Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie

Sommersemester 2024

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Fassung vom 30. April 2024

**Dies ist ein Vorlesungsskript und kein Lehrbuch.
Mit Fehlern muss gerechnet werden!**

Math. Institut
Ernst-Zermelo-Str.1
79104 Freiburg

0761-203-5560
annette.huber@math.uni-freiburg.de

Kapitel 0

Einleitung

Geometrie beschäftigt sich mit Objekten wie Kreisen, Kugeln und ähnlichem. Die eigentliche Heimat ist die *Differentialgeometrie.* Dort ist der zentrale Begriff der der Mannigfaltigkeit: ein topologischer Raum, der lokal so aussieht wie eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Man arbeitet dann mit der vollen Kraft der Analysis.

Viele geometrische Objekte (z.B. eben Kreis und Kugel) werden jedoch durch *Polynomgleichungen* beschrieben. Sie sind Objekte der *algebraischen* Geometrie. Die Voraussetzung ist sehr einschränkend, enthält aber viele interessante Beispiele. Historisch behandelte man zuerst den Grundkörper $\mathbb{C}$ und verwendete weiter analytische Methoden. Es gelang dann aber, immer mehr Sätze mit rein algebraischen Methoden zu beweisen. Der Vorteil ist, dass dann auch andere Grundkörper erlaubt werden können oder sogar beliebige Ringe. Mein Arbeitsgebiet, die arithmetische Geometrie, arbeitet vor allem über $\mathbb{Z}$.

In dieser Vorlesung werden wir uns auf Körper einschränken, meist algebraisch abgeschlossene. Es ist nicht falsch an $\mathbb{C}$ zu denken – aber Vorsicht in positiver Charakteristik.

Algebraische Mengen

Wir beginnen mit der Einführung des zentralen Begriffes dieser Vorlesung:

Definition 0.1. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Der* affine Raum der Dimension *n über k ist*

$$\mathbb{A}^n = k^n.$$

Elemente von $\mathbb{A}^n$ heißen Punkte. *Für $P = (a_1, \dots, a_n)$ heißen die a_i Koordinaten von P. Wir interpretieren den Polynomring*

$$\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) = k[X_1, \dots, X_n]$$

als Funktionen

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n &\to k \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto f(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Sei $S \subset k[X_1, \dots, X_n]$ eine Teilmenge. Die durch S definierte algebraische Menge *ist die Menge*

$$V(S) = \{(x_1, \dots, x_n) \in k^n | f(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ für alle } f \in S\}$$

Ist $S = \{f\}$, so heißt $V(f) = V(\{f\})$ auch affine Hyperfläche.

Beispiel. (i) Sei $n = 1$, $f = X^2 + 1$. Dann gilt $V(f) = \{\pm\sqrt{-1}\}$. Dies sind zwei oder ein Punkt. Es ist nämlich

$$\sqrt{-1} = -\sqrt{-1} \Leftrightarrow 2\sqrt{-1} = 0 \Leftrightarrow 2 = 0$$

Zur Erinnerung: Der Körper k hat *Charakteristik* 2 falls $2 = 0$ in k.

Ist der Körper nicht algebraisch abgeschlossen, so hat die Gleichung eventuell gar keine Lösungen. Diese Zusatzkomplikation wollen wir in diesem Semester umgeben, daher die Einschränkung auf algebraisch abgeschlossenes k.

(ii) Sei $n = 2$, $S = X^2 + Y^2 - 1$. Die Menge $V(f)$ hat unendliche viele Punkte - für jede Wahl von $x \in k$ zwei oder einen Wert y. Über den reellen Zahlen erhalten wir einen Kreis, aber natürlich ist $\mathbb{R}$ nicht algebraisch abgeschlossen. Über den komplexen Zahlen ist $V(f)$ als Mannigfaltigkeit eine Ebene.

(iii) $n = 2$, $S = \{X^2 + Y^2 - 1, X + 3Y\}$

$$x = -3y \Rightarrow 1 = 9y^2 + y^2 = 10y^2$$

Falls die Charakteristik von k gleich 2 oder 5 ist, so ist die Gleichung unlösbar, also $V(S) = \emptyset$. Andernfalls ist $y = \pm 10^{-\frac{1}{2}}$ und $V(S)$ besteht aus zwei Punkten.

(iv) Sei $k = \mathbb{C}$, $n = 1$, $f = \sin(z)$. Dann ist

$$\{\sin(z) = 0\} = \mathbb{Z}\pi$$

Dies ist *keine* algebraische Menge. Zunächst ist sin kein Polynom. Ist $g \in \mathbb{C}[Z]$ ein Polynom, so hat $V(g)$ nur endlich viele Nullstellen, während $\sin(z)$ unendlich viele hat.

Lemma 0.2. *Sei $V(S) \subset \mathbb{A}^1_k$ eine algebraische Menge. Dann ist entweder $V(S) = \mathbb{A}^1$ oder $V(S)$ hat nur endlich viele Elemente.*

Beweis: Angenommen, es gibt $f \in S$ mit $f \neq 0$. Dann ist $V(S) \subset V(f)$. Als Polynom in einer Variablen hat f nur endlich viele Nullstellen.
Andernfalls ist $S = \emptyset$ oder $S = \{0\}$ und wir haben $V(S) = \mathbb{A}^1_k$. $\square$

Bemerkung. Unterschiedliche Gleichungen können also die gleiche algebraische Menge definieren.

Allgemein bestehen alle null-dimensionalen algebraischen Mengen nur aus endlich vielen Punkten - aber dafür müssten wir erstmal definieren, was die Dimension einer Varietät ist. Dies (wie vieles andere auch) lesen wir an einem Ring ab, der zur Varietät gehört.

Definition 0.3. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ eine Teilmenge, $V = V(S)$. Dann heißt*

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(V) = k[V] = \{f : V \to k | \ & \textit{es gibt } F \in k[X_1, \ldots, X_n], \\ & f(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) \textit{ für alle } (x_1, \ldots, x_n) \in V\}\end{aligned}$$

affiner Koordinatenring *von V. Die Elemente von $k[V]$ heißen* algebraische Funktionen *auf V. Üblich ist auch der Name* reguläre Funktionen.

Beispiel. Sei $g \in k[X]$ nicht konstant, $V = V(g) = \{P_1, \ldots, P_d\}$. Dann ist

$$k[V] \cong k^d \qquad f \mapsto (f(P_i))_{i=1}^d$$

wobei k^d mit der komponentenweisen Addition und Multiplikation zu einem Ring wird.

Beweis: Nach Definition von $k[V]$ ist die Zuordnung ein injektiver Ringhomomorphismus. Sei nun $(a_1, \ldots, a_n) \in k^d$ ein Tupel. Das Polynom

$$F(X) = \sum_{i=1}^{d} (X - P_i + a_i) \prod_{j \neq i} \frac{X - P_j}{P_i - P_j}$$

erfüllt $F(P_i) = a_i$, denn P_i ist Nullstelle jedes Summanden außer dem zu i. Dies ist das gesuchte Urbild. □

Inhalt der Vorlesung

Wir wollen die Eigenschaften von algebraischen Mengen verstehen, dies bedeutet automatisch, dass wir ihre Koordinatenringe verstehen müssen. Dazu werden wir die Grundlagen der kommutativen Algebra erarbeiten, die auch in anderen Situationen angewendet wird, etwa in der algebraischen Zahlentheorie.
Konkret:

(i) Korrespondenz von affinen Varietäten und Koordinatenringen: Ideale, Hilbertscher Nullstellensatz

(ii) Zur Definition einer affinen Varietät reichen endlich viele Gleichungen aus: Theorie der noetherschen Ringe und Moduln

(iii) Funktionenkörper und lokale Ringe: Lokalisierung von Ringen und Moduln

(iv) Dimensionstheorie: ganze Ringerweiterungen und ihre Eigenschaften

(v) Singularitäten und Glattheit: reguläre Ringe (wenn die Zeit reicht)

(vi) Schnitte von Untervarietäten und Satz von Bézout: Graduierte Ringe, Hilbert-Samuel-Polynome

Vermutlich ist dann das Semester lange vorbei. Sonst wären algebraische Kurven und Riemann-Roch das natürliche nächste Ziel.

Nötige Vorkenntnisse

Vor allem lineare Algebra 1 und 2. Der Inhalt der Vorlesung Algebra und Zahlentheorie wird *nicht* vorausgesetzt. Ehrlicherweise sollte gesagt sein, dass der Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes ohne diese Vorlesung vermutlich nicht zu verstehen ist. Diesen kann man aber als Blackbox benutzen, so dass es danach wieder weitergeht.
Zur algebraischen Geometrie passt als Ergänzung sehr gut Funktionentheorie, auch wenn in diesem Semester nicht klar werden wird, warum.

Literatur

kommutative Algebra:

- Atiyah, MacDonald, Introduction to commutative algebra.
  Das Wichtigste schön kurz und knapp, aber auch sehr dicht geschrieben. Enthält Unmengen von Übungsaufgaben.

- Zariski, Samuel, Commutative algebra, Vol 1 und 2
  Klassiker. Enthält das Doppelte an Stoff, reicht auch für vertiefende Vorlesungen in algebraischer Geometrie.

- Bourbaki, Algèbre commutative (oder Commutative algebra)
  Enzyklopädisch, eher zum Nachschlagen als zum Erarbeiten.

- Matsumura, Commutative ring theory.

- Matsumura, Commutative algebra.
  Die beiden Matsumuras sind zwei verschiedene Bücher, nicht Neuauflage oder Band 1 und 2. Sie sind weder überschneidungsfrei noch deckungsgleich. Thematisch ähnlich ausführlich wie Zariski, Samuel, aber moderner.

- Eisenbud: Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry.
  Kenne ich noch nicht. Der Titel klingt genau richtig für unsere Vorlesung, der Inhalt scheint aber deutlich weiter zu gehen.

algebraische Geometrie:
Die Bücher zur algebraischen Geometrie fallen in (mindestens) drei Gruppen, je nachdem, was für k erlaubt ist:

(i) k algebraisch abgeschlossen. Das ist unser Fall, Theorie der Varietäten. Etwas veraltet, aber gut zugänglich.

(ii) $k = \mathbb{C}$ mit Einsatz von analytischen Methoden, oft eine schöne Ergänzung, wenn man sich in Funktionentheorie auskennt.

(iii) k beliebiger Ring, Theorie der Schemata. Der allgemeinste Fall. Die Theorie der Varietäten ist ein Spezialfall, nicht etwa Voraussetzung. Da ich Zahlentheoretikerin bin, ist $k = \mathbb{Z}$ für mich besonders interessant. Wir werden uns aber dieses Semester (noch) nicht mit Schemata beschäftigen. Wer bei mir promoviert, kommt um Schemata nicht herum, wer Master macht vielleicht.

In diesem Sinne:

- Reid, Undergraduate Algebraic Geometry
  Knapp, gut lesbar, übersichtlich wie ein Vorlesungsskript, umfasst aber nicht den ganzen Stoff der Vorlesung.

- Shafarevich, Basic algebraic geometry
  Klassiker, sehr geometrisch, enthält das meiste, was man über Varietäten sagen kann.

- Fulton, Algebraic Curves
  Nach einer allgemeinen Einführung konzentriert sich der Text auf ebene Kurven, Bézout fehlt. Versucht mit möglichst wenig Technik auszukommen, ein wenig zu wenig für meinen Geschmack. Schöner Beweis von Riemann-Roch.

- Hartshorne, Algebraic Geometry
  Kapitel I behandelt Varietäten einschließlich der Schnitttheorie im projektiven Raum, wie sie in der Vorlesung drankommt. Danach kommen Schemata und Kohomologie. Mir haben Kapitel II und III für die Promotion und noch einiges mehr gereicht.

- Mumford, The red book of varieties and schemes
  Die erste Hälfte Varietäten, die zweite Schemata. Im Niveau deutlich unter Hartshorne. Ich mag es persönlich sehr gerne, insbesondere wird die Dimensionstheorie vermutlich diesem Text folgen.

- Griffiths, Harris, Principles of algebraic geometry.
  Klassiker über $\mathbb{C}$ mit viel komplexer Analysis. Passt nicht zur Vorlesung, ist aber sonst sehr schön.

- Grothendieck Éléments de géométrie algébrique., kurz EGA
  Die Originalquelle zu Schemata. Enthält alle Grundlagen. Wer sich die Mühe macht, den Text komplett durchzuarbeiten, hat dann eine tolle Grundlage. Es sind mehrere Bände der Zeitschrift Publ. IHES, nämlich 4, 8, 11, 20, 24, 28, 32.

Kapitel 1

Grundbegriffe der algebraischen Geometrie

Den Begriff der affinen Menge und des Rings der algebraischen Funktionen kennen wir ja schon. Sei weiterhin k ein algebraisch abgeschlossener Körper. Alle Ringe sind kommutativ mit 1. Alle Ringhomomorphismen bilden 1 auf 1 ab.

Bemerkung. Es gibt ein ärgerliches Problem mit der Frage, ob $1 = 0$ erlaubt sein soll. Zur Erinnerung: in einem Körper ist nach Voraussetzung $1 \neq 0$. Ist in einem Ring $0 = 1$, so folgt $a = 1a = 0a = 0$ für alle a, also enthält der Ring nur ein einziges Element. Wenn man ihn erlaubt, muss man ständig an den Ausnahmefall denken. Das ist lästig. Andererseits wollen wir gerne, dass die leere Menge auch einen Koordinatenring hat. Für $V(1) = \emptyset \subset \mathbb{A}^n$ setzen wir nämlich

$$\mathcal{O}(\emptyset) = 0.$$

Daher erlauben wir $1 = 0$. Auch der Nullring ist ein Ring mit 1.

Definition 1.1. *Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge. Es sei*

$$I(V) = \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] | f(P) = 0 \text{ für alle } P \in V\}$$

das Verschwindungsideal von V.

Bemerkung. (i) Falls $V = V(S)$ für $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$, so gilt nach Definition $S \subset I(V)$.

(ii) Für $f, g \in I(V)$ folgt $f + g \in I(V)$, denn

$$(f + g)(P) = f(P) + g(P) = 0 + 0 = 0 \text{ für alle } P \in V$$

(iii) Für $f \in I(V)$ und $g \in k[X_1, \ldots, X_n]$ gilt $gf \in I(V)$, denn

$$(gf)(P) = g(P)f(P) = g(P)0 = 0 \text{ für alle } P \in V$$

D.h. $I(V)$ ist ein Ideal.

Definition 1.2. *Sei A ein Ring. Eine Untergruppe $I \subset A$ heißt* Ideal*, falls für alle $x \in I$, $a \in A$ gilt $ax \in I$.*

Lemma 1.3. *Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist* $\mathrm{Ker}(\phi)$ *ein Ideal.*

Beweis: Sei $a \in A$, $x \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Dann folgt

$$\phi(ax) = \phi(a)\phi(x) = \phi(a)0 = 0$$

□

Nach Definition gilt $I(V) = \mathrm{Ker}(\varrho)$, wobei ϱ die Einschränkungsabbildung $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \to \mathcal{O}(V)$ ist.

Satz 1.4. *Sei A ein Ring, $I \subset A$ ein Ideal. Dann ist die Menge der Nebenklassen*

$$A/I := \{a + I | a \in A\}$$

mit der Addition und Multiplikation von Nebenklassen

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$
$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

ein Ring. Die Projektionsabbildung $A \to A/I$ mit $a \mapsto a + I$ ist ein Ringhomomorphismus mit Kern I.

Beweis: Wie bei Quotientenvektorräumen und Restklassengruppen ist das Problem die Wohldefiniertheit von Addition und Multiplikation. Die Rechnung für die Addition ist die gleiche wie für Vektorräume oder Gruppen und wird hier weggelassen.
Interessanter ist die Multiplikation. Sei $a + I = a' + I$

Behauptung. *$ab + I = a'b + I$ für alle $b \in A$*

Die Voraussetzung ist äquivalent zu $a - a' \in I$. Da I ein Ideal ist, ist dann auch $ab - a'b = (a - a')b \in I$. Dies ist die Behauptung.
Der Rest folgt wie für Vektorräume. □

Korollar 1.5. *Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge Dann gilt*

$$\mathcal{O}(V) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I(V)$$

Beweis: Die Restriktionsabbildung $\varrho : \mathcal{O}(\mathbb{A}^n) \to \mathcal{O}(V)$ ist nach Definition surjektiv mit Kern $I(V)$. Daher ist die induzierte Abbildung

$$\overline{\varrho} : \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I(V) \to \mathcal{O}(B) \qquad f + I(V) \mapsto \varrho(f)$$

bijektiv. □

Bemerkung. Das Korollar gilt auch für $V = \emptyset$, denn dann ist $I(V) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n)$ (jedes Polynom verschwindet auf allen – also keinen – Punkten) und $\mathcal{O}(\mathbb{A}^n)/I(V) = 0$.

Im Beweis haben wir bereits den Homomorphiesatz verwendet:

Satz 1.6 (Homomorphiesatz)**.** *Sei $\phi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus mit Kern I. Dann ist*

$$\overline{\phi} : A/I \to \mathrm{Im}(\phi) \qquad a + I \mapsto \phi(a)$$

ein Ringisomorphismus.

Beweis: Wie für Vektorräume oder Gruppen. □

Definition 1.7. *Sei A ein Ring, $S \subset A$ eine Teilmenge. Dann setzen wir*

$$\langle S \rangle = \bigcap_{S \subset I \subset A} I$$

den Schnitt aller Ideale I, die S enthalten. Dies ist das von S erzeugte Ideal.

Man sieht leicht, dass $\langle S \rangle$ selbst ein Ideal ist.

Korollar 1.8. *Sei $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ eine Teilmenge, $V = V(S)$ die zugehörige algebraische Menge. Dann ist*

$$\langle S \rangle \subset I(V)$$

Beweis: $I(V)$ ist ein Ideal, das S enthält. □

Gilt vielleicht sogar Gleichheit?

Beispiel. Sei $S = \{XY\} \subset k[X, Y]$, also $\langle XY \rangle = k[XY](XY)$. Es ist

$$V(XY) = \{(x, y) \in k^2 | xy = 0\} = \{(0, y) | y \in k\} \cup \{(x, 0) | x \in k\ .\}$$

das Achsenkreuz in der Ebene.
Wir berechnen $I = I(V(XY))$. Sei $f = \sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j \in I$. Dann gilt

$$f(0, y) = \sum_{i,j} a_{ij} 0^i Y^j = \sum_j a_{0j} y^j = 0 \text{ für alle } y \in k$$

Da k algebraisch abgeschlossen ist, ist dies nur möglich, falls $a_{0j} = 0$ für alle j. Ebenso folgt $a_{i0} = 0$ für alle i. In anderen Worten: $a_{ij} \neq 0 \Rightarrow i, j > 0$. Damit ist f ein Vielfaches von XY. Es gilt tatsächlich $I = \langle XY \rangle$.

Beispiel. Sei $S = \{X^2\} \subset k[X]$. Dann ist $\langle X^2 \rangle = k[X]X^2$, $V = \{0\} \subset \mathbb{A}^1$ und $I(V) = k[X]X$. Die Gleichungen X und X^2 definieren dieselbe algebraische Menge!

Definition 1.9. *Sei $I \subset A$ ein Ideal. Dann heißt*

$$\sqrt{I} = \{x \in A| \text{ es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n \in I \}$$

Radikal *von I. Ein Ideal heißt* Radikalideal*, wenn es mit seinem Radikal übereinstimmt.*

Lemma 1.10. *Das Radikal ist ein Ideal.*

Beweis: Seien $x, y \in \sqrt{I}$, $x^n, y^m \in I$. Ohne Einschränkung ist $n \geq m$. Dann ist

$$(xy)^n = x^n y^n \in I$$

da I ein Ideal. Außderdem

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} x^i y^{n+m-i}$$

Falls $i \geq n$, so ist der Summand in I, da $x^i \in I$. Andernfalls ist $i < n$ und daher $m + n - i \geq m$. Dann ist der Summand in I, da $y^{n+m-i} \in I$. Jeder Summand ist in I, also auch die Summe. □

Korollar 1.11. *Sei $S \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ eine Teilmenge, $V = V(S)$ die zugehörige algebraische Menge. Dann gilt*

$$\sqrt{\langle S \rangle} \subset I(V)$$

Beweis: Sei $f \in \sqrt{\langle S \rangle}$, $f^n \in \langle S \rangle \subset I(V)$, d.h. $f(P)^n = f^n(P) = 0$ für alle $P \in V$. Da k ein Körper ist, folgt $f(P) = 0$ für alle $P \in V$. □

Hier gilt tatsächlich Gleichheit! Das wird unser erstes großes Ziel sein, der Hilbertsche Nullstellensatz. Er erlaubt uns, zwischen Varietäten und Idealen hin und her zu schalten. Eine einfache Teilaussage können wir bereits festhalten.

Lemma 1.12. *Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ algebraische Teilmenge. Dann gilt*

$$V = V(I(V)).$$

Beweis: Sei $V = V(S)$. Wegen $S \subset I(V)$ folgt $V(S) \supset V(I(V))$. Sei $P \in V$. Nach Definition von $I(V)$ ist P Nullstelle jedes Elementes von $I(V)$, liegt also in $V(I(V))$.

□

Bemerkung. Bisher haben wir nicht benutzt, dass k algebraisch abgeschlossen ist. Schon der Fall $n = 1$ zeigt aber, dass die Voraussetzung für den Hilbertschen Nullstellensatz nötig ist.

Zunächst aber noch etwas mehr Geometrie.

Zariski-Topologie

Definition 1.13. *Sei $V \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge. Eine Teilmenge $W \subset V$ heißt* abgeschlossen, *wenn W selbst eine algebraische Menge ist. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt* offen, *wenn $V \smallsetminus U$ abgeschlossen ist.*

Satz 1.14. *Dies ist eine Topologie, die Zariski-Topologie.*

Beweis: Wir müssen die Axiome eines topologischen Raums überprüfen.

(i) $\emptyset$ und V sind offen ($\Leftrightarrow$ V und $\emptyset$ sind abgeschlossen).

(ii) Der Schnitt zweier offener Menge ist offen ($\Leftrightarrow$ Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen).

(iii) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen ($\Leftrightarrow$ Der Schnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen).

Zu (i): Wir wählen $S = \{0\}$ und $S = \{1\}$.
Zu (ii): Sei $W_1 = V(S_1)$, $W_2 = V(S_2)$

Behauptung. $W_1 \cup W_2 = V(S_1 S_2)$

Hier bedeutet $S_1 S_2 = \{f_1 f_2 | f_1 \in S_1, f_2 \in S_2\}$. Sei $P \in W_1$, also $f(P) = 0$ für alle $f \in S_1$. Dann folgt

$$fg(P) = 0 \text{ für alle } f \in S_1, g \in S_2$$

d.h. wir haben $W_1 \subset V(S_1 S_2)$. Ebenso für W_2. Sei nun umgekehrt $P \in V(S_1 S_2)$, dh. $fg(P) = 0$ für alle $f \in S_1, g \in S_2$. Entweder ist $P \in W_1$, d.h. $f(P) = 0$ für alle $f \in S_1$. Oder es gibt ein $f_0 \in S_1$ mit $f_0(P) \neq 0$. Dann gilt für alle $g \in S_2$

$$0 = f_0(P) g(P) \Rightarrow g(P) = 0$$

In diesem Fall ist $P \in W_2$.
Zu (iii): Sei $W_\alpha = V(S_\alpha)$. Dann gilt

$$\bigcap_\alpha W_\alpha = V\left(\bigcup_\alpha S_\alpha\right)$$

(einfach). $\square$

In dieser Sprache sind die algebraischen Mengen die abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{A}^n$.

Beispiel. Eine Teilmenge von $\mathbb{A}^1 = k$ ist abgeschlossen, wenn sie gleich k ist oder nur endlich viele Elemente hat. Die Topologie ist also ganz anders als bei metrischen Räumen. Je zwei offene nichtleere Mengen haben einen nichtleeren Schnitt. Jede unendliche Menge ist dicht!

Definition 1.15. *Eine algebraische Menge $V \subset \mathbb{A}^n$ mit der Zariski-Topologie heißt* affine Varietät*. Eine offene Teilmenge von V mit der induzierten Topologie heißt* quasi-affine Varietät.

Bemerkung. Nicht alle quasi-affinen Varietäten sind affin, z.B. $\mathbb{A}^2 \setminus \{0\}$. Das können wir aber erst später beweisen.

Bemerkung. In der älteren Literatur wird der Begriff Varietät meist für irreduzible Varietäten reserviert, dazu kommen wir noch.

Kapitel 2

Noethersche Ringe und Moduln

Um algebraische Varietäten zu verstehen, muss man Polynomringe über einem Körper verstehen. Wir beginnen mit einer ganz grundlegenden Eigenschaft.

Definition 2.1. *Sei A ein Ring, $I \subset A$ ein Ideal. I heißt* endlich erzeugt*, wenn es eine endliche Menge $S \subset I$ gibt mit $\langle S \rangle = I$.*
Ein Ring heißt noethersch*, wenn jedes Ideal endlich erzeugt ist.*

Beispiel. (i) Sei K ein Körper. Dann gibt es nur zwei Ideale 0 und K, denn falls ein Ideal I ein Element $x \neq 0$ enthält, dann auch $x^{-1}x = 1$ und damit ganz K. Insbesondere ist jedes Ideal endlich erzeugt.

(ii) Im Falle $A = \mathbb{Z}$ sind alle Ideale von der Form (n) für $n \in \mathbb{Z}$ (das gilt sogar für die Untergruppen von $\mathbb{Z}$!), werden also von nur einem Element erzeugt. Solche Ideal heißen *Hauptideale*, solche Ringe heißen *Hauptidealringe*. Hauptidealringe sind noethersch.

(iii) $A = K[X]$ (K ein Körper) ist ebenfalls ein Hauptidealring. (Übungsaufgabe)

Lemma 2.2. *Sei $f : A \to B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus und A noethersch. Dann ist B noethersch.*

Beweis: Sei $I \subset B$ ein Ideal. Dann ist $f^{-1}I \subset A$ ebenfalls ein Ideal. Da A noethersch ist, ist $f^{-1}I$ endlich erzeugt über A. Da f surjektiv ist, ist dann auch I endlich erzeugt über B. □

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass für jede algebraische Menge der Ring $\mathcal{O}(V)$ noethersch ist. Dafür brauchen wir aber Rechenregeln für noethersche Ringe. Es hilft, wenn wir verallgemeinern und gleich noethersche Moduln betrachten.

Moduln

Definition 2.3. *Sei A ein Ring. Ein A-*Modul *M ist eine abelsche Gruppe $(M,+)$ zusammen mit einer* Skalarmultiplikation

$$A \times M \to M$$

so dass für alle $a, b \in A$, $x, y \in M$ gilt:

(i) $a(x+y) = ax + ay$,

(ii) $(a+b)x = ax + bx$,

(iii) $a(bx) = (ab)x$,

(iv) $1x = x$.

Seien M, N Moduln. Eine Abbildung $f : M \to N$ ist ein Modulhomomorphismus*, falls sie ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist und zusätzlich für alle $a \in A$, $x \in M$ gilt: $f(ax) = af(x)$.*

Beispiel. (i) $A = K$ ein Körper. Dann ist ein A-Modul das Gleiche wie ein K-Vektorraum. Modulhomomorphismen von K-Vektorräumen sind genau die linearen Abbildungen aus der linearen Algebra.

(ii) Ein $\mathbb{Z}$-Modul ist das Gleiche wie eine abelsche Gruppe. Modulhomomorphismen von $\mathbb{Z}$-Moduln sind genau die Gruppenhomomorphismen. Präzise: Die Kategorie der abelschen Gruppen ist isomorph zur Kategorie der $\mathbb{Z}$-Moduln.

Beweis: Sei M ein $\mathbb{Z}$-Modul, dann ist nach Definition $(M,+)$ eine abelsche Gruppe. Jeder Modulhomomorphismus ist nach Definition ein Gruppenhomomorphismus.

Interessant ist also die Gegenrichtung. Sei M eine abelsche Gruppe, $x \in M$, $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren rekursiv $1x = x$, $nx = x + (n-1)x$. Für negative n setzen wir $nx = -(-n)x$. Die Modulaxiome gelten alle. Man beweist alles mit Induktion, z.B.

$$n(x+y) = (x+y) + (n-1)(x+y) = x + y + (n-1)x + (n-1)y = nx + ny .$$

Dies ist die einzige mögliche Modulstruktur. Gruppenhomomorphismen sind automatisch linear für die so definierte Skalarmultiplikation. □

Man sieht an der Beispielrechung, dass die Kommutativität von M wirklich benötigt wird.

(iii) Sei K ein Körper. Ein $K[X]$-Modul ist dasselbe wie ein K-Vektorraum V zusammen mit einem K-Endomorphismus $\phi : V \to V$.

Beweis: Sei V ein $K[X]$-Modul. Durch Einschränken der skalaren Multiplikation auf konstante Polynome erhält man die K-Vektorraumstruktur. Die Multiplikation mit X ist eine K-lineare Abbildung $V \to V$.

Ist umgekehrt V ein K-Vektorraum mit Endomorphismus ϕ, so definieren wir die skalare Multiplikation als

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) v = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi^i(v) \qquad n \geq 0, a_i \in K, v \in V$$

Man überprüft leicht die Modulaxiome. □

Sätze über Vektorräume mit Endomorphismus aus der LA 2 (z.B. Jordansche Normalform) sind in Wirklichkeit Sätze über $K[X]$-Moduln.

Bemerkung.
- Ob A eine Eins hat, ist für die allgemeine Theorie nicht wichtig.
- Ist A nicht kommutativ, so muss man unterscheiden zwischen *Linksmoduln* (Formeln wie oben) und *Rechtsmoduln* mit einer skalaren Multiplikation $M \times A \to M$, so dass das Axiom (iii) gilt in der Form: $(ma)b = m(ab)$ für alle $m \in M$, $a, b \in A$. Man unterscheidet dann auch zwischen Links- und Rechtsidealn. Zweiseitige Ideale sind dann diejenigen, so dass A/I wieder ein Ring wird.

Die Grundlagen der Theorie funktionieren wie für Körper. Begriffe wie linear unabhängig, Erzeugendensystem, direkte Summe, Untermodul, Quotientenmodul etc. werden genau wie in der lineare Algebra definiert. Ein Modul heißt *endlich erzeugt*, wenn er ein endliches Erzeugendensystem hat.

Beispiel. A ist auch ein A-Modul. Die Untermoduln von A sind genau die Ideale. Ist $A \to B$ ein Ringhomomorphismus, so ist B ein A-Modul.

Beim Begriff der Basis muss man aufpassen:

Definition 2.4. *Sei M ein A-Modul. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von M heißt* Basis. *M heißt* frei, *falls es eine Basis gibt. Die Mächtigkeit einer Basis heißt* Rang *von M.*

Der Rang eines Moduls ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl der Basis (Reduktion auf den Fall eines Körpers, Übungsaufgabe).

Beispiel.
(i) Wenn A ein Körper ist, so sind alle Moduln frei. (Basisexistenzsatz, Lineare Algebra). Der Rang ist nichts anderes als die Dimension.

(ii) Sei $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dieser Modul ist nicht frei, denn für jedes Element gilt $2x = 0$. Es gibt keine linear unabhängigen Teilmengen!

(iii) A^2 ist frei vom Rang 2 mit Basis $\{(1,0),(0,1)\}$.

Wie in der linearen Algebra sind Kern und Bild eine Modulhomomorphismus Untermoduln. Ist $N \subset M$ ein Untermodul, so ist M/N ein Modul mit der induzierten Skalarmultiplikation. Ist speziell $M = A$ der Ring und $N \subsetneq M$, so erhalten wir den Ring A/N zurück.

Satz 2.5 (Homomorphiesatz, Noethersche Isomorphiesätze). *(i) Sei $f : M \to N$ ein A-Modulhomomorphismus. Dann ist die induzierte Abbildung*

$$\overline{f} : M/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f$$

ein Isomorphismus von A-Moduln.

(ii) Sind $N, N' \subset M$ Untermoduldn, so ist

$$(N + N')/N \cong N'/(N \cap N')$$

ein kanonischer Isomorphismus.

(iii) Sind $N' \subset N \subset M$ Untermoduln, so ist

$$(M/N')/(N/N') \cong M/N$$

ein kanonischer Isomorphismus.

Beweis: In der Algebra zeigt man diese Ausagen für abelsche Gruppen, in der linearen Algebra für Vektorräume. Die Verträglichkeit mit der A-Modulstruktur ist leicht zu überprüfen. Wir zeigen beispielhaft die zweite Aussage. Wir betrachten den Homomorphismus

$$f : N' \to (N + N') \to (N + N')/N$$

Er hat den Kern $\{x \in N' | x + N = 0 + N\} = \{x \in N' | x \in N\} = N \cap N'$. Nach dem Homomorphiesatz erhalten wir einen Isomorphismus

$$\overline{f} : N'/N' \cap N \to \operatorname{Im}(f)$$

Zu zeigen bleibt die Surjektivität von f. Ein beliebiges Element von $(N+N')/N$ hat die Form $x+x'+N$ mit $x \in N$ und $x' \in N'$. Wegen $x+x'+N = x'+N = f(x)$ liegt es im Bild. $\square$

Noethersche Moduln

Definition 2.6. *Sei A ein Ring, M ein A-Modul. M heißt* noethersch, *wenn jede Kette von Untermoduln von M*

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M$$

stationär wird, d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $M_i = M_{i+1}$ für alle $i \geq n$.

Lemma 2.7. *Ein Modul ist genau dann noethersch, wenn jeder Untermodul endlich erzeugt ist. Ein Ring ist noethersch, wenn er noethersch ist als Modul über sich selbst.*

Beweis: Sei A ein Ring, M ein A-Modul, $N \subset M$ ein Untermodul. Angenommen, N ist *nicht* endlich erzeugt. Wir konstruieren eine Folge von Elementen $x_1, x_2, \dots \in N$ mit

$$\langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subsetneq \dots$$

Sei $x_1 \in N$ beliebig. Angenommen, wir haben $x_1, \dots, x_n$ konstruiert. Da N nicht endlich erzeugt ist, gilt $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \neq N$. Wir wählen $x_{n+1} \in N \smallsetminus \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Dies hat die gewünschte Eigenschaft. Die Folge von Untermoduln wird nicht stabil, also ist M nicht noethersch.
Sei umgekehrt jeder Untermodul von M endlich erzeugt. Wir betrachten eine Folge von Untermoduln

$$N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \dots$$

Es sei $N = \bigcup_i N_i$.

Behauptung. *N ist ein Untermodul.*

Seien $x, y \in N$, $a, b \in A$. Nach Voraussetzung ist $x \in N_i$ und $y \in N_j$ für geeignete i, j. Ohne Einschränkung ist $i \geq j$. Nach Voraussetzung ist $N_j \subset N_i$, also $x, y \in N_i$. Da N_i ein Untermodul ist, gilt $ax + by \in N_i \subset N$.
Nach Voraussetzung ist N endlich erzeugt. Seien $x_1, \dots, x_m$ Erzeuger. Jedes x_i liegt in einem N_{k_i}. Sei $k = \max_i k_i$. Dann liegen alle x_i in N_k. Dies bedeutet

$$N = \langle x_1, \dots, x_m \rangle \subset N_k \subset N_{k'} \subset N$$

also Gleichheit für alle $k' \geq k$.
Sei nun A ein noetherscher Ring. Nach Definition sind alle Ideale, also alle Untermoduln von A endlich erzeugt. Nach der ersten Hälfte des Lemmas ist A nothersch als A-Modul. Ebenso folgt die Umkehrung. □

Es gibt eigentlich nur eine Rechenregel für noethersche Moduln. Um die zu formulieren, führen wir die Sprache der exakten Sequenzen und kommutativen Diagramme ein. Wenn man sich daran gewöhnt hat, ist es eine sehr effiziente Art der Buchhaltung.

Definition 2.8. *Eine (endliche oder unendliche) Folge von Modulhomomorphismen*

$$N_1 \xrightarrow{f_1} N_2 \xrightarrow{f_2} N_3 \to \dots \to N_n$$

heißt exakt*, falls für $1 < i < n$ gilt*

$$\operatorname{Im}(f_{i-1}) = \operatorname{Ker}(f_i)$$

Beispiel. (i) $0 \to N_1 \xrightarrow{f} N_2$ ist genau dann exakt, wenn f injektiv ist: Das Bild der Nullabbildung ist der Nullmodul, also lautet die Bedingung $0 = \operatorname{Ker}(f)$.

(ii) $M_1 \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ ist genau dann exakt, wenn g surjektiv ist: Der Kern der Nullabbildung ist ganz M_2, also lautet die Bedingung $\operatorname{Im}(g) = M_2$.

(iii) $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ ist genau dann exakt, wenn g surjektiv ist mit Kern gleich $\mathrm{Im}(f) \cong M_3$. Solche exakten Sequenzen heißen *kurze exakte Sequenz.*

Definition 2.9. *Ein Diagram von A-Moduln*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] & M_2 \\ N_1 \arrow[u, "g_1"] \arrow[r, "f_2"'] & N_2 \arrow[u, "g_2"'] \end{tikzcd}$$

heißt kommutativ*, wenn* $f_1 g_1 = g_2 f_2$.

Lemma 2.10. *Sei A ein Ring,*

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von A-Moduln. Dann ist M_2 *genau dann noethersch, wenn* M_1 *und* M_3 *noethersch sind.*

Beweis: Sei M_2 noethersch.

Behauptung. M_1 *ist noethersch.*

M_1 ist ein Untermodul von M_2. Alle Untermoduln von M_1 sind auch Untermoduln von M_2, also endlich erzeugt.

Behauptung. M_3 *ist noethersch.*

Sei $\pi : M_2 \to M_3$ die surjektive Abbildung. Gegeben sei eine Folge

$$N_1 \subset N_2 \subset \dots$$

von Untermoduln von M_3. Wir betrachten die Urbildfolge

$$\pi^{-1} N_1 \subset \pi^{-1} N_2 \subset \dots$$

von Untermoduln von M_2. Da M_2 noethersch ist, wird die Folge stabil. Wegen $N_i \cong \pi^{-1} N_i / M_1$ (Homomorphiesatz) ist dann auch die Ausgangsfolge stabil.

Seien nun M_1, M_3 beide noethersch. Wir betrachten eine Folge

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots$$

von Untermoduln von M_2.

Behauptung. *Die Folge wird stabil.*

Zu jedem X_i gehört eine kurze exakte Sequenz (Homomorphiesatz)

$$0 \to X_i \cap M_1 \to X_i \to \pi(X_i) \to 0$$

Die Folge der $X_i \cap M_1$ wird stabil, da M_1 noethersch. Die Folge $\pi(X_i)$ wird stabil, da M_3 noethersch. Für genügend großes i haben wir die Sitatution

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X_{i+1} \cap M_1 \arrow[r] & X_{i+1} \arrow[r] & \pi(X_{i+1}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_i \cap M_1 \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & X_i \arrow[r] \arrow[u, "\subset"'] & \pi(X_i) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"'] & 0
\end{tikzcd}$$

Wir wollen zeigen, dass $X_i \to X_{i+1}$ surjektiv ist. Sei also $x \in X_{i+1}$. Dann hat $\pi(x)$ ein Urbild in $\pi(X_i)$. Dieses hat wiederum ein Urbild $x' \in X_i$. Wir betrachten nun $y = x - x' \in X_{i+1}$. Es liegt nach Konstruktion im Kern von π, also im Bild von $X_{i+1} \cap M_1$. Nach Voraussetzung hat y dann ein Urbild in $X_i \cap M_1$, also erst recht in X_i. Wegen $x = x' + y$ haben wir ein Urbild für x gefunden. □

Korollar 2.11. *Sei A ein noetherscher Ring, M endlich erzeugter A-Modul. Dann ist M noethersch.*

Beweis: A ist noethersch als A-Modul. Durch wiederholtes Anwenden von Lemma 2.10 sehen wir, dass $A^n = A \oplus A \oplus A \dots A$ noethersch ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Seien $x_1, \dots, x_n$ Erzeuger von M. Dann definiert

$$A^n \to M \qquad (a_1, \dots, a_n) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

einen surjektiven Modulhomomorphismus. Nach Lemma 2.10 ist M noethersch. □

Leider kennen wir nur wenige noethersche Ringe. Das folgende Theorem ändert das ganz dramatisch.

Theorem 2.12 (Hilbertscher Basissatz)**.** *Sei A ein noetherscher Ring. Dann ist der Polynomring $A[X]$ noethersch.*

Beweis: Sei $I \subset A[X]$ ein Ideal. Wir suchen nach endlich vielen Erzeugern. Um zu verstehen, wie wir vorgehen müssen, erinnern wir uns an den Fall, dass $A = K$ ein Körper ist. Dann wissen wir ja, dass jedes Ideal von nur einem Element erzeugt wird. Wir finden den Erzeuger als ein Polynom minimalen Grades ungleich 0. Das jedes solches Element ein Erzeuger ist, wird mit Hilfe des euklidischen Algorithmuses (also Polynomdivision) gezeigt. Dies müssen wir variieren, da wir durch Koeffizienten nicht dividieren können. Daher:
Für jedes $n \geq 0$ sei $I_n \subset I \subset A[X]$ die Menge der Polynome in I vom Grad kleiner gleich n. Dies ist ein A-Modul. Sei

$$J_n = \{a \in A |\text{ es gibt } P \in I_n, P = aX^n + \dots\}$$

Dies ist ein Ideal von A, also endlich erzeugt. Wegen $XI_n \subset I_{n+1}$ gilt $J_n \subset J_{n+1}$. Da A noethersch ist, wird die Folge von Koeffizientenidealen

$$J_0 \subset J_1 \subset J_2 \dots$$

konstant. Sei d so, dass $J_n = J_d$ für alle $n \geq d$. Wir wählen für $n \leq d$ A-Erzeuger $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \dots, a_{r_n}^{(n)} \in J_n$. Wir wählen weiter $P_j^{(n)} \in I_n$ mit

$$P_j^{(n)} = a_j^{(n)} X^n + \dots$$

Behauptung. *Die $P_j^{(n)}$ für $n \leq d$, $j = 1, \dots, r_n$ erzeugen I.*

Sei $Q = bX^m + \dots$. Der Beweis wird durch Induktion über m geführt. Sei zunächst $m \leq d$. Wir rechnen in I_m und J_m. Dann gibt es $c_1, \dots, c_{r_m} \in A$, so dass

$$b = \sum_{i=1}^{r_m} c_i a_i^{(m)}$$

Es folgt:

$$Q - \sum_{i=1}^{r_m} c_i P_i^{(m)}$$

hat Grad echt kleiner als m. Nach Induktionsannahme wird es durch die Erzeuger ausgedrückt, daher gilt dasselbe auch für Q.
Sei nun $m \geq d$. Dann gibt es $c_1, \dots, c_{r_d} \in A$, so dass

$$b = \sum_{i=1}^{r_d} c_i a_i^{(d)}$$

Es folgt

$$Q - \sum_{i=1}^{r_d} c_i X^{m-d} P_i^{(d)}$$

hat Grad echt kleiner als m. Wieder sind wir nach Induktionsannahme fertig.
Der Induktionsanfang ist übrigens für $I_{-1} = 0$ □

Korollar 2.13. *Sei $A = \mathbb{Z}$ oder $A = K$ ein Körper. Dann ist $A[X_1, \dots, X_n]$ noethersch.*

Beweis: Induktion. □

Hieraus werden noch viel mehr Beispiele.

Definition 2.14. *Sei $A \to B$ ein Ringhomomorphismus. B heißt* endlich erzeugte A-Algebra*, wenn es Elemente $b_1, \dots, b_n \in B$ gibt, so dass jedes Element $b \in B$ geschrieben werden kann als*

$$b = \sum_{\underline{i} \in \mathbb{N}^n} a_{\underline{i}} b_1^{i_1} b_2^{i_2} \dots b_n^{i_n} \qquad a_{\underline{i}} \in A, \text{ fast alle } 0$$

(mit Multiindizes $\underline{i} = (i_1, \dots, i_n)$).

Mit anderen Worten, es gibt einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$A[X_1, \ldots, X_n] \to B \qquad X_i \mapsto b_i$$

Korollar 2.15. *Sei A ein noetherscher Ring, B endlich erzeugte A-Algebra. Dann ist B noethersch.*

Beweis: Hilbertscher Basissatz und Lemma 2.2 $\square$

Und damit endlich:

Korollar 2.16. *Sei k algebraisch abgeschlossener Körper, $V \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge über k. Dann ist $\mathcal{O}(V)$ noethersch. Jede algebraische Menge wird durch endlich viele Gleichungen definiert. Sie ist Schnitt von endlich vielen Hyperflächen.*

Beweis: Der Ring $\mathcal{O}(V) \cong k[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$ ist endlich erzeugte k-Algebra, also noethersch. Als Ideal in einem noetherschen Ring ist $I(V)$ endlich erzeugt,

$$I(V) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$$

und offensichtlich

$$V \overset{1.12}{=} V(I(V)) = V(f_1, \ldots, f_m) = \bigcap_{i=1}^{m} V(f_i)$$

$\square$

Es ist sehr schwer anzugeben oder zu charakterisieren, wieviele Gleichungen benötigt werden. Man benötigt wenigsten $n - \dim(V)$-viele (das werden wir zeigen). Das ist auch der sogenannte generische Fall, den man für zufällige Gleichungen erwarten kann. Der allgemeine Fall ist jedoch offen!

Kapitel 3

Quasi-projektive Varietäten

Wir verallgemeinern den Varietätenbegriff.

Definition 3.1. *Sei K ein Körper. Der* projektive Raum $\mathbb{P}^n(K)$ der Dimension n über K *ist die Menge der eindimensionalen Untervektorräume des K^{n+1}, d.h. die Menge der Äquivalenzklassen*

$$\mathbb{P}^n(K) = (K^{n+1} \smallsetminus \{0\})/\sim$$

wobei $(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n)$ falls es $\lambda \in K^*$ gibt mit $x_i = \lambda y_i$ für $0 \le i \le n$. Wir schreiben $[x_0 : \dots : x_n]$ für die Äquivalenzklasse von $(x_0, \dots, x_n)$. Wir nennen $x_0, \dots, x_n$ homogene Koordinaten *auf $\mathbb{P}^n(K)$.*
Für $i = 0, \dots, n$ heißt die Teilmenge

$$U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \mid x_i \neq 0\}$$

i-te standardaffine Karte.

Lemma 3.2. *(i) Auf U_i sind die Funktionen $y_j = x_j/x_i$ wohldefiniert und induzieren eine Bijektion*

$$\phi_i : U_i \to K^n \qquad [x_0 : \dots : x_n] \mapsto (y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

(ii) Es gilt $\mathbb{P}^n(K) \smallsetminus U_i \cong \mathbb{P}^{n-1}(K)$ (Weglassen der i-ten Koordinate).

(iii) $\mathbb{P}^n(K) = \bigcup_{i=0}^n U_i$

Beweis: Auf U_i darf durch x_i geteilt werden. Wegen $\lambda x_j/\lambda x_i = x_j/x_i$ ist y_j unabhängig von der Wahl des Respräsentanten. Die Abbildung

$$\psi_i : K^n \to \mathbb{P}^n(K) \qquad (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n) \mapsto [a_0 : \dots : a_{i-1} : 1 : a_{i+1} : \dots, a_n]$$

hat Werte in U_i. Offensichtlich sind ϕ_i und ψ_i invers zueinander.
Das Komplement von U_i besteht aus Punkten mit $x_i = 0$. Nach Voraussetzung hat jeder Punkt des $\mathbb{P}^n(K)$ eine Koordinate ungleich 0, liegt also in einem U_i. $\square$

Wir fassen ab sofort K^n via ϕ_0 als Teilmenge des $\mathbb{P}^n(K)$ auf.

Beispiel. Für $n = 0$ besteht $\mathbb{P}^n(K)$ aus genau einem Punkt. Für $n = 1$ ist $\mathbb{P}^1(K) = K \cup \{\infty\}$.

Wir wollen nun algebraische Teilmengen als Nullstellenmengen von Polynomen definieren. Der Funktionswert eines Polynoms ist jedoch *nicht* wohldefiniert, da die homogenen Koordinaten nicht wohldefiniert sind.

Definition 3.3. *Ein Polynom $P \in K[X_0, \dots, X_n]$ heißt* homogen vom Grad d, *wenn es von der Form*

$$P = \sum_{d_0+\cdots+d_n=d} a_{d_0,\dots,d_n} X_0^{d_0} \dots X_n^{d_n}$$

ist.

Lemma 3.4. *Sei f ein homogenes Polynom vom Grad d, $x = (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1}$, $\lambda \in K^*$. Dann gilt*

$$f(\lambda x) = \lambda^d f(x)$$

Für homogene Polynome ist also der Funktionswert auf dem projektiven Raum nicht wohldefiniert, wohl aber die Eigenschaft zu verschwinden.
Ist f ein beliebiges Polynom, so schreiben wir es als $f = \sum_{d=0}^m f_d$, wobei die f_d homogen vom Grad d sind.

Definition 3.5. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper, $S \subset k[X_0, \dots, X_n]$ eine Menge von Polynomen. Dann heißt*

$$V(S) = \{P \in \mathbb{P}^n(k) | f(P) = 0 \text{ für alle homogenen } \ f \in S\}$$

durch S definierte projektive algebraische Menge.
Sei $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ eine algebraische Menge. Dann heißt

$$I(V) = \{f = \sum_d f_d \in k[X_0, \dots, X_n] | f_d(P) = 0 \text{ für alle } P \in V, d \geq 0\}$$

Verschwindungsideal von V *und*

$$S[V] = k[X_0, \dots, X_n]/I(V)$$

homogener Koordinatenring von V*.*

Beispiel. Sei $n = 2$. Für die projektive Ebene benutzt man meist die Koordinaten $X = X_1, Y = X_2, Z = X_0$. Sei $f = X^2 + Y^2 + Z^2$. Um $V = V(f)$ zu verstehen, schneiden wir mit den standardaffinen Teilmengen. Es gilt

$$V \cap U_0 = \{[x : y : z] | z \neq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \cong \{(x, y) | x^2 + y^2 = -1\}$$

und analog in den beiden anderen Karten. In $V(Z) = \mathbb{P}^n(k) \smallsetminus U_0$ liegen die Punkte

$$\{[x : y : 0] | x^2 + y^2 = 0\} = \{[1 : \sqrt{-1} : 0], -[1 : \sqrt{-1} : 0]\}$$

Es gilt dann $I(V) = \langle X^2 + Y^2 + Z^2 \rangle$ (Übungsaufgabe). Nicht alle Elemente von $I(V)$ sind homogen, sondern nur die der Form gf mit homogenem g. Nach Definition ist dann $V(I(V)) = V$.

Graduierte Ringe

Definition 3.6. *(i) Sei A ein Ring. Eine* graduierte A-Algebra *ist eine direkte Summe*

$$S = \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d$$

von A-Moduln zusammen mit einer Multiplikationsabbildung

$$\mu : S \times S \to S$$

mit $\mu(S_n, S_m) \subset S_{n+m}$, die S zu einer A-Algebra macht.

(ii) Ein homogenes Ideal *I von S ist ein graduierter Untermodul von S, d.h.*

$$I = \bigoplus_{d=0}^{\infty} (I \cap S_d).$$

Beispiel. Sei $A = K$ ein Körper. Dann ist $K[X_0, \dots, X_n]$ ein graduierter Ring mit $K[X_0, \dots, X_n]_d$ der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad d.

Lemma 3.7. *Ist $V \subset \mathbb{P}^n_k$ algebraisch, so ist $I(V)$ ein graduiertes Ideal.*

Beweis: Wir erinnern uns:

$$I(V) = \left\{ \sum f_d | f_d(V) = 0 \right\}$$

Die Menge ist abgeschlossen unter Addition und Multiplikation mit homogenen Polynomen. Da jedes Polynom Summe von homogenen Polynomen ist, ist $I(V)$ ein Ideal.
Sei $f_d \in I(V)$ homogen vom Grad d, $s_m \in k[X_0, \dots, X_n]_m$ homogen vom Grad m. Dann ist $s_m f_d$ homogen vom Grad $m + d$. Damit ist $I(V)$ ein homogenes Ideal. □

Lemma 3.8. *Sei S graduierter Ring, $I \subset S$ homogenes Ideal. Dann ist*

$$S/I \cong \bigoplus_{d=0}^{\infty} S_d/I_d$$

wieder graduiert.

Beweis: Wir betrachten die offensichtliche Abbildung von rechts nach links. Sie ist offensichtlich surjektiv.
Sei $s = \sum_{d=0}^{n} s_d$ im Kern, d.h. $s \in I$. Dann gilt $s_d \in I_d$ für alle d, da I ein homogenes Ideal ist. Die Abbildung ist auch injektiv. □

Korollar 3.9. *Sei $V \subset \mathbb{P}^n$ projektiv. Der* homogene Koordinatenring *$S(V) = k[X_0, \dots, X_n]/I(V)$ ist eine graduierte k-Algbra.*

Bemerkung. S soll an die symmetrische Algebra erinnern, denn

$$k[X_0, \dots, X_n] \cong \mathrm{Sym}^* V$$

wobei V ein k-Vektorraum der Dimension $n + 1$.

Die Zariski-Topologie

Lemma 3.10. *Sei V eine projektive algebraische Menge. Wir nennen eine Teilmenge $Z \subset V$ abgeschlossen, wenn sie algebraisch ist. Dies definiert eine Topologie auf V.*

Beweis: Wie im affinen Fall. Es geht nur ein, dass das Produkt von zwei homogenen Polynomen homogen ist. □

Definition 3.11. *Sei $\mathbb{P}^n_k$ der projektive Raum $\mathbb{P}^n(k)$ zusammen mit seiner Topologie. Eine* projektive Varietät *ist eine projektive algbraische Menge zusammen mit ihrer Topologie. Eine* quasi-projektive Varietät *ist eine offene Teilmenge einer projektiven Varietät mit der induzierten Topologie.*

Wegen $U_i = \mathbb{P}^n_k \smallsetminus V(X_i)$ sind die standard-affinen Teilmengen offen.

Lemma 3.12. *Die Kartenabbildung $\phi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$ ist ein Homöomorphismus, d.h. bijektiv, stetig und offen.*

Beweis: Ohne Einschränkung betrachten wir $i = 0$. Die Bijektivität haben wir schon überprüft.
Wir zeigen, dass ϕ_0 eine Bijektion der Mengen von abgeschlossenen Teilmengen von U_0 und $\mathbb{A}^n$ induziert.
Sei $F \in k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom, $V = V(F) \subset \mathbb{P}^n_k$. Dann gilt

$$V \cap U_0 = \{[1 : x_1 : \dots, x_n] : F(1, x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

Das Bild dieser Abbildung unter ϕ_0 ist also $V(f)$ mit $f = F(1, X_1, \dots, X_n)$. Also sind Bilder abgeschlossener Teilmengen von U_0 abgeschlossen.
Sei umgekehrt $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom vom Grad d. Sei F die Homogenisierung von f, d.h.

$$F = X_0^d f(X_1/X_0, \dots, X_n/X_0)$$

Dann ist

$$V(F) \cap U_0 = \{[1 : x_1 : \dots : x_n] | 1^d f(x_1, \dots, x_n) = 0\}$$

das gesuchte Urbild von $V(f)$, also abgeschlossen in U_0. □

Beispiel. Sei $n = 2$, $f = X^2 + 2XY + Y + 2$, $V(f) \subset \mathbb{A}^2$. Dies ist ein Polynom vom Grad $d = 2$. Seine Homogenisierung ist

$$F = Z^2 f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = Z^2\left(\frac{X^2}{Z^2} + 2\frac{X}{Z}\frac{Y}{Z} + \frac{Y}{Z} + 2\right) = X^2 + 2XY + YZ + 2Z^2\ ,$$

d.h. alle Monome von f werden mit Z-Faktoren aufgefüllt zum Grad 2.

Bemerkung. Die beiden Operationen "Einsetzen von $X_0 = 1$" und "Homogenisieren eines Polymons in den Variablen $X_1, \dots, X_n$" definieren eine Bijektion zwischen homogenen Polynomen in $X_0, \dots, X_n$, die nicht durch X_0 teilbar sind und Elementen von $k[X_1, \dots, X_n]$. Geometrisch entspricht dem eine Bijektion zwischen algebraischen Teilmengen des $\mathbb{P}^n_k$ und denjenigen algebraischen Teilmengen des $\mathbb{A}^{n+1}$, die mit einem Punkt auch die Nullpunksgerade durch diesen Punkt enthalten.

Wir können also den projektiven Raum (und alle projektiven Varietäten) mit affinen Karten überdecken. Der Schnitt $U_i \cap U_j = \{[x_0 : \cdots : x_n] | x_i, x_j \neq 0\}$ wird unter der Kartenabbildung ϕ_i abgebildet auf die Menge der Punkte mit $y_j \neq 0$, also die standardoffene Menge U_{y_j}. Die Kartenwechselabbildung

$$\phi_j \phi_i^{-1} : U_{y_j} \to U_{y_i}$$

kann leicht berechnet werden. Wir geben die Formel an im Fall $i = 0, j = 1$.

$$\begin{aligned}(y_1, \ldots, y_n) \mapsto [1 : y_1 : \cdots : y_n] = [1/y_1 : 1 : y_2/y_1 : \ldots y_n/y_1] \\ \mapsto (1/y_1, y_2/y_1, \ldots, y_n/y_n)\end{aligned}$$

Jeder Eintrag ist eine algebraische Funktion auf U_{y_1}.

Bemerkung. Quasi-affine Varietäten sind quasi-projektiv.

Offene Überdeckungen

Definition 3.13. *Sei V eine affine oder projektive Varietät. Dann heißen offene Menge der Form*

$$U_f = V \smallsetminus V(f)$$

für $f \in k[V]$ bzw. für homogenes $f \in S[V]$ standardoffene Mengen *in V.*

Bemerkung. Wir haben bisher nur $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ für $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ definiert. In der Definition ist $f \in k[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$. Das ist aber ein harmloser Unterschied. Es hat ein Urbild $\tilde{f} \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Es ist dann

$$V(f) = V(\tilde{f}) \cap V$$

und dies ist unabhängig von der Wahl von $\tilde{f}$. Mit anderen Worten:

$$V(f) = \{P \in V | f(P) = 0\}.$$

Lemma 3.14. *Sei V eine affine oder projektive Varietät.*

(i) Sei $A \subset V$ abgeschlossen. Dann ist

$$A = V(f_1, \ldots, f_n) = \bigcap_{i=1}^{n} V(f_i)$$

für $f_1, \ldots, f_n \in k[V]$ bzw. homogene $f_1, \ldots, f_n \in S[V]$.

(ii) $U \subset V$ offen. Dann ist U Vereinigung von endlich vielen standardoffenen Mengen.

(iii) Der Schnitt von endlich vielen standardoffenen Mengen ist standardoffen.

Insbesondere sind die standardoffenen Menge eine Basis für die Topologie.

Beweis: Wir beginnen im affinen Fall. Sei $A \subset V$ abgeschlossen. Nach Lemma 1.12 ist

$$A = V(I(V))$$

wobei $I(V) \subset k[V]$ das Verschwindungsideal. Da $k[V]$ noethersch ist, ist das Ideal endlich erzeugt. Seien $f_1, \dots, f_n$ die Erzeuger. Dann ist

$$V(I(V)) = V(\langle f_1, \dots, f_n \rangle) = V(f_1, \dots, f_n).$$

Im projektiven Fall ist $I(V) \subset S[V]$ ebenfalls endlich erzeugt. Da das Ideal homogen ist, enthält es mit jedem Element seine endlich vielen homogenen Komponenten.
Sei $U = V \smallsetminus A$ offen. Nach dem ersten Teil gilt

$$A = \bigcap_{f \in S} V(f) \Rightarrow U = V \smallsetminus V(S) = \bigcup_{f \in S} (V \smallsetminus V(f)) = \bigcup_{f \in S} U_f.$$

Sind U_f und U_g standardoffen, so ist

$$U_f \cap U_g = (V \smallsetminus V(f)) \cap (V \smallsetminus V(g)) = V \smallsetminus (V(f) \cup V(g)) = V \smallsetminus V(fg) = U_{fg}.$$

□

Definition 3.15. *Ein topologischer Raum heißt* noethersch*, wenn jede absteigende Kette*

$$Y_1 \supset Y_2 \supset \dots$$

von abgeschlossenen Teilmengen stabil wird.

Beispiel. Affine und projektive Varietäten sind noethersch, denn Ketten von Varietäten definieren aufsteigende Ketten von Verschwindungsidealen im Koordinatenring, der noethersch ist.

Lemma 3.16. *Sei Y noetherscher topologischer Raum und $X \subset Y$ offen. Dann ist X noetherscher topologischer Raum.*

Beweis: Wir betrachten eine Folge

$$X_1 \supset X_2 \supset \dots$$

von abgeschlossenen Teilmenge von X. Nach Definition ist die Folge der Abschlüsse

$$\overline{X}_1 \supset \overline{X}_2 \supset$$

eine Folge von abgeschlossenen Teilmengen von Y. Da Y noethersch ist, wird sie stabil. Wegen $X \cap \overline{X}_i = X_i$ ist dann auch die Ausgangsfolge stabil. □

Lemma 3.17. *Sei Y noetherscher topologischer Raum, $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung, d.h $U_i \subset Y$ offen*

$$Y = \bigcup_{i \in I} U_i$$

Dann existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}\}$, d.h. endliche viele $i_1, \ldots, i_n \in I$ mit

$$Y = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$$

Bemerkung. Topologische Räume mit dieser Eigenschaft heißen *quasi-kompakt* (oder auch kompakt, je nach Quelle). Ein topologischer Raum ist kompakt, wenn er quasi-kompakt und hausdorff ist. Da Varietäten (fast) nie hausdorff sind, interessiert uns Quasikompaktheit.

Beweis: Angenommen, Y hat keine endliche Teilüberdeckung. Dann konstruieren wir induktiv eine Folge U_{i_j} für $j \in \mathbb{N}$ so dass für $U'_{i_j} = \bigcup_{1 \leq j' \leq j} U_{i_j}$ gilt

$$U'_{i_1} \subsetneq U'_{i_2} \subsetneq U'_{i_3} \subsetneq$$

Sei nämlich i_1 beliebig. Da Y nicht von einem U_i überdeckt wird, gibt es $P \in Y \setminus U'_{i_1}$. Da die U_i ganz Y überdecken, gibt es einen Index i_2 mit $P \in U_{i_2}$. Da Y nicht von zwei offenen Mengen überdeckt wird, gibt es $Q \in Y \setminus U_{i_1} \cup U_{i_2}$ etc. Komplementär gibt es eine absteigende Folge

$$Z_1 \supsetneq Z_2 \supsetneq \ldots$$

von abgeschlossenen Mengen in Y. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass Y noethersch ist. □

Korollar 3.18. *Alle quasi-affinen und quasi-projektiven Varietäten sind quasi-kompakt.*

Beweis: Affine/projektive Varietäten sind noethersch. Nach Lemma 3.16 sind dann auch quasi-affine/quasi-projektive noethersch. Nach Lemma 3.17 sind sie quasi-kompakt. □

Inhaltsverzeichnis