Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"
WS 2008/09 Blatt 4

Ausgabe: 13.11.2008, **Abgabe:** 20.11.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws08/la.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Eine Nachricht der Fachschaft:
Liebe Erstis,
es ist wieder mal Zeit für die legendäre Mathe-Ersti-Hütte!!! Wir wollen ein tolles Wochenende mit euch verbringen und haben zu eurer (und natürlich unserer) Belustigung einige Spiele und Workshops vorbereitet. Keine Angst, auch für den LA1-Zettel haben wir Zeit eingeplant.

Wann? Freitag 05.12. bis Sonntag 07.12.2008.

Kosten? 20 EUR (zur Anmeldung mitbringen!)

Anmeldung? Am Donnerstag, den 20.11.2008, um 11.00 Uhr nach der Vorlesung!

Bei der Anmeldung müsst ihr angeben, ob ihr ein Semesterticket habt, oder ein eigenes Auto (wenn ja, mit wie vielen freien Plätzen) und ob ihr freundlicherweise einen Kuchen mitbringen würdet. Es gibt auch die Möglichkeit, auf die Hütte zu wandern oder mit dem Fahrrad zu fahren, bei Interesse bitte auch Bescheid sagen.

Alles Weitere erfahrt ihr bei der Anmeldung!

Aufgabe 4.1: Sei k ein Körper, sei V ein k-Vektorraum, und seien $U, W \subseteq V$ k-Untervektorräume. Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen k-Untervektorräume von V sind.

$$\alpha \cdot U = \{\alpha \cdot v \mid v \in U\}, \alpha \in k,$$

$$\alpha + U = \{\alpha + v \mid v \in U\}, \alpha \in V,$$

$$U \cap W,\ U \cup W,\ U + W = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in U, v_2 \in W\}.$$

Ist die Menge aller k-Untervektorräume eines gegebenen Vektorraums V mit der obigen Addition und Skalarmultiplikation wieder ein k-Vektorraum?

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 4.2: Sei k ein Körper. Sind die folgenden Mengen k-Untervektorräume von $M_2(k)$?

(i) (2×2)-Matrizen A mit $\det A = 0$.

(ii) (2×2)-Matrizen A mit $\operatorname{tr} A = 0$, wobei die Spur $\operatorname{tr} A$ die Summe der Diagonaleinträge ist: $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$.

(iii) symmetrische (2×2)-Matrizen, d.h. die Matrizen, für die $A^t = A$ gilt, wobei die transponierte Matrix A^t durch $(A^t)_{ij} = A_{ji}$ definiert ist.

(iv) orthogonale (2×2)-Matrizen A, d.h. die Matrizen, für die $A^t \cdot A = E_2$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.3: Sei V ein k-Vektorraum, $U \subseteq V$ ein k-Untervektorraum, und $v_i \in V$ für $i \in I$ ein Erzeugendensystem. Zeigen Sie, dass die Nebenklassen $\overline{v_i} = v_i + U$ ein Erzeugendensystem des Quotientenvektorraums V/U bilden.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.4: Wir betrachten die folgenden homogenen linearen Gleichungssysteme: Geben Sie jeweils endlich viele Lösungen an, aus denen sich alle Lösungen des entsprechenden Gleichungssystems durch Linearkombinationen erzeugen lassen.

(i)

$$\begin{aligned} 5x + 2y + z &= 0 \\ -2x + 3y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 4x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Bonus-Aufgabe 4.5: *Der Schiefkörper der Quaternionen*
Dies ist eine Fortsetzung von Bonus-Aufgabe 2.5, die Notation im folgenden bezieht sich auf Aufgabe 2.5.
Wir betrachten den von E_4, I, J und K aufgespannten Untervektorraum $\mathbb{H} = \langle E_4, I, J, K \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq M_4(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass dieser Vektorraum mit Addition und Multiplikation von Matrizen ein Ring ist. Ist dieser Ring kommutativ / unitär?
Zeigen Sie, dass $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper ist, dass also jedes Element $x \in \mathbb{H}$ mit $x \neq 0$ ein multiplikatives Inverses x^{-1} hat.
Hinweis: Auf $\mathbb{H}$ ist durch $x \mapsto x^t$ eine Konjugation definiert.

(5 Punkte)