Übungen zur Vorlesung
“Algebraische Zahlentheorie”
WS 2009/10 Blatt 2

Ausgabe: 29.10.2009, **Abgabe:** 05.11.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 2.1: Sei d eine quadratfreie Zahl. Geben Sie eine $\mathbb{Z}$-Basis für den Ganzheitsring $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$ an.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.2: Ist der Ring $\mathbb{Z}[t]/(t^2+4)$ ganz abgeschlossen? Begründen Sie durch Beweis oder Gegenbeispiel.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.3: Sei R ein Ring, G eine endliche Gruppe von Ringautomorphismen von R. Bezeichne

$$R^G = \{x \in R \mid \sigma(x) = x \text{ für alle } \sigma \in G\}$$

den Unterring der G-Invarianten von R. Zeigen Sie, daß der Ring R ganz über R^G ist.
Hinweis: Betrachten Sie für $x \in R$ das Polynom

$$p(t) = \prod_{\sigma \in G} (t - \sigma(x)).$$

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe Kommutative Algebra 2.4: Sei R ein Ring, M ein R-Modul. Zeigen Sie, daß die folgenden beiden Bedingungen äquivalent sind:

1. Jeder R-Untermodul $N \subseteq M$ ist endlich erzeugt.
2. Jede Kette $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ von R-Untermoduln von M wird stationär.

Ein solcher Modul heißt *noethersch*. Zeigen Sie, daß Untermoduln und Quotienten eines noetherschen Moduls wieder noethersch sind.

(6 Punkte)

Stichworte Kommutative Algebra: Moduln, Basen, freie Moduln, Rang, Untermoduln, Quotienten, Kern, Bild, Homomorphiesatz