Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"
WS 2008/09 Blatt 1

Ausgabe: 23.10.2008, **Abgabe:** 30.10.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws08/la.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 1.1: Sind die beiden folgenden logischen Formeln äquivalent?

- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,
- $p \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \Rightarrow q)$.

(2 Punkte)

Aufgabe 1.2: Seien A, B und C Mengen. Beweisen Sie:

- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(2 Punkte)

Aufgabe 1.3: Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 3x - 5y + z - 3t &= 10 \\ x + y + 2z + 4t &= 4 \\ x - y + z &= 3 \\ y + z + t &= 5. \end{aligned}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 1.4: Sei $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$ Ihre Matrikelnummer (im Dezimalsystem). Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems an:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 &= a_1 \\ a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 &= a_3 \\ a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 &= a_5 \\ a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 + a_7x_7 &= a_7 \end{aligned}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 1.5: Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, wenn $m > n$ ist.

(ii) Das Gleichungssystem ist lösbar, wenn $n > m$ ist.

Ein Gleichungssystem in der Form von Definition 1.3 im Skript heißt *homogen*, falls $b_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$ gilt. Wie verändern sich die Antworten, wenn das Gleichungssystem als homogen vorausgesetzt wird?

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 1.6: Wie viele dreistellige Zahlen (im Dezimalsystem) haben die folgenden beiden Eigenschaften? Geben Sie diese Zahlen an.

(i) Die Differenz beim Vertauschen der ersten beiden Ziffern ist zehnmal so groß wie die Differenz beim Vertauschen der letzten beiden Ziffern. (Ein Beispiel für diese Eigenschaft ist die Zahl 345.)

(ii) Die letzte Ziffer ist doppelt so groß wie die Differenz der ersten beiden Ziffern.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 1.7: Im Beweis von Lemma 1.6 wurde nur der Fall (iii) behandelt. Beweisen Sie Fall (i), indem Sie das Vertauschen zweier Gleichungen durch Addition des Vielfachens von Gleichungen aus Fall (iii) ausdrücken.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Anwesenheitsaufgaben für die zweite Woche

Aufgabe 1.8:

(i) Rufen Sie sich die logischen Verknüpfungen "und", "oder", die Negation in Erinnerung. Geben Sie die Wahrheitswertetabelle für die Implikation ("wenn A, dann B") an.

(ii) Kann man die Implikation durch die Verknüpfungen "und", "oder" bzw. die Negation ausdrücken?

(iii) Wie lauten die Negationen der folgenden Aussagen?

  (a) Es gibt keinen Fehler, der nicht schon mal gemacht worden wäre.

  (b) Ein Übungsblatt ist genau dann nicht lösbar, wenn nicht jeder Student mindestens eine Aufgabe bearbeiten kann.

  (c) Wenn man den Berg sieht, dann wird es regnen.

  (d) Wenn man den Berg nicht sieht, dann regnet es schon.

(iv) Wenn ein Viereck ein Quadrat ist, dann sind alle Seiten gleich lang. Ist ein Viereck mit gleichlangen Seiten schon ein Quadrat?

(v) Machen Sie sich den Bedeutungsunterschied der beiden folgenden Aussagen klar:

  (A) Für jede Zahl n gibt es eine Zahl m, so dass $m > n$ ist.

  (B) Es gibt eine Zahl m, so dass für jede Zahl n gilt $m > n$.

  Welche Implikationen $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ und $(\neg A) \Rightarrow B$ gelten?

Aufgabe 1.9:

(i) Was ist eine Menge? Wiederholen Sie die grundlegenden Notationen, $x \in X$, $A \subseteq B$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$. Was ist der Unterschied zwischen $x \in X$ und $\{x\} \subseteq X$? Wie viele Elemente hat die Menge $\{\{\emptyset\}, \{1, \{2, \{3\}, 4\}\}\}$?

(ii) Beweisen Sie die folgenden elementaren Aussagen der Mengenlehre:

  (a) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

  (b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(iii) Seien folgende Mengen gegeben:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 3 \nmid x\},\ B = \{x \in \mathbb{N} : \exists y (y^2 = x)\},\ C = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x \leq 26\}.$$

  Geben Sie die Mengen $A \cap B \cap C$, $(A \setminus B) \cap C$ und $(B \setminus A) \cap C$ an.