Übungen zur Vorlesung
“Algebraische Zahlentheorie”
WS 2009/10 Blatt 4

Ausgabe: 12.11.2009, **Abgabe:** 19.11.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 4.1: Sie $K/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper, $x \in \mathcal{O}_K$. Zeigen Sie, daß x genau dann invertierbar in $\mathcal{O}_K$ ist, wenn gilt $N_{K/\mathbb{Q}}(x) = \pm 1$.
Bonus: Was können Sie über die Einheiten in $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ sagen?

(4 + x Punkte)

Aufgabe 4.2: Sei $K/\mathbb{Q}$ ein Zahlkörper vom Grad n, und $b_1, \ldots, b_n \in \mathcal{O}_K$ linear unabhängig über $\mathbb{Q}$. Bezeichne M die abelsche Untergruppe $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle_{\mathbb{Z}}$ von $\mathcal{O}_K$, und $m = [\mathcal{O}_K : M]$ den Index von M in $\mathcal{O}_K$. (Machen Sie sich klar, dass der Quotient $\mathcal{O}_K/M$ wirklich endlich ist.) Sei ausserdem $a_1, \ldots, a_n$ eine Basis von $\mathcal{O}_K$. Dann gilt $D(b_1, \ldots, b_n) = m^2 D(a_1, \ldots, a_n)$.
Hinweis: Elementarteilersatz

(6 Punkte)

Aufgabe 4.3: Benutzen Sie Aufgabe 4.2, um eine Basis des Ganzheitsringes von $\mathbb{Q}(\theta)$ zu bestimmen, wobei θ eine Lösung der Gleichung $x^3 + 2x + 1 = 0$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe Kommutative Algebra 4.4: Sei L/K eine endliche algebraische Erweiterung. Zeigen Sie, daß es einen Zwischenkörper F gibt, so daß L/F rein inseparabel und F/K separabel ist.

(4 Punkte)

Stichworte Kommutative Algebra: Separabilitätsgrad, inseparable Erweiterungen.