Übungen zur Vorlesung
"Arithmetische Geometrie"
WS 2010/11 Blatt 8

Ausgabe: 08.12.2010, **Abgabe:** 15.12.2010

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws10/arithmie.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 8.1: Sei $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Kern, Kokern und Bild von ϕ sind wieder $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.

(ii) Wenn $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ kohärent sind, dann sind auch Kern, Kokern und Bild von ϕ wieder kohärent.

(8 Punkte)

Aufgabe 8.2:

(i) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten, und $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Zeigen Sie, daß das direkte Bild $f_*\mathcal{F}$ in natürlicher Weise eine $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe ist.

(ii) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten und $\mathcal{F}$ eine kohärente $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe. Ist dann $f_*\mathcal{F}$ wieder kohärent?

(6 Punkte)

Aufgabe 8.3: Sei $X = \operatorname{Spm} A$ eine affine Varietät. In der Vorlesung wurde skizziert, wie man zu jedem A-Modul eine eindeutige $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\tilde{M}$ konstruiert, für die $\tilde{M}(U_f) = M_f$ gilt. Zeigen Sie:

(i) Die Zuordnung $M \mapsto \tilde{M}$ induziert einen Funktor von der Kategorie der A-Moduln in die Kategorie der $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.

(ii) Dieser Funktor induziert eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der endlich erzeugten A-Moduln und der Kategorie der kohärenten $\mathcal{O}_X$-Modulgarben.

(6 Punkte)