Übungen zur Vorlesung “Lineare Algebra I”
WS 2008/09 Blatt 2

Ausgabe: 30.10.2008, **Abgabe:** 06.11.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws08/la.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 2.1: Gegeben seien die folgenden Matrizen.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte mit höchstens drei Faktoren. Beachten Sie, dass die Matrizen dabei auch mehrfach als Faktoren auftreten können.

(7 Punkte)

Aufgabe 2.2: Geben Sie zwei quadratische Matrizen A und B an, so dass $AB - BA \neq 0$ gilt. Die Multiplikation von Matrizen ist also im allgemeinen nicht kommutativ.

(2 Punkte)

Aufgabe 2.3: Auf Seite 9 im Skript wurde die Determinante für (2×2)-Matrizen definiert. Seien A und B zwei (2×2)-Matrizen. Zeigen Sie

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2.4: Bringen Sie die folgende Matrix in Normalform, cf. Satz 1.16.

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & -7 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)

(bitte wenden)

Bonus-Aufgabe 2.5:
Die klassische Matrixdarstellung der Quaternionen.
Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie die folgenden Formeln:

$$I^2 = J^2 = K^2 = (-1)E_4, \qquad IJ = K = -JI.$$

(3 Punkte)

Bonus-Aufgabe 2.6:
Gegeben sei die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie M^n für beliebige natürliche Zahlen n.

(4 Punkte)