

Übungen zur Vorlesung “Algebraische Zahlentheorie” WS 2009/10 Blatt 3

Ausgabe: 05.11.2009, Abgabe: 12.11.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html>

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 3.1: Sei θ eine Wurzel von $x^3 - 3x^2 + 3$. Berechnen Sie Norm und Spur von $\theta^2 - 2\theta$ in $\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.2: Wir betrachten das Polynom $x^3 + px + q$. Bestimmen Sie die Diskriminante $D(1, x, x^2)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.3: Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie: Wenn die Spurpaarung nicht entartet ist, dann ist L/K separabel.

(6 Punkte)

Aufgabe Kommutative Algebra 3.4: Formulieren Sie den Elementarteilersatz für Untergruppen von \mathbb{Z}^n nach Lang, Algebra (3. Ed.), Theorem III.7.8. Formulieren Sie den Algorithmus zur Konstruktion der Normalteiler und Normalteilerbasis nach dem dortigen Beweis.

Bestimmen Sie mit Hilfe dieses Algorithmus die Struktur (als abelsche Gruppe) des Quotienten von \mathbb{Z}^3 nach dem Bild des Homomorphismus

$$\mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3 : v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} v.$$

(4 Punkte)

Stichworte Kommutative Algebra: Hauptidealringe, euklidischer Algorithmus, Primfaktorzerlegung, Elementarteilersatz