# Übungen zur Vorlesung
# “Arithmetische Geometrie”
# WS 2010/11  Blatt 2

**Ausgabe:** 27.10.2010, **Abgabe:** 03.11.2010

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws10/arithmie.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

---

**Aufgabe 2.1:** Sei $X$ eine algebraische Varietät. Zeigen Sie, daß die Zuordnung $U \mapsto \mathcal{O}(U)$, die einer offenen Teilmenge $U$ die auf $U$ definierten regulären Funktionen $U \to \mathbb{A}^1$ zuordnet, eine Garbe ist.

(4 Punkte)

**Aufgabe 2.2:** Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben auf einem topologischen Raum $X$. Zeigen Sie, daß der Prägarbenkern von $f$

$$(\ker f)(U) := \ker(f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

bereits eine Garbe ist. Zeigen Sie, daß $\ker f$ in der Kategorie der Garben die folgende universelle Eigenschaft hat: Für jede Garbe $\mathcal{H}$ und jeden Morphismus $g : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ mit $f \circ g = 0$ gibt es einen eindeutigen Morphismus $h : \mathcal{H} \to \ker f$, so daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[d, dotted, "h"'] \arrow[dr, "g"] & & \\ \ker f \arrow[r, "i"'] & \mathcal{F} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnet $i : \ker f \to \mathcal{F}$ die Inklusion als Untergarbe.

(6 Punkte)

**Aufgabe 2.3:** Geben Sie ein Beispiel eines Garbenhomomorphismus $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, bei dem der Prägarbenquotient

$$\mathcal{Q}(U) := \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$$

keine Garbe ist. Wie sieht in Ihrem Beispiel der Quotient in der Kategorie der Garben aus?

(6 Punkte)

(bitte wenden)

**Aufgabe 2.4:** (*) Sei $X$ ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf $X$. Wir definieren einen topologischen Raum, $\mathrm{Spé}(\mathcal{F})$, den éspace étalé zu $\mathcal{F}$. Als Menge setzen wir

$$\mathrm{Spé}(\mathcal{F}) = \bigcup_{p\in X} \mathcal{F}_p.$$

Es gibt eine natürliche Projektionsabbildung

$$\pi : \mathrm{Spé}(\mathcal{F}) \to X : s \in \mathcal{F}_p \mapsto p.$$

Für eine offene Menge $U \subseteq X$ und einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$ erhalten wir eine Abbildung

$$\overline{s} : U \to \mathrm{Spé}(\mathcal{F}) : p \mapsto s_p,$$

die einem Punkt $p$ den Keim des Schnitts $s$ im Punkt $p$ zuordnet. Es gilt $\pi \circ \overline{s} = \mathrm{id}$, d.h. $\overline{s}$ ist ein Schnitt von $\pi$.
Wir geben nun der Menge $\mathrm{Spé}(\mathcal{F})$ die gröbste Topologie, so daß für alle offenen Mengen $U \subseteq X$, alle Schnitte $s \in \mathcal{F}(U)$, die Abbildungen $\overline{s}$ stetig sind.
Zeigen Sie: Für jede offene Menge $U \subseteq X$ ist $\mathcal{F}^+(U)$ gleich der Menge aller stetigen Schnitte von $\pi$ über $U$, d.h. aller stetigen Abbildungen $s : U \to \mathrm{Spé}(\mathcal{F})$ mit $\pi \circ s = \mathrm{id}$.

(6 Punkte)