Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"
WS 2008/09 Blatt 12

Ausgabe: 22.01.2009, **Abgabe:** 29.01.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws08/la.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Ein aktueller Hinweis:
Studierende in den Bachelor-of-Science-Studiengängen Mathematik und Physik müssen sich online zu den Prüfungen in Analysis I und Linearer Algebra I anmelden. Der Anmeldezeitraum ist von Montag, den 12.01.2009, bis Sonntag, den 25.01.2009. Weitere Informationen finden Sie unter

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/pruefungsamt/Aushang-Pruefungsanmeldung-WS2008.pdf

---

Aufgabe 12.1: Gegeben sei die folgende Matrix in $M_4(\mathbb{F}_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante $\det A$.

(4 Punkte)

Aufgabe 12.2: Gegeben sei die folgende Matrix A in $M_3(\mathbb{Q})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 12.3: Sei k ein Körper, $a, b, c \in k$ seien paarweise verschieden. Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 12.4: *Determinanten als Flächeninhalte:*
Gegeben seien zwei Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Fläche des Parallelograms, welches von v_1 und v_2 aufgespannt wird, gleich dem Betrag der Determinante der Matrix $A = (v_1\ v_2)$ ist, deren Spalten die gegebenen Vektoren sind. Interpretieren Sie das Vorzeichen der Determinante.

(4 Punkte)

Aufgabe 12.5: *Die Vandermonde-Determinante:*
Sei k ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in k$. Zeigen Sie

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j} (x_j - x_i).$$

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 12.6: Zeigen Sie, dass $SL_2(\mathbb{Z})$ von den folgenden Matrizen erzeugt wird:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)