Probeklausur

Lineare Algebra I
Wintersemester 2008/09

6. Februar 2009

- *Die Klausur Lineare Algebra I findet am Dienstag, den 31.03.2009, von 14:30 bis 17:30 Uhr in den Hörsälen Audimax und HS 2004 statt.* Finden Sie sich *rechtzeitig* vor den entsprechenden Hörsälen ein, die Klausur beginnt Punkt 14:30 Uhr. Bitte bringen Sie Ihren Studentenausweis oder einen anderen Lichtbildausweis mit.
- Informationen über die Zulassung zur Klausur werden in der Woche vom 16.-20. Februar zugänglich gemacht.
- Zur Vorbereitung auf die Klausur wird Herr Mathias Krieger in den Semesterferien eine Fragestunde anbieten. Diese Fragestunde findet Dienstags 11-13 Uhr im SR 404, Eckerstrasse 1, statt.
- Als Hilfsmittel ist zugelassen *ein Blatt DIN A4 handgeschriebene Formelsammlung*. Insbesondere sind keinerlei elektronischen Geräte (Taschenrechner, Mobiltelefone etc.) zugelassen.
- Bearbeitungszeit: 180 Minuten
- Alle Lösungen (ausser die Antworten im Multiple-Choice-Teil) sind vollständig zu begründen.
- Im Multiple-Choice-Teil wird *pro Aussage (z.B. 7.(a).C)* die folgende Anzahl von Punkten vergeben:

	angekreuzt	nicht angekreuzt
Aussage richtig	1	0
Aussage falsch	0	1

Aufgabe Nr.	Punktzahl	Davon erreicht
1	8	
2	8	
3	10	
4	8	
5	14	
6	4	
7	26	
Summe	78	

Rechenteil

1. Berechnen Sie Basen von Kern und Bild der linearen Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die durch die folgende Matrix gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[8 Punkte]

2. Invertieren Sie die folgende Matrix $A \in M_3(\mathbb{F}_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

[8 Punkte]

3. Berechnen Sie Eigenwerte der folgenden Matrix $A \in M_3(\mathbb{Q})$:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 6 \\ 3 & -8 & -6 \\ -6 & 16 & 12 \end{pmatrix}.$$

[10 Punkte]

Theorie-Teil

4. Sei k ein Körper, V, W seien endlich-dimensionale k-Vektorräume, $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie: Für jede lineare Abbildung $f : U \to W$ existiert eine lineare Abbildung $\phi : V \to W$, so dass $\phi(u) = f(u)$ für alle $u \in U$ gilt.

[8 Punkte]

5. Sei k ein Körper, und seien $A, B \in M_n(k)$. Zeigen Sie die folgende Formel:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & 0 \end{pmatrix} = (-1)^n (\det B)^2.$$

[14 Punkte]

6. Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \ker f$ und jedes $g \in G$ gilt: $gxg^{-1} \in \ker f$.

[4 Punkte]

Multiple Choice-Teil

Hinweis: Im folgenden Teil sollen die richtigen Antworten angekreuzt werden. Es können pro Frage mehrere Antworten richtig sein. Lesen Sie sich die möglichen Antworten *sehr sorgfältig* durch.

7. (a) Seien $n < m$ natürliche Zahlen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

   A. Jede lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist injektiv.

   B. Es gibt eine injektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

   C. Keine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist surjektiv.

   D. Es gibt eine surjektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

(b) Welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums $(\mathbb{F}_3^3)^*$ der Zeilenvektoren der Länge 3 sind Untervektorräume?

   A. $\{(0\,0\,0), (1\,0\,0), (2\,0\,0)\}$,

   B. $\{(x\,y\,z) \in (\mathbb{F}_3^3)^* \mid x^2 + y^2 = z^2\}$,

   C. $\{(x\,y\,z) \in (\mathbb{F}_3^3)^* \mid x + 2y - z = 1\}$,

   D. $\{(x\,y\,z) \in (\mathbb{F}_3^3)^* \mid x \neq y\}$.

(c) Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

   A. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2x - 3 \\ 4y - 5z \\ y \end{pmatrix}$,

   B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin^2 x + \cos^2 x$,

   C. $f : \mathbb{F}_3^2 \to \mathbb{F}_3^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^3 \\ 2y \\ x + y \end{pmatrix}$.

(d) Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem in m Gleichungen und n Variablen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

   A. Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau dann eine Lösung, wenn $n \geq m$ ist.

   B. Wenn $Ax = b$ keine Lösung hat, dann ist $n < m$.

   C. Das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat eine Lösung, wenn $n \geq m$ ist.

   D. Wenn $m = n$ ist und A nicht invertierbar ist, dann hat $Ax = b$ keine Lösung.

   E. Wenn $m = n$ und A invertierbar ist, dann hat $Ax = b$ genau eine Lösung.

(e) Sei k ein Körper, V ein k-Vektorraum, $(x_1, \dots, x_n)$ eine Familie von Vektoren. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zur Aussage, dass $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis ist?

A. Jeder Vektor in V lässt sich als k-Linearkombination der x_i schreiben. ☐

B. $(x_1, \dots, x_n)$ ist ein minimales Erzeugendensystem. ☐

C. $(x_1, \dots, x_n)$ ist ein maximales Erzeugendensystem. ☐

D. Die x_i sind k-linear unabhängig. ☐

E. Die lineare Abbildung $k^n \to V : e_i \mapsto x_i$ ist bijektiv. ☐

F. Die lineare Abbildung $V \to k^n : x_i \mapsto e_i$ ist bijektiv. ☐

G. Für jede lineare Abbildung $f : V \to k^n$ ist $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ eine Basis von k^n. ☐

(f) Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A. Ein injektiver Endomorphismus eines Vektorraums ist surjektiv. ☐

B. Eine surjektive lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen ist injektiv. ☐

C. Ein surjektiver Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist bijektiv. ☐

[26 Punkte]