $i$-te Koordinate wird durch das Polynom $X_i \in k[X_1, \ldots, X_m]$ definiert, ist also ein Morphismus von Varietäten. Dann ist auch $\Phi_i = p_i \circ \Phi$ ein Morphismus $V \to \mathbb{A}^1$, also ein Element von $\mathcal{O}(V)$. $\square$

**Bemerkung.** Man kann das leicht umformulieren zu der Aussage, dass ein Morphismus $f : V \to W$ dasselbe ist wie ein $k$-Algebrenhomomorphismus $f^* : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V)$. Dabei erhält man $f^*$ als Komposition mit $f$. Ist andererseits $\phi : \mathcal{O}(W) \to \mathcal{O}(V)$ gegeben, so erhalten wir die Koordinatenfunktionen $f_i$ als Bilder der Koordinatenfunktionen $x_i : W \to \mathbb{A}^1$, die zu einer Einbettung $W \subset \mathbb{A}^n$ gehören.

**Satz 7.11.** *Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ affin, $g \in k[V]$. Dann ist die Abbildung*

$$\phi : V(gX_{n+1} - 1) \to U_g \qquad (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

*ein Isomorphismus von Varietäten.*

*Beweis:* Wegen $g(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1} = 1$ auf $V(gX_{n+1} - 1)$ hat die Abbildung Werte in $U_g$. Nach dem letzten Satz ist die Komposition

$$\tilde{\Phi} : V(gX_{n+1} - 1) \to U_g \subset \mathbb{A}^n$$

ein Morphismus, insbesondere stetig. Dann ist auch $\Phi$ stetig, da $U_g \subset \mathbb{A}^n$ offen ist. Die Bedingung an lokale Ringe für $\Phi$ folgt sofort aus der für $\tilde{\Phi}$.
Für jeden Punkt in $U_g$ gibt es genau einen Urbildpunkt. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 1/g(x_1, \ldots, x_n)) \ .$$

Wie im affinen Fall respektiert sie lokale Ringe. $\square$

Unsere standardoffenen Mengen sind also als Varietäten *affin*, nämlich isomorph zu einer affinen Varietät. Nicht alle quasi-affinen Varietäten sind affin.

**Beispiel.** Für $U = \mathbb{A}^2 \smallsetminus \{0\}$ gilt $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$. Es ist nicht affin. (Übungsaufgabe)

Wir betrachten nun den quasi-projektiven Fall, den wir auf den affinen reduzieren wollen.

**Lemma 7.12.** *Sei $U_i \subset \mathbb{P}_k^n$ die i-te standardaffine Teilmenge. Dann ist die Kartenabbildung $\phi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$ ein Isomorphismus von Varietäten.*

*Beweis:* Wir haben bereits gesehen, dass es sich um einen Homöomorphismus handelt. Auf lokalen Ringen erhalten wir den Isomorphismus aus Lemma 7.6. □

**Korollar 7.13.** *Sei $X$ eine quasi-projektive Varietät. Dann hat $X$ eine endliche offene Überdeckung $X = \bigcup_{i=1}^m X_i$, so dass jedes $X_i$ affin ist. Die affinen offenen Teilmengen bilden eine Basis der Topologie.*

*Beweis:* Sei $X \subset \mathbb{P}_k^n$. Jeder Punkt von $X$ liegt in einer standardaffinen Teilmenge $U_i$, also in einer quasi-affinen Varietät. Diese lässt sich durch standard-offene überdecken, also durch affine. Also ist $X$ Vereinigung von affinen offenen Untervarietäten. Da $X$ noethersch ist, genügt eine endliche Teilüberdeckung. Die Aussage lässt sich auch auf jede offene Teilmenge von $X$ anwenden, daher bilden die affinen offenen Untervarietäten eine Basis der Topologie. □

**Bemerkung.** Alle lokalen Eigenschaften können auf affinen Varietäten nachgerechnet werden. Hierzu gehören z.B. lokale Ringe und Funktionenkörper.

Seien $X$, $Y$ quasi-projektiv, $\Phi : X \to Y$ ein Morphismus. Dann gehen wir wie folgt vor: Wir überdecken $Y$ durch affine Varietäten $U_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Für jedes $U_i$ ist $\Phi^{-1}(U_i) \subset X$ offen, da $\Phi$ stetig ist. Dann überdecken wir das Urbild durch offene affine Untervarietäten $V_{ij}$ für $j = 1, \ldots, n_i$. Durch Einschränken erhalten wir Morphismen von affinen Varietäten

$$\Phi_{ij} : V_{ij} \to U_i.$$

Wir wissen bereits, wie diese global durch Polynome beschrieben werden. Man sieht leicht, dass umgekehrt solche Daten einen Morphismus definieren, wenn die $\Phi_{ij}$ auf den Schnitten der $V_{ij}$ übereinstimmen. Wir verzichten auf eine genaue Formulierung.
Wir konzentrieren uns nun auf den einfacheren irreduziblen Fall.

**Satz 7.14** (Identitätssatz)**.** *Sei $X$ irreduzibel, $f, g \in \mathcal{O}(X)$ mit $f|_U = g|_U$ auf einer offenen, nichtleeren Teilmenge $U \subset X$. Dann ist $f = g$ auf ganz $X$.*

*Beweis:* Wir betrachten $f - g$. Die Teilmenge $V(f - g) \subset X$ ist abgeschlossen und enthält $U$, also auch $\overline{U}$. Da $X$ irreduzibel ist, gilt $X = \overline{U}$. □

Daher haben im irreduziblen Fall alle Funktionenkeime $(U, f)$ einen maximalen Definitionsbereich, auf den sie sich eindeutig fortsetzen lassen.

**Definition 7.15.** *Sei $X$ irreduzible quasi-projektive Varität, $\Phi \in \mathbb{P}^n(k(X))$, $P \in X$. Dann heißt $\Phi$* regulär in *$P$, falls es einen Repräsentanten*

$$\Phi = [\Phi_0 : \cdots : \Phi_n]$$

*gibt, so dass alle $\Phi_i(P)$ für $i = 0, \ldots, n$ definiert sind und nicht alle gleichzeitig verschwinden. In diesem Fall setzen wir*

$$\Phi(P) = [\Phi_0(P) : \cdots : \Phi_n(P)] \in \mathbb{P}_k^n$$

**Bemerkung.** $\Phi(P)$ ist wohldefiniert: Gilt $[\Phi_0 : \cdots : \Phi_n] = [\Phi'_0 : \cdots : \Phi'_n]$ und beide Repräsentanten sind regulär in $P$, so ist $\Phi_i = \Psi\Phi'_i$ für alle $i$. Hierbei ist $\Psi \in k(X)^*$. Es gibt einen Index $i$ mit $\Phi'_i(P) \neq 0$. Es folgt $\Psi(P) = \Phi(P)\Phi'_i(P)^{-1} \in k$, d.h. $\Psi$ ist regulär in $P$. Wäre $\Psi(P) = 0$, so wäre $\Phi_j(P) = 0$ für alle $j$. Also ist $\Psi(P) \neq 0$. Daher ist $\Phi(P) = \Phi'(P)$.

**Satz 7.16.** *Sei $X$ irreduzible quasi-projektive Varität, $Y \subset \mathbb{P}^n_k$ quasi-projektiv. Ein Element $\Phi \in \mathbb{P}^n(k(X))$ definiert genau dann einen Morphismus $\phi : X \to Y$, wenn $\Phi$ in allen $P \in X$ regulär ist und $\Phi(P) \in Y$ für alle $P \in X$. Jeder Morphismus $f : X \to Y$ ist von dieser Form.*

*Beweis:* Sei $\Phi \in \mathbb{P}^n(k(X))$ regulär in allen $P \in X$ und $\Phi(P) \in Y$ für alle $P$. Wir überprüfen, dass es sich um einen Morphismus handelt. Ohne Einschränkung (Übergang zu einer offenen Überdeckung) sind $X$ und $Y$ affin und $Y \subset U_0$. Nach Voraussetzung ist dann $\Phi_0(P) \neq 0$ für alle $P \in X$. Wir gehen über zu $\Phi'_i = \Phi_i/\Phi_0$ für $i = 0, \ldots, n$. Nach Voraussetzung ist $\Phi'_i$ algebraisch. Damit ist $\Phi' : X \to \mathbb{A}^n$ ein Morphismus von affinen Varietäten, der nach Voraussetzung über $Y$ faktorisiert, also ein Morphismus.
Nun betrachten wir die Rückrichtung. Wir betrachten die Komposition $\psi : X \to Y \to \mathbb{P}^n$. Sei $U_i \subset \mathbb{P}^n$ standardaffin mit $V_i = \psi^{-1}(U_i)$ nichtleer (also dicht in $X$). Eine solche Menge gibt es, da die $U_i$ den projektiven Raum überdecken. Dann ist $\psi|_{V_i}$ eine Abbildung $V_i \to \mathbb{A}^n$, wird also durch ein Tupel $\phi^i_0, \ldots, \hat{\phi}_i, \ldots, \phi^i_n \in \mathcal{O}(U)$ gegeben. Wir fassen sie in $k(U) = k(X)$ auf und setzen

$$\Phi^i = [\phi^i_0 : \cdots : \phi^i_{i-1} : 1 : \phi^i_{i+1} : \cdots : \phi^i_n]$$

Die verschiedenen $\Phi^i$ stimmen auf dem Schnitt ihrere Definitionsbereiche überein, sind also als Elemente des $\mathbb{P}^n(k(X))$ gleich. Jeder Punkt von $X$ liegt in einem $V_i$, der Morphismus ist also überall regulär. □

**Bemerkung.** In vielen klassischen Texten wird dies als Definition eines Morphismus von Varietäten genommen. Man muss sich dann allerdings auf irreduzible Varietäten einschränken.

# Kapitel 8

# Noch mehr Dimensionstheorie

Wir übertragen die Ergebnisse zur Dimensionstheorie auf den nicht-affinen Fall.

**Korollar 8.1.** *Sei $V$ irreduzible affine Varietät, $g \in \mathcal{O}(V)$ nicht nilpotent. Dann ist*

$$\dim U_g = \dim V = \mathrm{trdeg} k(V).$$

*Beweis:* $V$ und $U_g$ sind beide affin mit demselben Funktionenkörper, also sind beide Dimensionen gleich dem Transzendenzgrad. □

**Korollar 8.2.** *Sei $V \subset \mathbb{P}^n$ quasiprojektiv mit irreduziblen Komponenten $V_1, \dots, V_m$. Dann gilt*

$$\dim(V) = \max \mathrm{trdeg}(k(V_i)) \leq n$$

*Beweis:* Wegen $\dim V = \max \dim V_i$ genügt es, den irreduziblen Fall zu betrachten.
Sei nun $V \subset \mathbb{P}^n$ quasi-projektiv und irreduzibel. Wir betrachten eine Kette maximaler Länge

$$V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_r = V$$

von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen. Sie beginnt mit einem Punkt. Sei $U \subset \mathbb{P}^n$ offen mit $V_0 \subset U$. Dann ist jeder der Schnitte $V_i \cap U$ nicht-leer und damit irreduzibel und dicht in $V_i$. Es gilt also

$$r = \dim V \leq \dim V \cap U.$$

Die Ungleichung

$$\dim k(V \cap U) \leq \dim V$$

gilt allgemein, da der Abschluss einer irreduziblen Menge irreduzibel ist.
Wir wählen $U$ in einer standard-affinen Karte so, dass $V \cap U$ standard-offen in einer affinen Varietät. Dann gilt

$$\dim V \cap U = \mathrm{trdeg} k(V \cap U) = \mathrm{trdeg} k(V).$$

Es folgt $r \leq \dim \mathbb{P}^n = \dim \mathbb{A}^n = n$. $\square$

Wir erwarten im Prinzip, dass das Hinzufügen einer Gleichung die Dimension um 1 verringert. Das ist nicht richtig:

**Beispiel.** Sei $V = V(XY) \subset \mathbb{A}^2$. Dies ist eine ebene Kurve. Hierin definiert $X = 0$ eine echte abgeschlossene Teilmenge derselben Dimension.

Umgeht man dieses Problem der irreduziblen Komponenten, so wird die Idee richtig:

**Theorem 8.3** (Krulls Hauptidealsatz)**.** *Sei $X$ irreduzible Varietät, $g : X \to \mathbb{A}^1$ ein nichtkonstante algebraische Funktion, $Z$ eine irreduzible Komponente von $V(g)$. Dann gilt*

$$\dim Z = \dim X - 1$$

Dies hat weitreichende Konsequenzen:

**Korollar 8.4.** *Sei $X$ irreduzibel, $Z \subsetneq X$ eine maximale irreduzible abgeschlossene Teilmenge. Dann ist*

$$\dim Z = \dim X - 1$$

*Beweis:* Ohne Einschränkung ist $X$ affin, $Z = V(f_1, \ldots, f_n)$ für nichtkonstante Funktionen $f_i$. Wegen $Z \subset V(f_1)$ liegt $Z$ in einer irreduziblen Komponente von $V(f_1)$. Wegen der Maximalität stimmt es mit dieser überein. Nun greift Krulls Hauptidealsatz. $\square$

**Korollar 8.5** (Äquidimensionalität)**.** *Sei $X$ eine irreduzible Varietät,*

$$Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_n$$

*eine Kette von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen. Diese kann zu einer Kette der Länge* $\dim X$ *ergänzt werden. Insbesondere hat jede maximale Kette dieselbe Länge* $\dim X$.

*Beweis:* Ohne Einschränkung ist $Z_n = X$, $Z_0$ ein Punkt. Es genügt zu zeigen:

**Behauptung.** *Ist* $\dim Z_i < \dim Z_{i+1} - 1$*, so gibt es eine irreduzible Teilmenge* $Z_i \subsetneq Z \subsetneq Z_{i+1}$

Wir wählen für $Z$ eine maximale echte irreduzible Teilmenge von $Z_{i+1}$, die $Z_i$ enthält. Diese hat Dimension $\dim Z_{i+1} - 1$, liegt also echt zwischen $Z_i$ und $Z_{i+1}$. $\square$

Vor dem Beweis von Krulls Hauptidealsatz brauchen wir noch etwas Vorbereitung.

**Lemma 8.6.** *Sei $A = k[X_1, \dots, X_d]$, $A \to B$ endlicher Ringhomomorphismus, $B$ ein Integritätsring, $b \in B$ ein Element. Dann ist $b$ Nullstelle eines irreduziblen normierten $F \in A[T]$*

$$F = T^m + a_1 T^{m-1} + \dots + a_m.$$

*Wir fassen Multiplikation mit $b$ als $Q(A)$-lineare Abbildung $Q(B) \to Q(B)$ auf. Dann gilt $\det(b) = \pm a_m^s$ für ein $s \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $\det(b) \in A$.*

*Beweis:* Da $A$ noethersch ist und $B/A$ endlich, ist auch $B' = A[b]$ endlich über $A$. Also ist $b$ Nullstelle eines normierten Polynoms $F \in A[T]$. Wir wählen $F$ irreduzibel über $A$. Nach dem Gauß-Lemma ist das Polynom sogar irreduzibel in $Q(A)[T]$.
Es gilt $Q(B') = Q(A)[b]$, ein Vektorraum mit Basis $1, b, \dots, b^{m-1}$. Wir berechnen die Matrix $M$ der Multiplikation mit $b$

$$b : Q(B') \to Q(B')$$

und erhalten $\det(b) = \pm a_m$.
$B$ ist endlich erzeugt als $A$-Modul, also ist $B = A[b, b_1, \dots, b_n]$ für endlich viele ganze Elemente $b_i$. Dann ist $Q(A)[b, b_1, \dots, b_n]$ ein Körper, also gleich $Q(B)$, und $Q(B)/Q(A)$ ist ebenfalls endlich.
Damit gilt: $Q(A) \subset Q(B') \subset Q(B)$, alles endlich-dimensionale Vektorräume über $Q(A)$. Die $Q(A)$-Matrix der Multiplikation mit $b$ auf $Q(B)$ ist eine Blockdiagonalmatrix mit Blöcken die Matrix der Multiplikation mit $b$ auf $Q(B')$. Also ist $\det(b)$ eine Potenz von $\pm a_m$. $\square$

Der Vollständigkeit halber:

**Satz 8.7** (Gauß-Lemma)**.** *Sei $A$ ein nullteilerfreier Ring mit eindeutiger Primfaktorzerlegung, $F \in A[T]$ ein normiertes Polynom, $G \in Q(A)[T]$ ebenfalls normiert mit $G|F$. Dann gilt $G \in A[T]$.*

*Beweis:* Algebra-Bücher oder Zahlentheorie. $\square$

*Beweis von Theorem 8.3:* Sei $Y$ irreduzible Varietät, $g \in \mathcal{O}(Y)$ nicht-konstante algebraische Funktion, $Z$ irreduzible Komponente von $V(g)$. Wir wollen zeigen, dass

$$\dim Z = \dim Y - 1$$

Zunächst zerlegen wir $V(g)$ in irreduzible Komponenten $Z \cup Z_1 \cup \dots \cup Z_n$. Sei

$$U \subset Y \smallsetminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_n)$$

affin mit $U \cap Z \neq \emptyset$. Wir ersetzen $Y$ durch $U$. D.h. es genügt, den affinen Fall zu betrachten und $Z = V(g)$ ist irreduzibel.
Sei $d = \dim Y$. Nach dem Noetherschen Normalisierungslemma gibt es einen endlichen surjektiven Morphismus

$$\pi : Y \to \mathbb{A}^d.$$

Wir suchen $V(g') \subset \mathbb{A}^d$ mit $\pi(Z) = V(g')$. Dann ist nämlich wegen Going-Up

$$\dim V(g) = \dim V(g') = \operatorname{trdeg}_k k[V(g')] = d - 1.$$

Wir betrachten $A = k[\mathbb{A}^d] = k[X_1, \dots, X_d]$ und $B = k[Y]$, den Koordinatenring von $Y$. Wir setzen

$$g' = \det(g)$$

Nach dem Lemma liegt dies in $A$.

**Behauptung.** $g' \in \langle g \rangle \subset k[Y]$

Sei $T^m + a_1 T^{m-1} + \dots + a_m$ das Polynom zu $g$ aus dem Lemma. Wegen

$$\pm a_m = g(g^{m-1} + a_1 g^{m-2} + \dots + a_{m-1})$$

gilt

$$a_m \in \langle g \rangle \ .$$

$g'$ ist Potenz von $a_m$, also erst recht

$$g' \in \langle g \rangle \ .$$

**Behauptung.** $\sqrt{\langle g \rangle} \cap k[X_1, \dots, X_d] = \sqrt{\langle g' \rangle}$

Die Inklusion $\supset$ folgt aus der vorherigen Behauptung. Sei $h \in \sqrt{\langle g \rangle} \cap A$, d.h.

$$h^N = \alpha g \in k[Y]$$

Wir nehmen in $B$ die Determinante dieser Relation und erhalten in $A$

$$\det(h)^N = \det(\alpha) g' \ .$$

Wegen $h \in A$ ist $\det h$ eine Potenz von $h$, also haben wir die gesuchte Relation gefunden.
Daher ist

$$k[X_1, \dots, X_d]/I(V(g')) \to k[Y]/I(V(g)) = k[V(g)]$$

ein injektiver endlicher Ringhomomorphismus von Integritätsringen. Wegen Going-Up haben beide dieselbe Dimension. Links stimmt sie mit

$$\dim k[X_1, \dots, X_d]/\sqrt{\langle g' \rangle} = \operatorname{trdeg}_k k[X_1, \dots, X_d]/\sqrt{\langle g' \rangle} = d - 1$$

überein. $\square$

# Kapitel 9

# Schnitttheorie im projektiven Raum

Unser Ziel ist der Beweis des Satzes von Bézout über Schnitte von Untervarietäten des projektiven Raums. Zur Motivation hier schon mal die ebene Version.

**Satz 9.1** (Bézout für Kurven)**.** *Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ verschiedene irreduzible Kurven vom Grad $d_1, d_2$. Dann hat $C_1 \cap C_2$ mit Vielfachheit gezählt genau $d_1 d_2$ viele Punkte.*

**Definition 9.2.** *Sei $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ irreduzibel vom Grad $d$. Dann heißt $V(f) \subset \mathbb{P}^n$* projektive Hyperfläche vom Grad *$d$.*

Jetzt fehlt noch die Schnittmultiplizität.

**Definition 9.3.** *Seien $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ Kurven, $P \in C_1 \cap C_2$. Dann heißt*

$$i(C_1, C_2, P) = \dim_k \mathcal{O}_{C_1,P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,P}} \mathcal{O}_{C_2,P}$$

Schnittmultiplizität *von $C_1$ und $C_2$ in $P$.*

**Bemerkung.** Da die lokalen Ringe nur von einer Umgebung von $P$ abhängen, können wir in den Rechnungen affine ebene Kurven betrachten. Sei $C_1, C_2 \subset \mathbb{A}^2$ und $I(C_1) = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle, I(C_2) = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$. Wir setzen $J = \langle f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t \rangle$. Dann gilt

$$\mathcal{O}_{C_1,P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,P}} \mathcal{O}_{C_2,P} = (k[X_1, X_2]/J)_{I(P)}$$

(Wer Tensorprodukte nicht mag, nimmt das als Definition.) Es ist $C_1 \cap C_2 = V(J)$ und

$$I(C_1 \cap C_2) = \sqrt{J}$$

Die Schnittmultiplizitäten messen also den Unterschied zwischen $J$ und seinem Radikal.

**Beispiel.** Sei $C_1$ die affine Gerade $Y = 0$, $C_2 = V(f)$ wobei $f = Y - F(X)$ für ein Polynom $F \in k[X]$. Die Schnittpunkte sind also von der Form $(0, x)$ für Nullstellen von $F$. Wir zerlegen

$$F(X) = X^m (X - x_1)^{m_1} \dots (X - x_n)^{m_n}$$

mit $x_i \neq 0$. Ohne Einschränkung ist $P = (0, 0)$, also $x = 0$ Nullstete von $F$. Dann ist

$$\begin{aligned} k[X,Y]/Y \otimes_{k[X,Y]} k[X,Y]/f &\cong k[X,Y]/(Y,f) \\ &\cong k[X]/F \cong K[X]/X^m \prod_{i=1}^{n} K[X]/(X - x_i)^{m_i} \end{aligned}$$

Danach lokalisieren wir am maximalen Ideal zu 0. Dabei werden die Polynome $(X - x_i)$ invertierbar. Es bleibt

$$\mathcal{O}_{C_1,P} \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_{C_2,P} \cong k[X]/X^m.$$

Die Dimension ist $m$, also die Vielfachheit der Nullstelle.

**Bemerkung.** Wenn die Kurven $C_1$ und $C_2$ keine irreduziblen Komponenten gemeinsam haben, so hat der Schnitt die Dimension 0, besteht also nur aus endlich vielen Punkten. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass dann die Schnittmultiplizität endlich ist. Es folgt aber auch aus dem Satz von Bézout, daher gehen wir das jetzt nicht an.

## Graduierte Moduln und Hilbert-Polynome

Wir erinnern uns an den Begriff des graduierten Rings aus Kapitel 3. Unser wichtigstes Beispiel, wofür wir darauf zurückkommen, ist der homogene Koordinatenring einer projektiven Varietät.
Sei $A$ Ring,

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$$

graduierte $A$-Algebra.

**Definition 9.4.** *(i) Ein* graduierter $S$-Modul *ist eine direkte Summe*

$$M = \bigoplus_{d=-\infty}^{\infty} M_d$$

*von $A$-Moduln zusammen mit einer skalaren Multiplikation*

$$\mu : S \times M \to M$$

*mit $\mu(S_n, M_d) \subset M_{n+d}$, die $M$ zu einem $S$-Modul macht.*

*(ii) Sei $M$ ein graduierter $S$-Modul, $l \in \mathbb{Z}$. Dann ist $M[l] := M$ mit der Graduierung $M[l]_d = M_{l+d}$.*

**Beispiel.** Jedes homogene Ideal ist ein graduierter $S$-Modul.

Schnittheorie lässt sich nun auf die Theorie der Moduln über dem homogenen Koordinatenring zurückführen.

**Definition 9.5.** *Sei $M$ ein endlich erzeugter graduierter Modul über $S = k[X_0, \dots, X_n]$. Dann heißt*

$$\phi_M : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \qquad \phi_M(d) = \dim_k M_d$$

Hilbert-Funktion *von $M$.*

Am interessantesten sind natürlich die homogenen Koordinatenringe von Untervarietäten.

**Theorem 9.6.** *Sei $M$ ein endlich erzeugter graduierter $k[X_0, \dots, X_n]$-Modul. Dann gibt es ein eindeutiges Polynom $P_M \in \mathbb{Q}[z]$ mit*

$$P_M(d) = \phi_M(d) \text{ für } d \text{ groß genug}$$

*$P_M$ heißt* Hilbert-Polynom *von $M$. Es gilt*

$$\deg P_M = \dim V(I(M))$$

*wobei $I(M) = \{s \in k[X_0, \dots, X_n] | sM = 0\}$.*

**Definition 9.7.** *Sei $V \subset \mathbb{P}^n$. Das* Hilbert-Polynom *$P_V$ von $V$ ist das Hilbertpolynom von $S(Y)$. Ist*

$$P_V(z) = a_d z^d + \dots + a_0 \qquad a_0 \neq 0$$

*so heißt $d!a_d$* Grad *von $V$.*

**Bemerkung.** Wegen $I(S(V)) = I(V)$ gilt $d = \deg P_V = \dim V$. Wir werden sehen, dass der Grad im Fall ebener Kurven mit der ersten Definition übereinstimmt.

**Beispiel.** (i) Sei $M = S = k[X_0, X_1]$. Dann hat $S_d$ die $k$-Basis $X_0^a X_1^{d-a}$, enthält also $d+1$ Elemente. Es ist also

$$\phi_S(d) = d + 1$$

und das Hilbert-Polynom ist $z + 1$. Der Grad des Polynoms ist 1, wie die Dimension. Nach Definition hat $\mathbb{P}^1$ den Grad $1!1 = 1$.

(ii) Sei $f = X_0X_1 - X_2^2$, $M = S(V(f))$. Beim Rechnen in $M$ können jeweils quadratische Potenzen von $X_2$ eleminiert werden, die beiden anderen Variabeln können frei gewählt werden. Also hat $M_d$ die $k$-Basis

$$X_0^a X_1^{d-a} \text{ für } a = 0, \dots, d \qquad X_0^b X_1^{d-b-a} X_2 \text{ für } b = 0, \dots, d-1$$

Also

$$\phi_M(d) = 2d + 1, \quad P_{V(f)} = 2z + 1$$

Der Grad des Polynoms ist 1, der Grad von $V(f)$ ist $1!2 = 2 = \deg(f)$.

Wir gehen nun den Beweis des Theorems an.

**Definition 9.8.** *Ein* numerisches Polynom *ist ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[z]$ mit $P(n) \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ genügend groß.*

**Beispiel.** $\binom{z}{3} = \frac{z(z-1)(z-2)}{3!}$ hat ganze Werte für $z \in \mathbb{N}_0$.

**Lemma 9.9.** *(i) Sei $F \in \mathbb{Q}[z]$ ein numerisches Polynom. Dann gilt*

$$F(z) = c_0 \binom{z}{r} + c_1 \binom{z}{r-1} + \cdots + c_r \qquad c_i \in \mathbb{Z}$$

*(ii) Sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine Funktion, $\Delta(f)(n) = f(n+1) - f(n)$ sei gleich einem numerischen Polynom $G \in \mathbb{Q}[z]$ für $n$ genügend groß. Dann gibt es ein numerisches Polynom $P$ mit $P(n) = f(n)$ für $n$ genügend groß.*

*Beweis:* Wir argumentieren mit Induktion über $r$. Hat $F$ den Grad 0, so ist $F$ konstant als Funktion, und die Behauptung gilt.

Allgemein lässt sich $\binom{z}{r}$ entwickeln als

$$\binom{z}{r} = \frac{z^r}{r!} + \dots$$

Daher kann $F(z)$ eindeutig in der angegebenen Form geschrieben werden, wobei $c_i \in \mathbb{Q}$. Wir betrachten $\Delta(F)$. Dies ist ein numerisches Polynom vom Grad $r-1$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
\Delta \binom{z}{r} &= \frac{(z+1)\dots(z+1-r+1)}{r!} - \frac{z(z-1)\dots(z-r+1)}{r!} \\
&= \frac{z(z-1)\dots(z-r+2)}{r!}(z+1-z+r-1) \\
&= \binom{z}{r-1}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\Delta F = c_0 \binom{z}{r-1} + \cdots + c_{r-1}$$

Nach Induktionsannahme gilt $c_0, \dots, c_{r-1} \in \mathbb{Z}$. Dann muss auch $c_r$ ganz sein.

Nun wenden wir uns der zweiten Aussage zu. Sei

$$G = c_0 \binom{z}{r} + \cdots + c_r \qquad c_i \in \mathbb{Z}$$

Wir setzen

$$\tilde{F} = c_0 \binom{z}{r+1} + \cdots + c_r \binom{z}{1}$$

Dann gilt $\Delta\tilde{F} = G$, also $\Delta(f - \tilde{F})(n) = 0$ für genügend großes $n$. Mit anderen Worten

$$c_{r+1} := f(n+1) - \tilde{F}(n+1) = f(n) - \tilde{F}(n) \qquad n \text{ genügend groß}$$

Also folgt $c_{r+1} \in \mathbb{Z}$. Dann erfüllt

$$F = \tilde{F} + c_{r+1}$$

die Behauptung. $\square$

**Korollar 9.10.** *Ist $F$ ein numerisches Polynom, $F = a_r z^r + \dots$ mit $a_r \neq 0$, so gilt $r!a_r \in \mathbb{Z}$.*

**Lemma 9.11.** *Sei $S = k[X_0, \dots, X_n]$, $P \subset S$ ein homogenes Primideal. Sei*

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

*eine kurze exakte Sequenz von graduierten Moduln. Dann ist*

$$P \supset I(B) \Leftrightarrow (P \supset I(A) \text{ oder } P \supset I(C))$$

*Es gilt*

$$V(I(B)) = V(I(A)) \cup V(I(C))$$

*Beweis:* Es gilt $I(B) \subset I(A), I(C)$ und $I(A)I(C) \subset I(B)$ (leicht). Angenommen $I(B) \subset P$, $I(A), I(C) \subsetneq P$. Dann gibt es $s \in I(A)$ mit $s \notin P$, $t \in I(C)$ mit $t \notin P$. Aber $st \in I(A)I(C) \subset I(B) \subset P$. Dies ist ein Widerspruch zur Primidealeigenschaft von $P$.
Die Umkehrung ist klar. Die Aussage über die Varietäten folgt, wenn man maximale Ideale betrachtet. $\square$

**Korollar 9.12.** *Sei $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von graduierten $S$-Moduln. Wenn Theorem 9.6 für $A$ und $C$ gilt, dann auch für $B$.*

*Proof.* Es gilt

$$\phi_B(d) = \phi_A(d) + \phi_C(d) \text{ für alle } d \in \mathbb{Z}.$$

Gibt es Hilbert-Polynome $P_A$ und $P_C$ für $A$ und $C$, so ist $P_B = P_A + P_C$ Hilbert-Polynom für $B$. Als Hilbertpolynome habe alle drei Polynome positive Leitkoeffizienten, daher gilt (mit 9.6 für $A$ und $C$ und dem Lemma)

$$\begin{aligned} \deg P_B &= \max(\deg P_A, \deg P_C) \\ &= \max(\dim V(I(A)), \dim V(I(C)) \\ &= \dim(V(I(A)) \cup V(I(C)) \\ &= \dim(V(I(B)))\ . \end{aligned}$$

$\square$

Damit lässt sich der Beweis des Theorems nun auf die einfache Bausteine zurückführen.

**Satz 9.13.** *Sei $M$ ein endlich erzeugter graduierter Modul über $S = k[X_0, \dots, X_n]$. Dann gibt es eine Filtrierung*

$$0 = M^0 \subset M^1 \subset \cdots \subset M^r = M$$

*durch graduierte Untermoduln, so dass*

$$M^i/M^{i-1} \cong (S/P_i)[l_i]$$

*für ein homogenes Primideal $P_i \subset S$, $l_i \in \mathbb{Z}$.*
*Sei $P \subset S$ ein homogenes Primideal. Dann ist $P \supset I(M)$ genau dann, wenn $P \supset P_i$ für ein $i$. Insbesondere sind die minimalen Primideale von $I(M)$ (die zu den irreduziblen Komponenten von $V(I(M))$ gehören) genau die minimalen Elemente von $P_1, \dots, P_r$. Die Häufigkeit mit der ein minimales $P_i$ auftaucht, ist unabhängig von der Wahl der Filtrierung.*

**Bemerkung.** Weder die Filtrierung noch die auftauchenden $P_i$ sind eindeutig.

*Beweis:* Hier zunächst die wesentlich Konstruktion. Sei $m \in M$ homogen, $I(m) = \{s \in S | sm = 0\}$. Dies ist ein homogenes Ideal. Wir betrachten die Menge der $I(m)$ für $m \neq 0$. Da der Ring $S$ noethersch ist, enthält sie ein maximales Element $I(x)$.

**Behauptung.** *$I(x)$ ist ein Primideal.*

Es ist $1 \notin I(x)$, da $1x = x \neq 0$. Sei $ab \in I(x)$ und $b \notin I(x)$, also $abx = 0$, $bx \neq 0$. Ohne Einschränkung können $a, b$ homogen gewählt werden (zerlege $a$, $b$ in homogene Komponenten, vergleiche homogene Anteile von $abx$ von oben.). Es ist $I(x) \subset I(bx)$. Wegen der Maximalität gilt Gleichheit. Es ist $a \in I(bx)$, also $a \in I(x)$, wie zu zeigen war.

Sei $l = \deg(x)$. Wir betrachten $M^1 = \langle x \rangle$. Dann gilt

$$M^1 \cong S/I(x)[l]$$

Nun betrachten wir $M/M^1$, finden hierin einen Untermodul $N$ von der gewünschten Form und setzen $M^2$ das Urbild von $N$. Induktiv erhalten wir eine Kette von Untermoduls

$$0 \subset M^1 \subset M^2 \subset M^3 \dots$$

Da $M$ noethersch ist, endet dieser Prozess mit $M = M^r$.
Die Aussage über homogene Primideale folgt aus dem Lemma 9.11. Sei $P$ ein minimales Primideal, dass $I(M)$ enthält. Wir lokalisieren im nicht-graduierten Sinn an $P$ und erhalten eine Filtrierung

$$0 \subset M_P^1 \subset M_p^2 \subset \cdots \subset M_P^r$$

Es ist $(S/P_i)_P \neq 0$ genau dann, wenn $P_i \subset P$. Da $P$ minimal ist, also nur dann, wenn $P_i = P$. Dies bedeutet, dass die Kette genau soviele nicht-triviale Inklusionen enthält, wie $P_i = P$ vorkommt.
Die Unabhängigkeit von der Wahl der Kette ist ein allgemeines Prinzip. Entscheidend ist, dass der Körper $(S/P)_P$ ein einfacher $S_P$-Modul ist, also keine nicht-trivialen Untermoduln enthält. □

*Beweis von Theorem 9.6:* Der Beweis wird mit Induktion über die Dimension von $V(I(M))$ geführt. Wegen Korollar 9.12 und dem letzten Satz genügt es den Fall zu betrachten, dass $M = (S/P)[l]$ wobei $P$ ein homogenes Primideal ist. Die Operation $[l]$ bedeutet $z \mapsto z + l$, also genügt sogar $M = S/P$.
**1. Fall:** $P = \langle X_0, \dots, X_n\rangle$. Dann ist $S/P = k$, $\phi_M(n) = 0$ für $n > 0$, also $P_M = 0$ vom Grad $-\infty$ und $V(P) = \emptyset$ hat Dimension $-\infty$.
**2. Fall:** $P \neq \langle X_0, \dots, X_n\rangle$. Ohne Einschränkung ist $X_0 \notin P$. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz von graduierten Moduln

$$0 \to M \xrightarrow{X_0} M[1] \to M'' \to 0$$

Die erste Abbildung ist injektiv, da $P$ ein Primideal ist und $X_0 \notin P$. Es folgt

$$\phi_{M''}(n) = \phi_M(n+1) - \phi_M(n) = \Delta(\phi_M)(n)$$

Da $P$ ein Primideal ist, gilt $I(M) = I(S/P) = P$. Weiter gilt

$$I(M'') = I(S/P + \langle X_0\rangle) = P + \langle X_0\rangle\ .$$

Wegen $X_0 \notin P$ und dem Krullschen Hauptidealsatz

$$\dim V(I(M'')) = \dim V(P) \cap V(X_0) = \dim V(P) - 1\ .$$

Mit Induktion über die Dimension der Varität können wir vorausetzen, dass die Aussage des Theorems für $M''$ gilt. Nach Lemma 9.9 existiert ein Hilbert-Polynom $P_M$ vom Grad $\deg P_{M''} + 1$.
Man beachte, dass auch der Fall $\dim V(P) = 0$ von diesem Beweis abgedeckt ist. Dann ist $V(P) \cap V(X_0) = \emptyset$ und $P + \langle X_0\rangle = \langle X_0, \dots, X_n\rangle$. Der erste Fall ist unser Induktionanfang. Das Polynom $P_M$ ist in diesem Fall konstant ungleich 0. □

**Satz 9.14.** *(i) Für $Y \subset \mathbb{P}^n$ nichtleer ist* $\deg Y \in \mathbb{N}$.

*(ii) Wenn $Y = Y_1 \cup Y_2$ mit $\dim Y_1 = \dim Y_2 = r$ und $\dim Y_1 \cap Y_2 < r$, dann gilt*

$$\deg Y = \deg Y_1 + \deg Y_2$$

*(iii)* $\deg \mathbb{P}^n = 1$

*(iv) Sei $H \subset \mathbb{P}^n$ Hyperfläche, $I(H) = \langle f\rangle$ mit $f$ homogen vom Grad $d$. Dann gilt*

$$\deg H = d$$

*Beweis:* $P_Y$ ist ein Polynom vom Grad $r = \dim Y$. Der führende Koeffizient hat die Form $c_0/r!$ für eine ganze Zahl $c_0$. Er ist positiv, da $P_Y(n) > 0$ für große $n$.
Zu (ii): Seien $I_1$, $I_2$ die Ideale von $Y_1$ und $Y_2$. Dann gilt

$$I := I(Y) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$$

Es gilt $V(I_1 + I_2) = Y_1 \cap Y_2$. Wir haben also eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to S/I \to S/I_1 \oplus S/I_2 \to S/(I_1 + I_2) \to 0$$

Es folgt

$$P_Y = P_{S/I} = P_{S/I_1} + P_{S/I_2} - P_{S/(I_1+I_2)} = P_{Y_1} + P_{Y_2} - P_{Y_1 \cap Y_2}$$

Wegen der Dimensionsvoraussetzung ist der führende Koeffizient

$$\frac{\deg Y}{r!} = \frac{\deg Y_1}{r!} + \frac{\deg Y_2}{r!}$$

Zu (iii): Wir betrachten $P_{k[X_0,\ldots,X_n]}$. Für $d > 0$ hat der Raum der homogenen Polynome vom Grad $d$ in $n+1$-Variablen die Dimension

$$\binom{z+n}{n} = \frac{z^n}{n!} + \ldots$$

Alternativ argumentieren wir mit Induktion nach $n$ und der exakten Sequenz

$$0 \to S \xrightarrow{X_n} S[1] \to k[X_0, \ldots, X_{n-1}] \to 0 \ ,$$

d.h. $\Delta P_S = P_{k[X_0,\ldots,X_{n-1}]}$.
Zu (iv): Sei $I(H) = \langle f \rangle$ mit $f$ vom Grad $d$. Wir betrachten

$$0 \to S[-d] \xrightarrow{f} S \to S/\langle f \rangle \to 0$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
P_H(z) &= \binom{z+n}{n} - \binom{z-d+n}{n} \\
&= \left( \frac{z^n}{n!} + \frac{1}{n!}(\sum_{i=1}^{n} i) z^{n-1} + \ldots \right) - \left( \frac{z^n}{n!} + \frac{1}{n!}(\sum_{i=1-d}^{n-d} i) z^{n-1} + \ldots \right) \\
&= 0z^n + \left( \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-2d+1)}{2} \right) \frac{z^{n-1}}{n!} + \ldots \\
&= \frac{d}{(n-1)!} z^{n-1} + \ldots
\end{aligned}$$

□

## Der Satz von Bézout

**Definition 9.15.** *Sei $Y \subset \mathbb{P}^n$ eine Varietät der Dimension $r$ und $H \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche, die mit $Y$ keine Komponenten gemeinsam hat. Sei $Z$ eine irreduzible Komponente von $Y \cap H$ der Dimension $r-1$. Dann ist die* Schnittmultiplizität $i(Y, H; Z_j)$ *von $Y$ und $H$ in $Z$ gegeben als die Vielfachheit, mit der $I(Z)$ in der Kette aus Satz 9.13 für $M = S/(I(Y) + I(H))$ vorkommt.*

**Bemerkung.** Wenn $H$ keine Hyperfläche ist, so wird es komplizierter. Nämlich:

$$i(Y, Y'; Z) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathrm{len}\mathrm{Tor}^i_{S_P}(S(Y)_P, S(Y')_P)$$

mit $P = I(Z)$.

**Lemma 9.16.** *Sind $Y, H$ Kurven in $\mathbb{P}^2$, so stimmt dies mit der Definition 9.3 überein.*

*Beweis:* In dieser Situation ist $Z = Q$ ein Punkt, $P := I(Z)$ ein maximales Ideal. Wir betrachten $M = S/I(H) + I(Y)$.
Nach Satz 9.13 gibt es eine endliche Filtrierung

$$M^0_P \subset M^1_P \cdots \subset M^r_P = M_P$$

wobei in jedem Schritt

$$(M^i/M^{i-1})_P \cong \begin{cases} 0 \\ (S/P)_P \cong k \end{cases}$$

Daher ist die Vektorraumdimension von $M_P$ gleich der Anzahl der Länge der Kette, also der Schnittmultiplizität im Sinne der letzten Definition. □

**Theorem 9.17** (Satz von Bézout)**.** *Sei $Y \subset \mathbb{P}^n$ eine Untervarietät, $H \subset \mathbb{P}^n$ eine Hyperfläche, die mit $Y$ keine gemeinsamen Komponenten hat. Sei*

$$Y \cap H = Z_1 \cup \cdots \cup Z_s$$

*die Zerlegung in irreduzible Komponenten. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^{s} i(Y, H; Z_j) \deg Z_j = (\deg Y)(\deg H)$$

*Beweis:* Sei $I(H) = \langle f \rangle$ vom Grad $d$. Wir betrachten wieder

$$0 \to S/I(Y)[-d] \xrightarrow{f} S(Y) \to M \to 0$$

mit $M = S/I(Y) + I(H)$. Es folgt

$$P_M(z) = P_Y(z) - P_Y(z-d)$$

Wir vergleichen die höchsten Koeffizienten auf beiden Seiten. Sei $\deg Y = e$, $\dim Y = r$, also

$$\begin{aligned}
P_Y(z) &= \frac{e}{r!}z^r + e_1 z^{r-1} + \dots \\
P_Y(z) - P_Y(z-d) &= \frac{e}{r!}z^r + e_1 z^{r-1} + \dots - \left[\frac{e}{r!}(z-d)^r + e_1(z-d)^{r-1} + \dots\right] \\
&= \frac{e}{r!}z^r + e_1 z^{r-1} - \frac{e}{r!}z^r + dr\frac{e}{r!}z^{r-1} - e_1 z^{r-1} + \dots \\
&= \frac{der}{r!}z^{r-1} + \dots
\end{aligned}$$

Andererseits berechnen wir $P_M$ direkt. Wir filtrieren

$$0 = M^0 \subset M^1 \subset \dots \subset M^t = M$$

mit $M^i/M^{i-1} \cong (S/P_i)[l_i]$ für Primideale $P_i$. Dann ist

$$P_M = \sum_{i=1}^t P_i \qquad P_i = P_{(S/P_i)[l_i]}$$

Wenn $V(P_i)$ die Dimension $r_i$ und den Grad $f_i$ hat, dann gilt

$$P_i = \frac{f_i}{r_i!}z^{r_i} + \dots$$

Zum führenden Koeffizienten von $P_M$ tragen nur diejenigen Summanden mit $r_i = r-1$ bei. Die zugehörigen $P_i$ sind (Hauptidealsatz!) die Primideale der irreduziblen Komponenten von $V(I(M)) = Y \cap H$. Jedes solche $P_i$ tritt nach Definition $i(Y,H;V(P_i))$ mal auf und der führende Koeffizient ist $\deg V(P_i)/(r-1)!$. Also

$$P_M = \sum P_i = z^{r-1}\left(\sum_{\dim V(P_i)=r-1} \frac{\deg f_i}{(r-1)!}\right) + \dots$$

Koeffizientenvergleich beweist das Theorem. □

**Bemerkung.** Speziell in $\mathbb{P}^2$ sind alle Kurven Hyperflächen. Es ergibt sich als Spezialfall der Satz von Bézout in der Version von Satz 9.1.

**Korollar 9.18.** *Sei $C \subset \mathbb{P}^n$ eine Kurve, $f \in S(C)$ homogen vom Grad $m$. Dann gilt*

$$\sum_{P\in C} \dim \mathcal{O}_P/\langle f\rangle = m \deg C$$

*Beweis:* Wir liften $f$ nach $S = k[X_0, \dots, X_n]$. Seien $f_1, \dots, f_s$ die irreduziblen Faktoren. Da die Dimension additiv ist, genügt es die irreduziblen Faktoren zu betrachten. Sei also ohne Einschränkung $f$ irreduzibel. Wir setzen $H = V(f) \subset \mathbb{P}^n$. Es ist $I(H) = \langle f\rangle$. Nach dem Theorem von Bézout gilt

$$\sum_{P\in H\cap C} \dim(S(C)/\langle f\rangle)_{I(P)} = \deg H \deg C$$

Falls $P \notin H \cap C$, so ist $S(C)/f = 0$, diese Summanden tragen nicht bei. Schließlich gilt $(S(C)/\langle f \rangle)_{I(P)} = \mathcal{O}_P/\langle f \rangle$. □

Das Element $f \in S(C)$ definiert einen Morphismus

$$f : C \to \mathbb{P}^1$$

Das Korollar sagt, dass jeder Punkt die gleiche Anzahl Urbilder (mit Vielfachheit) hat. Hieraus folgt dann, dass $f$ endlich ist und die Erweiterung $k(\mathbb{P}^1) \to k(C)$ ebenfalls.

# Kapitel 10

# Ausblick

Es gibt noch sehr viel, teils sehr grundsätzliche Themen, die wir nicht behandelt haben.

### Tensor-Produkt

Sei $A$ ein Ring, $M, N$ Moduln. Dann ist

$$M \otimes_A N$$

ein $A$-Modul, der von Elementen der Form $m \otimes n$ mit $m \in M, n \in N$ erzeugt wird. Die Rechenregeln garantieren, dass

$$M \times N \to M \otimes N; \quad (m, n) \mapsto m \otimes n$$

bilinear ist.

### Singularitäten

Beispiele für Singularitäten sind der Nullpunkt im Achsenkreuz $V(XY) \subset \mathbb{A}^2$ oder in der *nodalen Kurve* $V(Y^2 - X^2(X-1)$. Diese Punkte werden über die partiellen Ableitungen charakterisiert, also die Jacobi-Matrix aus der mehrdimensionalen Analysis.
Im eindimensionalen Fall: Sei $V \subset \mathbb{A}^2$ affine Kurve, $I(V) = \langle f \rangle$. Dann heißt $P \in V$ *Singularität*, wenn $\text{grad}(f) = (\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y)$ in $P$ verschwindet.
Varietäten ohne Singularitäten heißen *nicht-singulär*.

### Kurven

Varitäten der Dimension 1 heißen auch *Kurve*. Das wichtigste Hilfsmittel ist der *Satz von Riemann-Roch*, der eine Aussage über rationale Funktionen (also Elemente des Funktionenkörpers) mit vorgegebenen Null- und Polstellenverhalten macht.
Glatte projektive Kurven werden eindeutig durch ihren Funktionenkörper charakterisiert. Das erlaubt einen alternativen Zugang ganz ohne Geometrie.

## Algebraische Zahlentheorie

Algebraische Zahlentheorie beschäftigt sich mit endlichen Ringerweiterungen von $\mathbb{Z}$. Nach unseren Sätzen sind sie 1-dimensional, also sehr ähnlich zu den Koordinatenringen von Kurven. Im allgemeinen gilt Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung nicht mehr, aber man ist nicht weit davon entfertn.

# Inhaltsverzeichnis


**0 Einleitung** **1**

**1 Grundbegriffe der algebraischen Geometrie** **7**

**2 Noethersche Ringe und Moduln** **13**

**3 Quasi-projektive Varietäten** **23**

**4 Irreduzibilität** **31**

**5 Lokale Ringe und Lokalisierung** **39**

**6 Hilbertscher Nullstellens. u. Dimensionsth.** **49**

**7 Quasi-projektive Varietäten** **59**

**8 Noch mehr Dimensionstheorie** **67**

**9 Schnitttheorie im projektiven Raum** **71**

**10 Ausblick** **83**