Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I" WS 2008/09 Blatt 11

Ausgabe: 15.01.2009, **Abgabe:** 22.01.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws08/la.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Ein aktueller Hinweis:
Studierende in den Bachelor-of-Science-Studiengängen Mathematik und Physik müssen sich online zu den Prüfungen in Analysis I und Linearer Algebra I anmelden. Der Anmeldezeitraum ist von Montag, den 12.01.2009, bis Sonntag, den 25.01.2009. Weitere Informationen finden Sie unter

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/pruefungsamt/Aushang-Pruefungsanmeldung-WS2008.pdf

---

Aufgabe 11.1: Sei k ein Körper. Wir betrachten die Abbildung $f : M_3(k) \to k$, die einer gegebenen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

den folgenden Wert zuordnet:

$$f(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Zeigen Sie, dass f eine multilineare alternierende Abbildung ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 11.2:

(i) Sei k ein beliebiger Körper, und $a, b, c \in k$. Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

(bitte wenden)

(ii) Seien $\theta, \phi, r \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} = r^2\sin\theta.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 11.3: Wir betrachten eine Matrix A in Blockdiagonalgestalt, wobei die A_i wieder quadratische Matrizen sind:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die folgende Formel gilt:

$$\det A = \det A_1 \cdot \cdots \cdot \det A_n.$$

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 11.4: Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Matrix $A_n = (a_{i,j,n})$, deren Einträge wie folgt gegeben sind:

$$a_{i,j,n} = \begin{cases} 1 & i = 1 \text{ oder } j = 1 \\ a_{i-1,j,n} + a_{i,j-1,n} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Matrizen sind quadratische Ausschnitte aus dem Pascalschen Dreieck, zum Beispiel ist

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\det A_n = 1$ für alle n gilt.

(6 Punkte)