Übungen zur Vorlesung
"Algebraische Zahlentheorie"
WS 2009/10 Blatt 8

Ausgabe: 10.12.2009, **Abgabe:** 17.12.2009

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws09/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 8.1: Sei $K = \mathbb{F}_q(t)$ wobei $q = p^n$.

(a) Zeigen Sie, daß $K/\mathbb{F}_p(t)$ eine Galois-Erweiterung ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathcal{O}_K = \mathbb{F}_q[t]$ ist.

(c) Zeigen Sie, daß die Erweiterung $\mathcal{O}_K/\mathbb{F}_p[t]$ unverzweigt ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 8.2:

(a) Zeigen Sie, dass in $\mathbb{F}_q$ eine primitive p-te Einheitswurzel existiert genau dann, wenn $q \equiv 1 \mod p$.

(b) Sei (q) ein Primideal von $\mathbb{Z}$, n eine natürliche Zahl mit $q \nmid n$. Die Primidealfaktorisierung von (q) in $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\zeta_n)}$ sei

$$(q) = \prod_{i=1}^{g} \mathfrak{p}_i^{e_i}.$$

Benutzen Sie Teil (a), um g, e_i und f_i in Abhängigkeit von q zu bestimmen.

(c) Wie viele Primfaktoren hat (71) in $\mathbb{Q}(\zeta_{20})$? Für welche n ist (59) zerlegt in $\mathbb{Q}(\zeta_n)$?

(8 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe Kommutative Algebra 8.3: Sei A ein Ring. Eine Sequenz von A-Modul-Homomorphismen

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \cdots$$

heißt *exakt*, wenn $\ker f_{i+1} = \operatorname{Im} f_i$ für alle i gilt.
Sei M ein A-Modul und $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $M \times S$ durch $(m, s) \sim (m', s')$ genau dann wenn ein $s'' \in S$ existiert, so dass gilt $s''(s'm - sm') = 0$.
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Menge $S^{-1}M$ der Äquivalenzklassen bildet einen A-Modul.

(ii) Die Lokalisierung von Moduln bewahrt exakte Sequenzen, d.h. für jede exakte Sequenz von A-Moduln

$$\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \cdots$$

ist auch die entsprechend lokalisierte Sequenz

$$\cdots \to S^{-1}M_{i-1} \xrightarrow{S^{-1}f_i} S^{-1}M_i \xrightarrow{S^{-1}f_{i+1}} S^{-1}M_{i+1} \to \cdots$$

wieder exakt.

(8 Punkte)

Stichworte Kommutative Algebra: Lokalisierung, allgemeiner Fall