Übungen zur Vorlesung “Lineare Algebra I”
WS 2008/09   Blatt 3

Ausgabe: 06.11.2008, **Abgabe:** 13.11.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws08/la.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 3.1: Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für beliebige Elemente $x, y, z, u \in G$ gilt:

$$(x \cdot (((y^{-1} \cdot (x^{-1} \cdot z))^{-1} \cdot u) \cdot (y \cdot u)^{-1})^{-1}) = z.$$

Zeigen Sie, dass für beliebige Elemente $x, y, z \in G$ die folgende Gleichung erfüllt ist, falls G abelsch ist:

$$(x \cdot (y \cdot (z \cdot (x \cdot y^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}) = z.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3.2: Sei X eine nichtleere Menge. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}(X)$ die Menge aller Teilmengen von X. Für Teilmengen $A, B \subseteq X$ definieren wir mittels

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

die *symmetrische Differenz* von A und B. Zeigen Sie, dass das Tripel $(\mathfrak{P}(X), \triangle, \cap)$ ein Ring ist. Ist $\mathfrak{P}(X)$ mit dieser Ringstruktur ein Körper? Zeigen Sie, dass $\mathfrak{P}(X)$ ein Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 3.3: Sei k ein Körper. Analog zur Definition 2.6 im Skript definieren wir auf der Menge

$$k[i] := \{(x, y) \mid x, y \in k\}$$

die Addition

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ für alle } x, x', y, y' \in k$$

und die Multiplikation

$$(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y) \text{ für alle } x, x', y, y' \in k.$$

(bitte wenden)

Zeigen Sie, dass $k[i]$ mit diesen Operationen ein Ring ist. Ist dieser Ring ein Körper für $k = \mathbb{F}_2$ bzw. $k = \mathbb{F}_3$?

(5 Punkte)

Aufgabe 3.4: Für eine gegebene (2×2)-Matrix X betrachten wir die folgenden neuen Matrizen:

(a) $A(X)$ erhält man aus X durch Vertauschen der beiden Zeilen.

(b) $B(X)$ erhält man aus X durch (Links-)Multiplikation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gibt es (2×2)-Matrizen $X, Y \in M_2(\mathbb{Q})$, so dass die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind?

(i) Die Summe von $B(X)$ und $A(Y)$ ist gleich der Einheitsmatrix.

(ii) Die Summe von $A(X)$ und $B(Y)$ ist gleich der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn ja, geben Sie sie an, wenn nein, beweisen Sie ihre Behauptung.

(5 Punkte)

Bonus-Aufgabe 3.5: Wir betrachten die folgende Matrix in $M_2(\mathbb{F}_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Matrizen, die Sie durch Addition und Multiplikation aus A erhalten können (das sind nur endlich viele). Die Menge, die die Nullmatrix und alle diese Matrizen enthält, bezeichnen wir mit N. Zeigen Sie, dass N mit Addition und Multiplikation von Matrizen ein Körper ist. Dies ist der Körper $\mathbb{F}_9$. Geben Sie Tabellen für Multiplikation und Addition in $\mathbb{F}_9$ an.

(6 Punkte)