Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"
WS 2008/09 Blatt 6

Ausgabe: 27.11.2008, **Abgabe:** 04.12.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws08/la.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Im Rahmen der Veranstaltungen des Mathematischen Instituts zum Jahr der Mathematik zeigt der aka-Filmclub

am Donnerstag, den 27.11.2008, um 20:00 Uhr

den Film "Moebius" (spanisch, Original mit Untertiteln). Die Vorführung findet im KG II, Hörsaal 2006 statt.

Aufgabe 6.1: Sind die folgenden Abbildungen linear?

(i) Wir identifizieren die Ebene mit dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$. Ist die Spiegelung an einer gegebenen Geraden in der Ebene eine lineare Abbildung? (Es genügt ein informelles Argument anhand einer Skizze.)

(ii) Ist die Abbildung $M_2(k) \to k : M \mapsto \det M$ linear?

(iii) Ist die Abbildung $M_n(k) \to k : M \mapsto \operatorname{tr} M = \sum_i m_{ii}$ linear?

(6 Punkte)

Aufgabe 6.2: Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$, die durch die folgende Matrix gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 8 & 4 & 12 & 4 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für diese lineare Abbildung die Dimensionen des Kerns und des Bildes.

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 6.3: Wir betrachten den Vektorraum der Matrizen $M_n(k)$ und eine gegebene Matrix $A \in M_n(k)$. Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung linear ist:

$$[-, A] : M_n(k) \to M_n(k) : B \mapsto [B, A] := BA - AB.$$

Untersuchen Sie für die spezielle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$$

Injektivität und Surjektivität der obigen Abbildung $[-, A]$ in Abhängigkeit von t.

(4 Punkte)

Aufgabe 6.4: Für eine gegebene natürliche Zahl n betrachten wir die Matrix in $M_n(\mathbb{Q})$ mit der folgenden Form:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die $(n \times n)$-Matrix mit der gegebenen Form der Rang der Matrix gleich n ist.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 6.5: Geben Sie einen Vektorraum V und einen echten Unterraum $U \subsetneq V$ an, so dass es einen Isomorphismus $U \to V$ gibt. Geben Sie einen solchen Isomorphismus an und beweisen Sie Ihre Behauptung.

(4 Punkte)