Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"
WS 2008/09 Blatt 5

Ausgabe: 20.11.2008, **Abgabe:** 27.11.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws08/la.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 5.1: Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^4$. Sind die folgenden Vektoren linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5.2: Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sind die Elemente $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ und $h(x) = e^x$ linear abhängig in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

(3 Punkte)

Aufgabe 5.3: *Magische Quadrate*
Sei k ein beliebiger Körper, so dass $3 \neq 0$ in k. Ein prämagisches Quadrat ist ein Schema der Form

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

in dem die Zeilen-, Spalten-, und Diagonalsummen übereinstimmen. Dabei sollen die x_i Elemente des Körpers k sein. Sei V die Menge der prämagischen Quadrate, bei denen die Zeilen-, Spalten-, und Diagonalsummen jeweils 0 sind. Zeigen Sie, dass auf V eine k-Vektorraumstruktur definiert werden kann. Geben Sie eine Basis dieses Vektorraums an.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 5.4: Sei k ein Körper, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum, und $U \subseteq V$ ein k-Untervektorraum von V. Zeigen Sie:

(i) $\dim U \leq \dim V$.

(ii) $\dim V/U \leq \dim V$.

(iii) In (i) gilt $\dim U = \dim V$ genau dann, wenn $U = V$.

(iv) In (ii) gilt $\dim V/U = \dim V$ genau dann, wenn $U = 0$.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 5.5: *Variationen zur Quaternionen Aufgabe:* Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Für zwei Vektoren a und b ist das Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt) $a \times b$ wie folgt gegeben:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem können wir einem Vektor $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ ein Element $a_1 I + a_2 J + a_3 K \in \mathbb{H}$ der Quaternionen zuordnen. Zeigen Sie, dass das Vektorprodukt durch die Multiplikation von Quaternionen ausgedrückt werden kann.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 5.6: Wir betrachten noch einmal den $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathfrak{P}(X)$, wobei X eine endliche Menge ist. Geben Sie eine Basis von $\mathfrak{P}(X)$ an. Bestimmen Sie die Dimension von $\mathfrak{P}(X)$.

(4 Punkte)