Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"
WS 2008/09 Blatt 8

Ausgabe: 11.12.2008, **Abgabe:** 18.12.2008

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws08/la.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Im Rahmen der Veranstaltungen des Mathematischen Instituts zum Jahr der Mathematik zeigt der aka-Filmclub die folgenden Filme:

- Donnerstag, den 11.12.2008, um 19:45 Uhr den Film "Der Beweis. Liebe zwischen Genie und Wahnsinn".
- Dienstag, den 16.12.2008, um 19:30 Uhr den Film "Wolfgang Doeblin. Ein Mathematiker wird wiederentdeckt."

  Bei dieser Vorführung werden die Regisseurin Fr. Agnes Handwerk sowie Prof. Dr. Marc Yor (Paris) anwesend sein und den Film kommentieren.

Die Vorführungen finden im KG II, Hörsaal 2006, statt.

Aufgabe 8.1: Sei k ein beliebiger Körper und V der k-Vektorraum der (2×2)-Matrizen mit Spur 0. Zeigen Sie, dass $A = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V ist, wobei die v_i wie folgt gegeben sind:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{und} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für eine beliebige (2×2)-Matrix

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

die lineare Abbildung

$$[-, X] : V \to V : Y \mapsto [Y, X] = YX - XY$$

wohldefiniert ist.
Geben Sie die darstellende Matrix $M_A^A([-, X])$ dieser Abbildung an.

(7 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 8.2: Wir betrachten die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die durch die folgende Matrix gegeben ist:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Basis $A = (v_1, v_2)$ von $\mathbb{R}^2$ an, so dass die gegebene Abbildung die folgende darstellende Matrix hat:

$$M_A^A(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 8.3: Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit der Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die duale Basis an.

(5 Punkte)

Bonus-Aufgabe 8.4: Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$ev : V \to (V^*)^* : x \in V \mapsto \big((f \in V^*) \mapsto f(x) \in k\big)$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Abbildung ev ist linear.

(ii) Die Abbildung ev ist injektiv.

(iii) Die Abbildung ist ein Isomorphismus, falls V endlich-dimensional ist.

(6 Punkte)