Übungen zur Vorlesung
“Arithmetische Geometrie”
WS 2010/11 Blatt 4

Ausgabe: 10.11.2010, **Abgabe:** 17.11.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws10/arithmie.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 4.1: Zeigen Sie: Ein topologischer Raum X ist genau dann hausdorffsch, wenn die Diagonalabbildung $\Delta : X \to X \times X$ abgeschlossen ist, d.h. abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen abbildet.

(4 Punkte)

Aufgabe 4.2: (a) Wie viele Punkte bzw. $\mathbb{F}_{p^n}$-wertige Punkte haben die folgenden Faserprodukte?

(i) $\operatorname{Spm} \mathbb{F}_{p^2} \times_{\operatorname{Spm} \mathbb{F}_p} \operatorname{Spm} \mathbb{F}_{p^2}$

(ii) $\operatorname{Spm} \mathbb{F}_{p^2} \times_{\operatorname{Spm} \mathbb{F}_p} \operatorname{Spm} \mathbb{F}_{p^3}$

(b) Sei k ein Körper. Für eine Abbildung von Prävarietäten $\phi : X \to Y$ und einen k-Punkt $y \in Y$ heißt das Faserprodukt $X \times_Y \{y\}$ die *Faser von ϕ über y*. Bestimmen Sie die Fasern der folgenden Abbildungen

(i) $\operatorname{Spm} k[U, V]/(UV - 1) \to \operatorname{Spm} k[U]$.

(ii) $\operatorname{Spm} k[U, V]/(U^2 + V^2) \to \operatorname{Spm} k[U]$.

(8 Punkte)

Aufgabe 4.3: Sei k ein Körper. Für eine gegebene natürliche Zahl $n \geq 1$ betrachten wir die folgende endlich erzeugte k-Algebra

$$R = k[X_{11}, \cdots, X_{nn}, T]/(T \cdot \det(X_{ij}) = 1).$$

Wir setzen $G = \operatorname{Spm}(R)$. Zeigen Sie, daß für alle kommutativen, endlich erzeugten k-Algebren A gilt

$$G(\operatorname{Spm} A) \cong GL_n(A).$$

(4 Punkte)

(bitte wenden)

Aufgabe 4.4: Sei X eine Prävarietät über einem Körper k. Wir bezeichnen mit k^{sep} den separablen Abschluß von k. Eine gewählte Inklusion $k \hookrightarrow k^{\mathrm{sep}}$ induziert eine Abbildung $X(k) \to X(k^{\mathrm{sep}})$. Außerdem operiert auf $X(k^{\mathrm{sep}})$ die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)$. Zeigen Sie, daß die obige Abbildung eine Bijektion

$$X(k) \cong X(k^{\mathrm{sep}})^{\mathrm{Gal}(k^{\mathrm{sep}}/k)}$$

induziert, daß also die k-Punkte von X genau auf die Galois-invarianten k^{sep}-Punkte von X abgebildet werden.

(4 Punkte)