Übungen zur Vorlesung “Lineare Algebra I”
WS 2008/09 Blatt 7

Ausgabe: 04.12.2008, **Abgabe:** 11.12.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws08/la.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Im Rahmen der Veranstaltungen des Mathematischen Instituts zum Jahr der Mathematik zeigt der aka-Filmclub

am Donnerstag, den 04.12.2008, um 20:00 Uhr

den Film “Pi”. Die Vorführung findet im KG II, Hörsaal 2006, statt.

Aufgabe 7.1: Berechnen Sie für $n \geq 1$ die Dimension des Raums der $(n \times n)$-Matrizen, deren Spur 0 ist. Benutzen Sie dazu die Dimensionsformel.

(3 Punkte)

Aufgabe 7.2: Sei V ein k-Vektorraum, und $p : V \to V$ ein Projektor, d.h. eine lineare Abbildung, für die $p^2 = p$ gilt. Zeigen Sie, dass ein Isomorphismus

$$V \cong \ker p \oplus \operatorname{Im} p$$

existiert.

(5 Punkte)

Aufgabe 7.3: Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die durch die folgende Matrix gegeben ist:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass f ein Projektor ist, und bestimmen Sie Basen für $\ker f$ und $\operatorname{Im} f$. Geben Sie eine geometrische Interpretation der Abbildung f an.

(6 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 7.4: Es seien U_1 und U_2 Untervektoräume eines k-Vektorraums V. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\phi : U_1 \to (U_1 + U_2)/U_2 : u \mapsto u + U_2.$$

ist eine surjektive lineare Abbildung mit Kern $U_1 \cap U_2$. Folgern Sie aus dem Homomorphiesatz, dass es einen Isomorphismus

$$U_1/(U_1 \cap U_2) \cong (U_1 + U_2)/U_2$$

gibt.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 7.5: Sei M eine Menge. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$ mit einem $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{C})$ identifiziert werden kann. Zeigen Sie, dass es einen Isomorphismus

$$\mathrm{Abb}(M, \mathbb{C})/(\mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})) \to \mathrm{Abb}(M, \mathbb{R})$$

gibt.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 7.6: Wir betrachten noch einmal die Matrizen aus Aufgabe 6.4, diesmal jedoch als Matrizen in $M_n(\mathbb{F}_2)$ bzw. $M_n(\mathbb{F}_3)$. Wie ändert sich die Aussage?

(4 Punkte)