Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I" WS 2008/09 Blatt 13

Ausgabe: 29.01.2009, **Abgabe:** 05.02.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws08/la.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Ein aktueller Hinweis:
Die Vorlesung am 03.02.2009 findet im Großen Hörsaal Chemie, im Chemie-Gebäude Albertstrasse 21, statt.

Aufgabe 13.1: Berechnen Sie die Eigenwerte der folgenden Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 13.2: Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix $A \in M_4(\mathbb{F}_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(8 Punkte)

Aufgabe 13.3:

(i) Sei k ein Körper, $A \in M_n(k)$. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.

(ii) Sei k ein Körper, $A \in M_n(k)$ eine nilpotente Matrix, d.h. es existiert ein $l \in \mathbb{N}$ mit $A^l = 0$. Zeigen Sie, dass 0 der einzige Eigenwert von A ist (hierfür ist auch zu zeigen, dass 0 wirklich ein Eigenwert ist).

(4 Punkte)

Aufgabe 13.4: Sei k ein Körper, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Wir definieren die Spur von f als

$$\operatorname{tr} f := \operatorname{tr} M_A^A(f),$$

wobei A eine Basis von V ist.
Zeigen Sie, dass die Spur des Endomorphismus f als Koeffizient des charakteristischen Polynoms auftritt. Folgern Sie, dass die obige Definition der Spur eines Endomorphismus unabhängig von der Wahl der Basis ist.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 13.5: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix in $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Erklären Sie anhand einer Skizze die Beziehung zwischen den Eigenvektoren und dem goldenen Schnitt.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 13.6: Sei k ein beliebiger Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $x_0, \ldots, x_n \in k$. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix $A \in M_{n+1}(k)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -x_n \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)