Arithmetische Geometrie

Wintersemester 2010/11

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter

Fassung vom 21. März 2011

Dies ist ein Vorlesungsskript und kein Lehrbuch.
Mit Fehlern muss gerechnet werden!

Math. Institut
Eckerstr.1
79104 Freiburg

0761-203-5560
annette.huber@math.uni-freiburg.de

Kapitel 0

Einleitung

Ziel der Vorlesung ist der Beweis (realistischer: Teile des Beweises) der Weil-vermutungen. Die wollen wir als erstes formulieren. Es geht um die Anzahl der Lösungen von Systemen von Polynomgleichungen über endlichen Körpern.

Definition 0.1. *Sei k ein Körper mit algebraischem Abschluss $\overline{k}$. Eine projektive Varietät V über k ist eine algebraische Varietät über $\overline{k}$, die durch eine Menge S von homogenen Gleichungen in $k[X_0, \ldots, X_n]$ definiert wird. Wir schreiben auch V/k. Ist K/k eine Körpererweiterung, so heißt die gemeinsame Lösungsmenge*

$$V(K) = \{P \in \mathbb{P}^n(K) \cap V | f(P) = 0, \text{ für alle } P \in S\}$$

Menge der K-wertigen Punkte von V.
Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt quasi-projektive Varietät über k, *wenn $Z = V \smallsetminus U$ eine projektive Varietät über k ist. Die Menge der K-wertigen Punkte von U ist $V(K) \smallsetminus Z(K)$.*

So richtig gut ist diese Definition nicht. Erstes Ziel der Vorlesung wird eine elegantere Definition sein.

Beispiel. Die homogene Gleichung $X^2 + Y^2 = Z^2$ definiert über eine algebraische Kurve C über $\mathbb{Q}$. Sie hat die $\mathbb{C}$-wertigen Punkte

$$C(\mathbb{C}) = \{[s : \pm\sqrt{1 - s^2} : 1] | s \in \mathbb{C}\} \cup \{[s : \pm\sqrt{-s} : 0] : s \in \mathbb{C}\}$$

und die $\mathbb{Q}$-wertigen Punkte gegeben durch die pythagoräischen Tripel

$$\mathbb{C}(\mathbb{Q}) = \left\{ \left[\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1} : \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} : 1 \right] | \lambda \in \mathbb{Q} \right\}$$

Wir können durch die selbe Gleichung auch eine Kurve über $\mathbb{F}_3$ definieren. Sie hat die $\mathbb{F}_3$-wertigen Punkte

$$C(\mathbb{F}_3) = \{[0 : \pm 1 : 1], [\pm 1 : 0 : 1]\}$$

Definition 0.2. *Sei $V/\mathbb{F}_p$ eine quasi-projektive Varietät. Wir setzen*

$$N_r = |V(\mathbb{F}_{p^r}|$$

Dann heißt

$$Z(V,t) = \exp\sum_{r=1}^{\infty} N_r \frac{t^r}{r} \in \mathbb{Q}[[t]]$$

Zeta-Funktion *von V.*

Beispiel. $V = \mathbb{P}^1$. Dann ist

$$N_r = |\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^r})| = |(\mathbb{F}_{p^r}^2 \smallsetminus \{0\})/\mathbb{F}_{p^r}^*| = (p^{2r}-1)/p^r - 1) = p^r + 1$$

und daher

$$\begin{aligned} Z(\mathbb{P}^1,t) &= \exp\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1+p^r)t^r}{r} \\ &\exp\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{t^r}{r} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{(pt)^r}{r}\right) \\ &= \exp(-\log(1-t) - \log(1-pt)) \\ &= \frac{1}{(1-t)(1-pt)} \end{aligned}$$

Theorem 0.3 (Weil-Vermutungen)**.** *Es gilt*

(i) $Z(V,t) \in \mathbb{Q}(t)$ *ist eine rationale Funktion*

(ii) $Z(V,t) = \prod_{i=0}^{2d} P_i(t)^{(-1)^{i+1}}$ *wobei* $P_i(t) \in \mathbb{Z}[t]$ *mit konstantem Term* 1.

(iii) (Funktionalgleichung)

(iv) Ist V glatt und projektiv, so haben alle Nullstellen von P_i den Absolutbetrag $p^{-i/2}$.

(v) Ist V glatt projektiv und durch ganzzahlige Gleichungen definiert, so kann man das Objekt auch als projektive komplexe Mannigfaltigkeit auffassen. Dann gilt

$$\deg P_i = b_i \qquad i\text{-te Betti-Zahl}$$

Den Begriff der Glattheit haben wir noch nicht untersucht, das wird das nächste Ziel sein.

Beispiel. Im Falle $\mathbb{P}^1$ haben wir

$$P_0 = 1-t, P_1 = 1, P_2 = 1-pt$$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ist die Riemannsche Zahlenkugel. Sie hat die Betti-Zahlen $1, 0, 1$.

Besonders das Auftauchen der Bettizahlen, also einer topologischen Invariante ist sehr rätselhaft! Sie gibt den Hinweis darauf, dass das Ganze etwas mit Kohomologie zu tun haben sollte. Es war wohl Weil selbst, der verstand, das die entscheidende Zutat eine Fixpunktformel für den Frobeniusendormorphismus sein sollte.
Zur Erinnerung: Die Abbildung $\phi : \mathbb{F}_{p^r} \to \mathbb{F}_{p^r}$ mit $x \mapsto x^p$ ist ein Körperautomorphismus, genannt *Frobenius*. Seine Fixpunkte sind genau die Elemente von $\mathbb{F}_p$. Moderner: Die Galoisgruppe $G(\mathbb{F}_{p^r}/p^r)$ ist zyklisch von der Ordnung r mit Erzeuger ϕ. Frobenius operiert auch auf dem projektiven Raum via

$$\Phi : \mathbb{P}^n(\overline{F}_p) \to \mathbb{P}^n(\overline{F}_p) \qquad [x_0 : \cdots : x_n] \mapsto [x_0^p : \cdots : x_n^p]$$

Man überprüft leicht, dass die Abbildung auf den Äquivalenzklassen wohldefiniert ist.

Lemma 0.4. *Sei V eine quasiprojektive Varietät über $\mathbb{F}_p$. Dann operiert Φ auf V. Es gilt*

$$V(\mathbb{F}_{p^r}) \subset V(\overline{F}_p)^{\Phi^r}$$

Beweis: Es genügt den Fall zu betrachten, dass V projektiv ist, $V = V(S)$ für eine Menge von homogenen Polynomen $S \subset \mathbb{F}_p[X_0, \dots, X_n]$. Sei $P = [x_0 : \cdots : x_n] \in V(\overline{F}_p)$. Wir betrachten $\Phi(P)$ und wollen zeigen, dass es jede Gleichung $f \in S$ erfüllt. Nach Voraussetzung gilt

$$0 = f(P) = f(x_0, \dots, x_n)$$

Hierauf wenden wir den Körperendomorphismus ϕ an und erhalten

$$0 = \phi(f(x_0, \dots, x_n)) = \phi(f)(\phi(x_0), \dots, \phi(x_n)) = \phi(f)(\Phi(P))$$

wobei $\phi(f)$ aus f durch Anwenden von ϕ auf die Koeffizienten entsteht. Nach Voraussetzung hat f Koeffizienten in $\mathbb{F}_p$, diese werden also durch ϕ festgehalten. Es folgt

$$f = \phi(f) \Rightarrow 0 = f(\Phi(P))$$

Damit haben wir verifiziert, dass Φ auf $V(\overline{F}_p)$ operiert.
Die Abbildung $\phi^r : x \mapsto x^{p^r}$ hat als Fixpunktmenge genau $\mathbb{F}_{p^r}$. Daher gilt offensichtlich

$$V(\mathbb{F}_{p^r}) \subset V(\overline{F}_p)^{\Phi^r}$$

Sei nun P ein Element rechts. Nach Voraussetzung ist

$$P = \Phi(P)$$

Eine der Koordinaten ist ungleich 0. Ohne Einschränkung ist dies x_0. Also

$$P = [1 : x_1 : \cdots : x_n] = \Phi(P) = [1 : x_1^{p^r} : \cdots : x_n^{p^r}]$$

Hieraus folgt $x_i = x_i^{p^r}$ für alle i, also $x_i \in \mathbb{F}_{p^r}$ für alle i. Damit ist P ein Element links. □

Frobenius und seine Potenzen sind damit Endomorphismen von V mit nur endlich vielen Fixpunkten. Wenn man sich in algebraischer Topologie auskennt, erinnert man sich nun an die Lefschetzsche Fixpunktformel.

Satz 0.5. *Sei X glatte, kompakte Mannigfaltigkeit, $f : X \to X$ stetig mit isolierten einfachen Fixpunkten. Dann ist die Anzahl der Fixpunkte gegeben durch*

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \mathrm{Tr}(f^* | H^i(X, \mathbb{Q}))$$

Hierin ist H^i die singuläre Kohomologie. Wegen Funktorialität operiert f auch auf dem endlich dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum $H^i(X, \mathbb{Q})$ und hat dann eine Spur. Dies ist eine rationale Zahl. Für $i \geq \dim X$ verschwindet die Kohomologie. Die Summe ist also endlich.
Nehmen wir an, wir können die Definition von singulärer Kohomologie irgendwie auf Varietäten über $\overline{F}_p$ ausdehnen und dort gilt die Fixpunktformel ebenfalls. Dann wenden wir die Formel an auf Φ^r an und erhalten

$$N_r = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \mathrm{Tr}((\Phi^r)^* | H^i(V))$$

In der reellen Situation muss nur bis zur Dimension von X summiert werden. Für komplexe Varietäten ist das das doppelte der algebraischen Dimension.
Das setzen wir ein in die Definition der Zeta-Funktion:

$$\begin{aligned} Z(V, t) &= \exp \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{2 \dim V} (-1)^i \mathrm{Tr}((\Phi^r)^* | H^i(V)) \frac{t^r}{r} \\ &= \exp \sum_{i=0}^{2 \dim V} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^i \mathrm{Tr}((\Phi^r)^* | H^i(V)) \frac{t^r}{r} \\ &= \prod_{i=0}^{2 \dim V} \left(\exp \sum_{r=1}^{\infty} \mathrm{Tr}((\Phi^r)^* | H^i(V)) \frac{t^r}{r} \right)^{(-1)^i} \end{aligned}$$

wegen der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. Fürs Weiterrechnen brauchen wir eine Formel der linearen Algebra.

Lemma 0.6. *Sei k Körper, V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum, $\Phi : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann gilt*

$$\exp \sum_{r=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(\Phi^r) \frac{t^r}{r} = \det(1 - \Phi t)^{-1} \in k[[t]]$$

Wir nennen $\det(1 - \Phi t)$ *charakteristisches Polynom*, auch wenn das von der Standarddefinition abweicht. Seine Nullstellen sind die Inversen der Eigenwerte von Φ.

Beweis: Die Aussage ist invariant unter Körpererweiterungen, daher nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass k algebraisch abgeschlossen ist. Wir wählen eine Basis von V so, dass die darstellende Matrix eine Dreiecksmatrix ist. Auf der Diagonale stehen die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \ldots & * \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow M^r = \begin{pmatrix} \lambda_1^r & * & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2^r & * & \ldots & * \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n^r \end{pmatrix}$$

Es folgt also

$$\mathrm{Tr}(\Phi^r) = \lambda_1^r + \cdots + \lambda_n^r, \qquad \det(1 - \Phi t) = \prod (1 - \lambda_i t)$$

Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \mathrm{Tr}(\Phi^r)\frac{t^r}{r}\right) &= \exp(\sum_{r=1}^{\infty}(\lambda_1^r + \ldots \lambda_n^r)\frac{t^r}{r}) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\lambda_i^r t^r}{r}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \exp(-\log(1 - \lambda_i t)) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1 - \lambda_i t)} = \det(1 - \Phi t)^{-1} \end{aligned}$$

□

Diese Erkenntnis können wir einsetzen in unsere Formel für die Zeta-Funktion und erhalten.

$$\begin{aligned} Z(V,t) &= \prod_{i=1}^{r} \left(\exp \sum_{r=1}^{\infty} \mathrm{Tr}((\Phi^r)^* | H^i(V)\frac{t^r}{r}\right)^{(-1)^i} \\ &= \prod_{i=1}^{r} \det(1 - \Phi^* t | H^i(V))^{(-1)^{i+1}} \end{aligned}$$

Das erklärt also die Rationalität der Zeta-Funktion mit

$$P_i(t) = \det(1 - \Phi^* t | H^i(V))$$

Der Grad dieses Polynoms ist die Dimension von $H^i(V)$ – genau dort sollten die Betti-Zahlen, also die Dimensionen der singulären Kohomologie auftauchen. Hauptziel der Vorlesung in den nächsten beiden Semestern wird die Konstruktion einer solchen Kohomologietheorie sein. Sie hat allerdings nicht Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, sondern in dem größeren Körper $\mathbb{Q}_l$. Dies ist die Komplettierung von $\mathbb{Q}$ bezüglich des Absolutbetrags zu l, wobei l eine andere Primzahl als p ist. Für das obige Argument ist das egal. Auch die weiteren Weil-Vermutungen werden aus Eigenschaften dieser Kohomologie-Theorie folgen. Wir nennen Sie *l-adische Kohomologie.*

Übersicht

(i) Definition von Varietäten über beliebigen Körpern. Wir wollen die Sprache der lokal-geringten Räume verwenden, daher müssen wir zuerst den Garbenbegriff einführen.

(ii) Glattheit von Morphismen, insbesondere glatte Varietäten und etale Morphismen. Im Zentrum wird die Garbe der Differentialformen stehen.

(iii) Definition der étalen Topologie und der étalen Kohomologie

(iv) Eigenschaften étaler Kohomologie

Mit dem letzten Punkt kann man leicht mehrere Semester füllen. Wir werden daher gelegentlich Abkürzungen nehmen müssen.

Literatur

- Mumford, The red book of varieties and schemes, Springer Lecture Notes 1358.
- Hartshorne, Algebraic geometry, Graduate Text in Mathematics 52, Springer.
- Matsumura, Commutative ring theory, Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 8. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- Tamme, Introduction to etale cohomology. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- Milne, Etale cohomology. Princeton Mathematical Series, 33. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- Freitag, Kiehl, Etale cohomology and the Weil conjecture. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 13. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- SGA 4: Deligne, P. Cohomologie etale. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$. Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569.
- P. Deligne, La conjecture de Weil I, II, Publ. IHES No. 43 (1974), 273–307., Publ. IHES No.52 (1980), 137–252.

Kapitel 1

Garben

In diesem Kapitel geht es um topologische Räume. Unser Anwendungsbeispiel sind algebraische Varietäten, aber auch Beispiele wie Mannigfaltigkeiten sind interessant.

Allgemeine Theorie

Definition 1.1. *Sei X ein topologischer Raum. Eine* Prägarbe $\mathcal{F}$ *von abelschen Gruppen auf X ist gegeben durch die Daten:*

- *Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ eine abelsche Gruppe $\mathcal{F}(U)$*
- *für jede Inklusion $V \subset U$ von offenen Teilmengen ein Gruppenhomomorphismus ("Einschränkungshomomorphismus")*

$$\varrho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

so dass gilt

(i) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$

(ii) $\varrho_{UU} = \mathrm{id}$

(iii) Für Inklusionen $W \subset V \subset U$ gilt

$$\varrho_{UW} = \varrho_{VW} \circ \varrho_{UV}$$

Ein Morphismus von Prägarben $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *ist gegeben durch die Daten:*

- *Für jede offene Teilmenge $U \subset X$ ein Gruppenhomomorphismus*

$$\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$

so dass gilt: Für alle Inklusionen $V \subset U$ von offenen Teilmengen kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi(U)} & \mathcal{G}(U) \\ {\scriptstyle \varrho_{UV}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varrho_{UV}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow[\phi(V)]{} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Analog definiert man Prägarben von Ringen, K-Vektorräumen, Mengen etc. Wir schreiben oft $s|_V$ statt $\varrho_{UV}(s)$. Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ heißen *Schnitte von $\mathcal{F}$ über U*. Oft schreibt man auch $\Gamma(U, \mathcal{F})$ für $\mathcal{F}(U)$.

Bemerkung. Eleganter lässt es sich so formulieren. Ein topologischer Raum X definiert eine Kategorie $\underline{X}$ mit Objekten die offenen Teilmengen und Morphismen die Inklusionen von offenen Mengen. Eine Prägarbe ist nichts anderes als ein kontravarianter Funktor

$$\underline{X} \to \underline{Ab}$$

Ein Morphismus von Prägarben ist dann gerade eine natürliche Transformation von Funktoren. Wir werden später darauf zurückkommen und den Garbenbegriff auch auf andere Kategorien als $\underline{X}$ verallgemeinern.

Beispiel. Sei A eine abelsche Gruppe. Dann ist $U \mapsto A$ mit $\varrho_{UV} = \mathrm{id}$ eine Prägarbe. Sie heißt *konstante Prägarbe.*

Beispiel. Sei X ein topologischer Raum, dann ist

$$U \mapsto C(U, \mathbb{R})$$

(stetige Funktionen auf U) mit der Einschränkungsabbildung von Funktionen eine Prägarbe. Ist X eine C^r-Mannigfaltigkeit ($r \leq \infty$), so gibt es auch das Beispiel der C^r-Funktionen. In diesem Fall definiert die Inklusion $C^r(\cdot, \mathbb{R}) \to C(\cdot, \mathbb{R})$ einen Morphismus von Prägarben.
Ist X eine quasi-projektive algebraische Varietät (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper), so ist $U \mapsto \mathcal{O}(U)$ mit der Einschränkung von Funktionen eine Prägarbe.

Definition 1.2. *Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X heißt* Garbe*, falls gilt:*

(i) Sei U eine offene Teilmenge, $\{V_i | i \in I\}$ eine offene Überdeckung von U und $s \in \mathcal{F}(U)$, so dass $s|_{V_i} = 0$ für alle $i \in I$. Dann ist $s = 0$.

(ii) Sei U eine offene Teilmenge $\{V_i | i \in I\}$ eine offene Überdeckung von U. Seien $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$, so dass für alle $i, j \in I$

$$s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$$

Dann gibt es ein $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s|_{V_i} = s_i$.

Ein Morphismus $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ist ein Morphismus der zugrunde liegenden Prägarben.

Der englische Begriff ist "sheaf", der französische "faisceau".

Beispiel. Alle Beispiele in Beispiel 1 sind Garben. Die konstante Prägarbe A ist im allgemeinen keine Garbe. Ist nämlich $U = V_1 \amalg V_2$ eine disjunkte Vereinigung, so gilt nach den Garbenaxiomen

$$\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(V_1) \oplus \mathcal{F}(V_2)$$

Lemma 1.3. *Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ ist genau dann eine Garbe, wenn für alle offenen Teilmenge U und offene Überdeckungen $\{V_i | i \in I\}$ von U die Sequenz*

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \prod_{i \in I} \mathcal{F}(V_i) \to \prod_{(i,j) \in I^2} \mathcal{F}(V_i \cap V_j)$$

exakt ist. Dabei ist die letzte Abbildung gegeben durch

$$(s_i)_{i \in I} \mapsto (s_i|_{V_i \cap V_j} - s_j|_{V_i \cap V_j})_{(i,j) \in I^2}$$

Beweis: Dies ist eine Übung in exakten Sequenzen. Bereits aus den Prägarbenaxiomen folgt, dass die Sequenz ein Komplex ist. Die Exaktheit in $\mathcal{F}(U)$ (also Injektivität) ist das erste Garbenaxiom. Die Exaktheit in $\prod \mathcal{F}(V_i)$ ist das zweite Garbenaxiom. $\square$

Das Lemma funktioniert genauso für Garben von Moduln oder Ringen etc. Für Garben von Mengen muss man es etwas anders formulieren.
Eigenschaften von Garben lassen sich lokal überprüfen. Formalisiert wird dies durch die Halme.

Definition 1.4. *Sei X topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X, $P \in X$ ein Punkt. Dann heißt der direkte Limes*

$$\mathcal{F}_P = \lim_{P \in U} \mathcal{F}(U)$$

Halm von $\mathcal{F}$ in P. *Die Elemente heißen* Keime.

Englisch: stalk, germ.

Bemerkung. $\lim_{P \in U} \mathcal{F}(U)$ ist die abelsche Gruppe erzeugt von den $\mathcal{F}(U)$ mit der Relation erzeugt von $s \sim t$ für $s \in \mathcal{F}(U)$, $t \in \mathcal{F}(V)$, wenn es $W \subset U \cap V$ mit $P \in W$ gibt, so dass $s|_W = t|_W$.

Beispiel. Ist X algebraische Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, so ist lokale Ring $\mathcal{O}_P$ der Halm der Garbe $\mathcal{O}$ der algebraischen Funktionen.

Satz 1.5. *Sei X topologischer Raum, $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenhomomorphismus. Dann ist ϕ genau dann ein Isomorphismus, wenn $\phi_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ ein Isomorphismus ist für alle $P \in X$.*

Wie in jeder Kategorie ist ϕ nach Definition ein Isomorphismus, wenn es einen inversen Garbenhomomorphismus gibt.

Beweis: Die Zuordnung ist $\phi \mapsto \phi_P$ ist funktoriell. Daher ist ϕ_P ein Isomorphismus, wenn ϕ einer ist. Seien nun alle ϕ_P Isomorphismen. Wir zeigen, dass $\phi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ein Isomorphismus ist. Dann ist nämlich $\phi : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ mit $\psi(U) = \phi(U)^{-1}$ der inverse Garbenhomomorphismus.
Injektivität: Sei $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $\phi_P(s_P) = 0 \in \mathcal{G}_P$ für alle $P \in U$. D.h. $\phi(s)$ und 0 definieren den selben Keim. Die Gleichheit von Keimen bedeutet nach Definition, dass es eine offene Umgebung W_P von P gibt mit $\phi(s)|_{W_p} = 0 \in \mathcal{G}(W_P)$. Die Vereinigung aller W_P enthält alle Punkte $P \in U$. Nach dem ersten Garbenaxiom ist dann $\phi(s) = 0$.
Surjektivität: Gegeben sei $t \in \mathcal{G}(U)$. Nach Voraussetzung liegt $t_P \in \mathcal{G}_P$ im Bild von ϕ_P. Sei $s_P \in \mathcal{F}_P$ ein Urbild. Der Keim s_P wird repräsentiert durch eine Klasse $\tilde{s}_P \in \mathcal{F}(U_P)$ für eine eine offene Umgebung U_P von P. Wegen $\phi(\tilde{s}_P)_P = \phi_P(s_P) = t_P$ gilt in einer eventuell kleineren Umgebung U'_P von P

$$\phi(\tilde{s}_P) = t|_{U'_P}$$

Wir vergleichen $\tilde{s}_P$ und $\tilde{s}_Q$ in $U'_P \cap U'_Q$. Nach Anwenden der injektiven Abbildung ϕ erhalten wir in beiden Fällen $t|_{U'_P \cap U'_Q}$. Also sind sie gleich. Nach dem zweiten Garbenaxiom definieren die s_P also einen Schnitt $s \in \mathcal{F}(U)$. Sein Bild $\phi(s)$ stimmt nach Einschränke auf alle U'_P mit t überein. Wieder nach dem ersten Garbenaxiom gilt dann $\phi(s) = t$. □

Satz 1.6. *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ ein Prägarbe.*

(i) Dann existiert eine Garbe $\mathcal{F}^+$ und ein Prägarbenhomomorphismus $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ mit der folgenden universellen Eigenschaft: Jeder Homomorphismus von $\mathcal{F}$ in eine Garbe $\mathcal{G}$ faktorisiert eindeutig über θ.

(ii) Das Paar $(\mathcal{F}^+, \theta)$ ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

(iii) Für jeden Punkt P ist θ_P ein Isomorphismus.

(iv) Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so ist θ ein Garbenisomorphismus.

$\mathcal{F}^+$ heißt *Garbifizierung von $\mathcal{F}$.*

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt aus der universellen Eigenschaft. Wir setzen

$$\mathcal{F}^+(U) \subset \{s : U \to \bigcup_{P \in U} \mathcal{F}_P | s(P) \in \mathcal{F}_P\}$$

die Teilmenge der Funktionen, so dass es für jeden Punkt $P \in U$ eine Umgebung V_P von P gibt und ein Element $t \in \mathcal{F}(V_P)$ derart dass $t_Q = s(Q)$ für alle $Q \in V_P$. Die Abbildung θ bildet $s \in \mathcal{F}(U)$ ab auf $P \mapsto s_P$.
Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{F}^+$ eine Garbe ist und dass die universelle Eigenschaft erfüllt ist. Offensichtlich ist $\mathcal{F}^+_P = \mathcal{F}_P$. Die letzte Eigenschaft folgt dann mit Satz 1.5. □

Beispiel. Sei X ein topologischer Raum, A eine abelsche Gruppe, $\mathcal{A}$ die konstante Prägarbe A. Dann heißt die Garbifizierung von $\mathcal{A}$ *konstante Garbe* zu A. Ist $U = \amalg U_i$ disjunkte Vereinigung von zusammenhängenden Mengen, so gilt

$$\mathcal{A}^+(U) = A^I$$

Prägarben und Garben von abelschen Gruppen bilden abelsche Kategorien.

Definition 1.7. *Sei $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben. Dann werden Kern/Bild/Kokern von ϕ definiert als die Prägarbe*

$$U \mapsto \mathrm{Ker}(\phi(U)), \mathrm{Im}(\phi(U)), \mathrm{Coker}(\phi(U))$$

Sei $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Garben. Dann werden Kern/Bild/Kokern von ϕ als die Garbifizierung der entsprechenden Prägarbe. Wir nennen einen (Prä-)Garbenmorphismus injektiv/surjektiv, wenn der Kern verschwindet/das Bild isomorph zu $\mathcal{G}$ ist.

Bemerkung. Der Prägarbenkern eines Garbenhomomorphismus bildet automatisch eine Garbe. Für Bild und Kokern ist das im Allgemeinen falsch.

Wir werden irgendwann anfangen mit exakten Sequenzen von Garben zu rechnen. Das hat aber noch etwas Zeit.

Definition 1.8. *Sei $f : X \to Y$ stetige Abbildung topologischer Räume.*

(i) Für eine Garbe $\mathcal{F}$ auf X heißt die Garbe $f_*\mathcal{F}$ auf Y mit

$$f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

direktes Bild von $\mathcal{F}$.

(ii) Für eine Garbe $\mathcal{G}$ auf Y heißt die Garbifizierung $f^{-1}\mathcal{G}$ der Prägarbe

$$U \mapsto \lim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

inverse Bildgarbe von $\mathcal{G}$.

Bemerkung. Je nach Kontext schreibt man auch f^* statt f^{-1}. In der Theorie der kohärenten Garben auf Varietäten ist aber f^* etwas anderes.

Lemma 1.9. *Sei $f : X \to Y$ stetig, $\mathcal{G}$ eine Garbe auf Y, $P \in X$ ein Punkt. Dann gilt*

$$(f^{-1}\mathcal{G})_P = \mathcal{G}_{f(P)}$$

Das direkte Bild hat eine einfach Definition, das inverse hat einfache Halme!

Beweis: Halm von Garbe und Prägarbe stimmen überein. Daher:

$$(f^{-1}\mathcal{G})_P = \lim_{P \in U} \lim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V) = \lim_{f(P) \in V} \mathcal{G}(V)$$

□

Inverses und direktes Bild haben universelle Eigenschaften, die wir fürs erste übergehen.

Geringte Räume

Definition 1.10. *Ein* geringter Raum *ist ein topologischer Raum X zusammen mit einer Garbe von Ringen $\mathcal{O}_X$. Ein Morphismus $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zusammen mit einem Morphismus von Garben von Ringen*

$$f^\# : f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$$

Ein lokal geringter Raum *ist ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, so dass zusätzlich $\mathcal{O}_P$ für alle $P \in X$ ein lokaler Ring ist. Ein Morphismus von lokal geringten Räumen ist ein Morphismus von geringten Räumen, so dass zusätzlich für alle $P \in X$ die Abbildung $f_P : (\mathcal{O}_Y)_{f(P)} \to (\mathcal{O}_X)_P$ lokal ist.*

Ein Homomorphismus $\phi : A \to B$ zwischen lokalen Ringen heißt *lokal*, wenn das Urbild des maximalen Ideals maximal ist.

Beispiel. (i) Sei X ein topologischer Raum, R ein Ring. Dann ist X mit der konstanten Garbe zu R ein geringter Raum. (Von praktischer Bedeutung ist hier etwa $R = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.)

(ii) Sei X eine C^r-Mannigfaltigkeit. Dann ist $(X, C^r(\cdot, \mathbb{R})$ ein lokal geringter Raum.

(iii) Sei X komplexe Mannigfaltigkeit. Dann ist X mit der Garbe der holomorphen Funktionen ein lokal geringter Raum

Mit nicht zu großem Aufwand beweist man, dass in den letzten beiden Fällen eine C^r/homomorphe Abbildung von Mannigfaltigkeiten dasselbe ist wie ein Morphismus der lokal geringten Räume.

Für uns geht es um den Fall der algebraischen Geometrie.

Beispiel. Sei X quasi-projektive Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Dann ist X mit der Garbe der algebraischen Funktionen ein lokal geringter Raum. Ein Morphismus der algebraischen Varietäten ist dasselbe wie ein Morphismus der lokal geringten Räume.

Die Aussage über Morphismen ist nicht völlig offensichtlich. Wir werden das aber gleich in einem allgemeineren Kontext angeben.

Kapitel 2

Varietäten

Ziel ist die Definition der Kategorie der Varietäten über einem beliebigen Körper. In diesem Kapitel ist k stets ein Körper, alle Ringe sind kommutative k-Algebren mit 1.

Definition 2.1. *Eine k-Algebra heißt* von endlichem Typ*, wenn sie als k-Algebra von endlich vielen Elementen erzeugt ist. Sie heißt* reduziert*, wenn das einzige nilpotente Element die* 0 *ist.*

Beispiel. Ist k algebraisch abgeschlossen und V eine affine Varietät über k, so ist $k[V]$ eine reduzierte k-Algebra von endlichem Typ.

Affine Varietäten

Sei A eine k-Algebra von endlichem Typ. Wir wollen A einen lokal-geringten Raum zuordnen.

Definition 2.2. *Die Menge der maximalen Ideale von A*

$$\mathrm{Spm}(A) = \{m \subset A | m \text{ maximal } \}$$

heißt Maximalspektrum von A. Die Elemente werden als Punkte von $\mathrm{Spm}(A)$ *bezeichnet. Ist P ein Punkt, so schreiben wir auch m_P für das maximale Ideal. Für jedes Ideal $I \subset A$ heißt die Teilmenge*

$$V(I) = \{P \in \mathrm{Spm}(A) | I \subset m_P\}$$

abgeschlossen*. Eine Teilmenge heißt* offen*, wenn sie Komplement einer abgeschlossenen ist.*

Beispiel. Ist k algebraisch abgeschlossen, $A = k[V]$, so ist nach dem Hilbertschen Nullstellensatz

$$V = \mathrm{Spm}(k[V]) \qquad V(I) = \{P \in V | f(P) = 0 \text{ für alle } f \in I\}$$

Beispiel. Sei k nicht algebraisch abgeschlossen, z.B. $k = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Q}[X]/(x^2 - 2)$. Dies ist der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, hat also nur *ein* maximales Ideal. $\mathrm{Spm}(A)$ besteht aus genau einem Punkt.

Lemma 2.3. $\mathrm{Spm}(A)$ *ist ein topologischer Raum. Der Raum ist genau dann irreduzibel, wenn A nullteilerfrei ist.*

Beweis: Genau wie über algebraisch abgeschlossenen Körpern.

$$\bigcap_{j\in I} V(I_j) = V(\sum_{j\in I} I_j) \qquad V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 + I_2)$$

□

Satz 2.4. *Sei $\phi : A \to B$ ein Homomorphismus von k-Algebren von endlichem Typ. Dann ist*

$$\phi^* : \mathrm{Spm}(B) \to \mathrm{Spm}(A) \qquad m_P \mapsto \phi^{-1}(m_P)$$

wohldefiniert und stetig.

Beweis: Das Urbild eines Primideals ist stets ein Primideal. Wir müssen zeigen, dass Urbilder maximaler Ideale maximal sind. Das ist für beliebige Ringhomomorphismen falsch. Sei also $m \subset B$ maximal, $m' = \phi^{-1}m$ das Urbild. Dann ist die Abbildung

$$A/m' \to B/m$$

injektiv und B/m ein Körper. Gleichzeitig ist B/m von endlichem Typ als k-Algebra, da B von endlichem Typ ist. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz (Komm. Alg. Satz 3.8) ist B/m dann endlich über k. Als Teilmenge ist auch A/m' endlich über k und nullteilerfrei. Dann ist auch A/m' ein Körper und m' maximal.
Die Stetigkeit ist leicht: Ist $I \subset A$ ein Ideal, also $V(I) \subset \mathrm{Spm}(A)$ abgeschlossen, so gilt

$$\begin{aligned}(\phi^*)^{-1}(V(I)) &= \{m_P \in \mathrm{Spm}(B) | \phi^*(m_P) \in V(I)\} \\ &= \{m_P \in \mathrm{Spm}(B) | \phi^{-1}(m_P) \supset I\} \\ &= \{m_P \in \mathrm{Spm}(A) | \phi(m_P) \supset \phi(I)\} = V(B\phi(I))\end{aligned}$$

□

Beispiel. Sei $I \subset A$ ein Ideal. Dann ist die natürliche Abbildung

$$\mathrm{Spm}(A/I) \to \mathrm{Spm}(A)$$

injektiv und induziert einen Homöomorphismus von $\mathrm{Spm}(A/I)$ mit $V(I)$. Dies gilt, denn die maximalen Ideale von A, die I enthalten, stehen in Bijektion mit den maximalen Idealen in A/I.
Ist speziell $I = N$ das *Nilradikal*, d.h. die Menge der nilpotenten Elemente, dann ist die natürliche Abbildung $\mathrm{Spm}(A/N) \to \mathrm{Spm}(A)$ ein bijektiver Homöomorphismus, denn nilpotente Elemente liegen in allen Primidealen, also auch in allen maximalen Idealen von A.

Im Moment erlauben wir nilpotente Elemente, aber eigentlich geht es um den reduzierten Fall.

Definition 2.5. *Sei A eine k-Algebra von endlichem Typ. Dann heißt*

$$U_f = \mathrm{Spm}(A) \smallsetminus V(f)$$

standardoffene Menge.

Wie im Fall von algebraisch abgeschlossenen Grundkörper bilden die standardoffenen Mengen eine Basis für die Topologie: jede offene Menge ist Vereinigung von standardoffenen, denn

$$U = \mathrm{Spm}(A) \smallsetminus V(I) = \bigcup_{f \in I} U_f \Leftrightarrow V(I) = \bigcap_{f \in I} V(f)$$

Wir erinnern uns an den Begriff der Lokalisierung. Sei A wie bisher k-Algebra von endlichem Typ, $f \in A$ kein Nullteiler. Dann ist

$$A_f = \left\{ \frac{a}{f^n} | a \in A, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

die *Lokalisierung* von A an $S = \{1, f, f^2, \dots\}$.

Lemma 2.6. *A_f ist eine k-Algebra von endlichem Typ. Die natürliche Abbildung* $\mathrm{Spm}\, A_f \to \mathrm{Spm}\, A$ *ist injektiv und ein Homöomorphismus von* $\mathrm{Spm}\, A_f$ *auf* U_f.

Beweis: Wir betrachten die Abbildung

$$A[T] \to A_f \qquad T \mapsto \frac{1}{T}$$

Sie ist offensichtlich surjektiv, daher ist A_f endlich erzeugt als A-Algebra und dann auch als k-Algebra.
Nun betrachten wir $i : A \to A_f$. Sei $\mathfrak{m}'$ ein maximales Ideal von A_f. Aus der Strukturtheorie von lokalisierten Ringen wissen wir, dass $\mathfrak{m}' = S^{-1}\mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{m} = i^{-1}\mathfrak{m}'$ das Element f nicht enthält. Mit anderen Worten: $i^* : \mathrm{Spm}(A_f) \to \mathrm{Spm}(A)$ ist injektiv mit Bild U_f. Zu zeigen bleibt, dass i^* offene Mengen auf offene Mengen abbildet. Es genügt hierbei, standardoffene Mengen in $\mathrm{Spm}(A_f)$ zu betrachten. Sie sind von der Form

$$\mathrm{Spm}(A_f) \smallsetminus V(\frac{a}{f^n}) = V(\frac{a}{1}))$$

Nach dem bereits gezeigten, können wir sie als Bild von $\mathrm{Spm}((A_f)_{\frac{a}{1}})$ auffassen. Wegen

$$(A_f)_{\frac{a}{1}} \cong A_{fa}$$

ist das Bild unter i^* wieder standardoffen. $\square$

Ist $g = fh$ ein Vielfaches von f, so folgt $U_g \subset U_f$.

Definition 2.7. *Sei A eine reduzierte k-Algebra von endlichem Typ, $f \in A \setminus \{0\}$ und $X = Spm(A)$. Dann setzen wir*

$$\tilde{\mathcal{O}}(U_f) = A_f$$

Ist $U_g \subset U_f$ Inklusion von standardoffenen, so setzen wir $\varrho_{U_f U_g}$ die natürliche Abbildung $A_f \to A_g$. Für alle $P \in X$ setzen wir

$$\mathcal{O}_P = \lim_{f \notin m_P} \tilde{\mathcal{O}}(U_f)$$

$\tilde{\mathcal{O}}$ ist nicht ganz eine Prägarbe, denn es ist nur für standardoffene Mengen definiert, nicht für offene. $\mathcal{O}_P$ ist dann der Halm dieser partiell definierten Prägarbe. Wir machen daraus eine Garbe auf X mit der selben Konstruktion wie beim Garbifizieren von Prägarben.

Definition 2.8. *Sei $X = \mathrm{Spm}(A)$ für eine reduzierte k-Algebra A von endlichem Typ. Sei $U \subset X$ offen. Dann setzen wir*

$$\mathcal{O}(U) = \{s : U \mapsto \prod_{P \in U} \mathcal{O}_P | s(P) \in \mathcal{O}_P, (*)\}$$

wobei $(*)$ die Bedingung ist: Für jedes $P \in U$ existiert eine standardoffene Menge U_f und ein $t \in \tilde{\mathcal{O}}(U_f)$ so dass $t_Q = s(Q)$ für alle $Q \in U_f$.

Dies ist die selbe Situation wie im Fall von affinen Varietäten über algebraisch abgeschlossenen Körpern.
Wie beim Garbifizieren sieht man leicht:

Korollar 2.9. *$\mathcal{O}$ ist eine Garbe mit Halm $\mathcal{O}_P$ im Punkt $P \in X$.*

Tatsächlich gilt auch:

Satz 2.10. *$\mathcal{O}(U_f) = \tilde{\mathcal{O}}(U_f)$ für alle standardoffenen U_f. Es gilt $\mathcal{O}_P = A_{m_P} = \{a/s | a \in A, s \notin m_P\}$.*

Beweis: Dies ist genau dieselbe Eigenschaft, wie wir sie bei der Definition von algebraischen Funktionen auf Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper beweisen mussten. (Komm. Alg. Satz 5.17) Der Beweis bleibt derselbe. □

Bemerkung. Hinter dem Satz steckt die Garbeneigenschaft für standardoffene Mengen: Ist $U_f = U_{f_1} \cup \cdots \cup U_{f_n}$, so ist die Sequenz

$$0 \to A_f \to \prod_{i=1}^{n} A_{f_i} \to \prod_{(i,j)} A_{f_i f_j}$$

exakt.

Damit haben wir alles beieinander:

Definition 2.11. *Sei A eine reduzierte k-Algebra von endlichem Typ. Dann heißt der lokal geringte Raum* $(\mathrm{Spm}(A), \mathcal{O})$ affine Varietät über k.
Eine Prävarietät *ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, so dass es eine endliche Überdeckung $U_1, \ldots, U_n$ von X gibt, reduzierte k-Algebren A_i und Isomorphismen von lokal geringten Räumen*

$$(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \cong (\mathrm{Spm}(A_i), \mathcal{O})$$

Ein Morphismus von Prävarietäten ist ein Morphismus der lokal geringten Räume.

Den Begriff Varietät reservieren wir für die separablen Prävarietäten. Diesen Begriff müssen wir aber erst noch einführen.

Beispiel. Sei X quasi-projektive Varietät über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Dann ist X eine Prävarietät.

Definition 2.12. *Eine Prävarietät heißt* affine Varietät*, wenn sie isomorph ist zu einem lokal-geringten Raum der Form* $(\mathrm{Spm}(A), \mathcal{O})$ *für eine reduzierte k-Algebra A von endlichem Typ. Speziell*

$$\mathbb{A}^n = \mathrm{Spm}(k[X_1, \ldots, X_n])$$

heißt n-dimensionaler affiner Raum.

Satz 2.13. *Die Kategorie der affinen Prävarietäten ist äquivalent zu Kategorie der reduzierten k-Algebren von endlichem Typ.*

Beweis: Die beiden Funktoren sind klar. Ist A eine Algebra, so ist $(\mathrm{Spm}(A), \mathcal{O})$ affine Prävarietät. Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ affine Varietät, so ist $\mathcal{O}_X(X)$ nach Definition isomorph zu einer reduzierten k-Algebra von endlichem Typ, also selbst eine.
Auf Objekten sind die beiden Funktoren zueinander isomorph, für Morphismen muss man jedoch etwas zeigen:

Behauptung. *Sei* $(f, f^\#) : (\mathrm{Spm}(B), \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(B)}) \to (\mathrm{Spm}(A), \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(A)})$ *ein Morphismus von lokal geringten Räumen. Dann werden $(f, f^\#)$ induziert von dem Ringhomomorphismus $\phi : A \to B$.*

Für jeden Punkt $P \in \mathrm{Spm}(B)$ induziert $f^\#$ einen Ringhomomorphismus

$$f^\#_P : \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(B),P} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spm}(A),f(P)}$$

Diese Abbildung muss mit der Abbildung auf globalen Schnitten verträglich sein, da $f^\#$ ein Garbenhomomorphismus ist. D.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{m_{f(P)}} & \longrightarrow & B_{m_P} \end{array}$$

kommutiert. Da $f_P^\#$ *lokal* ist, ist das Urbild von m_P gleich $m_{f(P)}$. Dies beweist, dass $f(P) = \phi^{-1}(m_P)$ bzw. $f = \phi^*$. Dann muss auch $f_P^\#$ von ϕ induziert sein. Aus der Garbeneigenschaft folgt, dass dann auch alle $f^\#(U)$ von ϕ induziert sind. □

Beispiel. Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist daher ein Morphismus von affinen Varietäten im Sinne der elementaren algebraischen Geometrie das Gleiche wie in unserer moderneren Definition: nämlich einfach ein Algebrenhomomorphismus.

Noch ein wenig Notation, die sehr nützlich sein wird.

Definition 2.14. *Seien X, U Prävarietäten. Dann heißt*

$$X(U) = \mathrm{Mor}(U, X)$$

Menge der U-wertigen Punkte von X.

Beispiel. Sei $U = \mathrm{Spm}(K)$, wobei K/k eine endliche Körpererweiterung ist. Dann ist

$$X(K) := X(U)$$

die Menge der *K-wertigen Punkte* von X. Ist zusätzlich $X = \mathrm{Spm}(A)$, wobei $A = k[X_1, \ldots, X_n]/ < f_1, \ldots, f_m >$ eine affine Varietät mit den Gleichungen $f_1, \ldots, f_m$, so erhalten wir:

$$X(K) = \mathrm{Mor}(\mathrm{Spm}\, K, \mathrm{Spm}\, A) = \mathrm{Hom}(k[X_1, \ldots, X_n]/ < f_1, \ldots, f_m >, K)$$

Ein Algebrenhomomorphismus ϕ ist eindeutig bestimmt durch den Vektor

$$(\phi(X_1), \ldots, \phi(X_n)) \in K^n$$

Umgekehrt definiert ein Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ genau dann einen Homomorphismus, wenn $f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$ für $i = 1, \ldots, m$. Wir bekommen also für endliche Körpererweiterungen die Definition aus der Einleitung zurück.

Definition 2.15. *Sei K/k algebraisch, X eine Prävarietät. Dann definieren wir*

$$X(K) = \bigcup_{L/k} X(L)$$

wobei die Vereinigung über alle Zwischenkörper von K/k läuft, die endlich über k sind.

Lemma 2.16. *Für festes X ist*

$$U \mapsto X(U)$$

ein kontravarianter Funktor auf der Kategorie der algebraischen Varietäten. Dieser bestimmt X eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.

Beweis: Funktorialität entsteht durch Verknüpfen der Morphismen. Die Eindeutigkeit ist ein allgemeiner Satz, das *Yoneda-Lemma*. □

Bemerkung. Immer wenn ein mathematisches Objekt durch eine universelle Eigenschaft definiert wird, ist die Eindeutigkeit des Objektes gerade durch das Yoneda-Lemma garantiert. Beispiele sind das Tensor-Produkt von zwei Moduln, aber auch direkte Summen und Produkte. In der algebraischen Geometrie wird es auch für die Definition von komplizierteren Objekten wie Grassmannschen oder Modulräumen definiert.

Kapitel 3

Erste Eigenschaften

Um zu verstehen, warum der Prävarietätenbegriff noch nicht richtig ist, betrachten wir die topologische Situation.
Eine *Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum, der hausdorff ist und der eine Überdeckung durch offene Mengen hat, die homöomorph zu offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind.
Zur Erinnerung: Ein topologischer Raum heißt *hausdorff*, wenn es zu je zwei Punkten P, Q offene Umgebungen U_P und U_Q gibt, die sich nicht schneiden. Beispiel: $\mathbb{R}^n$.
In der Mannigfaltigkeitsdefinition muss dies extra verlangt werden: Sei X der topologische Raum, der entsteht, wenn man $X_1 = \mathbb{R}$ und $X_2 = \mathbb{R}$ entlang der offenen Teilmengen $X_1 \setminus \{0\} \cong X_2 \setminus \{0\}$ zusammenklebt. Er sieht lokal aus wie $\mathbb{R}$, die beiden Nullpunkte lassen sich jedoch nicht durch Umgebungen trennen.

Beispiel. Sei X die Prävarietät, die entsteht, wenn man $X_1 \cong \mathbb{A}^1$ und $X_2 \cong \mathbb{A}^1$ entlang der offenen Teilmengen $X_1 \setminus \{0\} \cong X_2 \setminus \{0\}$ zusammenklebt.

Diese Beispiele wollen wir verhindern. Der Begriff hausdorff aus der Topologie nützt nichts, affine Varietäten sind (fast) nie hausdorff.
Wir benutzen einen alternativen Zugang:

Lemma 3.1. *Ein topologischer Raum X ist genau dann hausdorff, wenn die Diagonalabbildung $X \to X \times X$ abgeschlossen ist, also abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen abbildet.*

Beweis: Übungsaufgabe $\square$

Um dieses Kriterium für Prävarietäten nachzumachen, müssen wir erst über die vorkommenden Begriffe sprechen.

Immersionen

Lemma 3.2. *Sei X Prävarietät, $U \subset X$ offene Teilmenge. Dann ist $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ eine Prävarietät.*

Beweis: Sei $X = \bigcup X_i$ affine Überdeckung. Dann ist $U \cap X_i \subset X_i$ offen in einer affinen Varietät, hat also eine endliche Überdeckung durch standardoffene Teilmengen. Diese sind selbst affin. Dies ist die gesuchte affine Überdeckung von U. □

Definition 3.3. *Ein Morphismus von Prävarietäten $j : U \to X$ heißt* offene Immersion*, wenn $j(U) \subset X$ offen und j ein Isomorphismus von U nach $(j(U), \mathcal{O}_X|_{j(U)})$ ist.*

Nun zum abgeschlossenen Gegenstück.

Definition 3.4. *Sei A eine k-Algebra von endlichem Typ. Dann ist $A^{\mathrm{red}} = A/N$ (wobei N das Nilradikal) die assoziierte reduzierte Algebra.*

Lemma 3.5. *Sei X eine Prävarietät, $Z \subset X$ abgeschlossen. Dann gibt es eine eindeutige Garbe von Ringen auf Z, so dass $Z \to X$ ein Morphismus von Prävarietäten ist.*

Beweis: Es genügt den affinen Fall zu betrachten. Dann ist $X = \mathrm{Spm}(A)$, $Z = V(I)$ für ein Ideal $I \subset A$. Mit $B = (A/I)^{\mathrm{red}}$ ist $\mathrm{Spm}(B)$ die gesuchte Varietät mit topologischem Raum Z. □

Definition 3.6. *Ein Morphismus $i : Z \to X$ heißt* abgeschlossene Immersion*, wenn $i(Z) \subset X$ abgeschlossen ist und i ein Isomorphismus von Z nach $i(Z)$.*

Bemerkung. Abgeschlossene Immersionen sind *affin*, d.h. Urbilder affiner Varietäten sind affin.

Faserprodukte

Definition 3.7. *Ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{q} & Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[f]{} & S \end{array}$$

von Mengen heißt kartesisch*, wenn*

$$W \cong \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = g(y)\}$$

und unter diesem Isomorphismus p und q die Projektionen auf die erste und zweite Komponente sind.
In diesem Fall heißt W auch Faserprodukt *von X und Y über S. Wir schreiben $W = X \times_S Y$.*

Lemma 3.8. *Ein kommutatives Diagramm wie oben ist genau dann kartesisch, wenn es für jede Menge V und jedes Paar von Abbildungen $f' : V \to X$, $g' : V \to Y$ mit $ff' = gg'$ eine eindeutige Abbildung $v : V \to W$ gibt, so dass $f' = pv$ und $g' = qv$.*

Beweis: Wir müssen überprüfen, dass $X \times_S Y$ die universelle Eigenschaft hat. Sei also das Diagramm kartesisch. Dann setzen wir $v(w) = (f'(w), g'(w))$. Die Abbildung hat Werte in $X \times_S Y$. Dies ist die einzige mögliche Wahl. $\square$

Wir übertragen diese universelle Eigenschaft auf Varietäten. Es gibt dabei immer einen offensichtlichen Weg, den Punktefunktor.

Definition 3.9. *Ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{q} & Y \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X & \xrightarrow[f]{} & S \end{array}$$

von Prävarietäten heißt kartesisch*, wenn für jede Prävarietät U das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} W(U) & \xrightarrow{q(U)} & Y(U) \\ {\scriptstyle p(U)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g(U)} \\ X(U) & \xrightarrow[f(U)]{} & S(U) \end{array}$$

von Mengen kartesisch ist. In diesem Fall heißt W auch Faserprodukt *von X und Y über S. Wir schreiben $W = X \times_S Y$.*
Ist $S = \operatorname{Spm}(k)$ (das finale Objekt), so schreiben wir auch $X \times Y$.

Konkret bedeutet dies: Für jedes U und jedes Paar von Morphismen $f' : U \to Y$ und $g' : U \to X$ mit $ff' = gg'$ gib es einen eindeutigen Morphismus $v : U \to W$, so dass $f' = pv$ und $g' = qv$. Es gilt also genau die universelle Eigenschaft wie für Mengen.

Beispiel. Es gilt $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$. Wir überprüfen die universelle Eigenschaft für affines $U = \operatorname{Spm}(A)$: zz. ist, dass

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}(k[X_1, X_2], A) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(k[X_2], A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Hom}(k[X_1], A) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(k, k) \end{array}$$

kartesisch ist. Das ist wahr, da $A^2 = A \times A$ in der Kategorie der Mengen.

Satz 3.10. *Faserprodukte existieren in der Kategorie der Prävarietäten. $X \times_S Y$ ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus.*

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt wie immer aus der universellen Eigenschaft. Zu überprüfen ist die Existenz. Wir beginnen mit dem affinen Fall, hinterher wird verklebt.
1. Schritt: Seien $S = \operatorname{Spm} R, X = \operatorname{Spm} A, Y = \operatorname{Spm} B$ affin.

Behauptung. $\mathrm{Spm}(A \otimes_R B)^{\mathrm{red}} = X \times_S Y$

Gegeben sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Ist U affin, so haben wir ein assoziiertes kommutatives Diagramm von Algebren

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U) & B \arrow[l] \\ A \arrow[u] & R \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes, erhalten wir eine eindeutige Abbildung $A \otimes_R B \to \mathcal{O}(U)$. Da $\mathcal{O}(U)$ reduziert ist, faktorisiert sie über die Reduktion des Tensorproduktes.
Sei nun $U = \bigcup U_i$ für affine U_i. Für die U_i ist die universelle Eigenschaft erfüllt, daher erhalten wir eindeutige Abbildungen $v_i : U_i \to \mathrm{Spm}(A \otimes_R B)^{\mathrm{red}}$. Diese definieren genau dann einen Morphismus auf ganz U, wenn $v_i|_{U_i \cap U_j} = v_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle Paare i, j. Der Schnitt $U_i \cap U_j$ ist eventuell nicht affin, hat aber eine affine Überdeckung. Es genügt die Gleichheit auf den Elementen der Überdeckung zu überprüfen. Dort gilt sie, da die Einschränkung von v_i und v_j beide die universelle Eigenschaft erfüllen.

2. Schritt: Angenommen $X \times_S Y$ existiert, $X' \subset X$ ist offen.

Behauptung. *Dann existiert $X' \times_S Y$ und ist gegeben durch $p^{-1}X'$.*

Gegeben Morphismen $f' : U \to X'$, $U \to Y$ verträglich mit den Morphismen nach S. Wegen $X' \subset X$ ist dann auch die Voraussetzung der universellen Eigenschaft von $X \times_S Y$ erfüllt. Daher existiert ein eindeutiger Morphismus $v : U \to X \times_S Y$. Dieser faktorisiert über die offene Untervarietät $p^{-1}X'$, da $f' = pv$ Werte in X' hat.

3. Schritt: Angenommen, $X = \bigcup X_i$ ist eine offene Überdeckung, so dass alle $X_i \times_S Y$ existieren.

Behauptung. *Dann existiert $X \times_S Y$.*

Sei $X_{ij} = X_i \cap X_j$. Nach dem zweiten Schritt erfüllen die Urbilder von X_{ij} in $X_i \times_S Y$ und in $X_j \times_S Y$ die universelle Eigenschaft von $X_{ij} \times_S Y$. Daher sind sie kanonisch isomorph. Wir verkleben die $X_i \times_S Y$ entlang der $X_{ij} \times_S Y$ und nennen das Ergebnis W. Wir überprüfen die universelle Eigenschaft. Gegeben ein Paar von Morphismen $f' : U \to X$, $g' : Y \to Y$, so erhalten wir durch Einschränken Morphismen $f'_i : f'^{-1}X_i \to X_i$. Wegen der universellen Eigenschaft von $X_i \times_S Y$ erhalten wir Morphismen $v_i : f'^{-1}X_i \to X_i \times_S Y$. Auf den Schnitten $f'^{-1}(X_{ij})$ stimmen sie überein, definieren also einen globalen Morphismus

$U \to W$.

4. Schritt: Seien nun X beliebig, Y, S affin. Wir überdecken X durch affine X_i. Schritt 1 zusammen mit Schritt 3 impliziert, dass $X \times_S Y$ existiert.
5. Schritt: S affin, X, Y beliebig. Wir überdecken Y durch affine Y_j. Schritt 4 zusammen mit Schritt 3 impliziert, dass $X \times_S Y$ existiert.
6. Schritt: Seien nun X, Y, S beliebig. Gegeben sei $f : X \to S$, $g : Y \to S$. Wir wählen eine affine Überdeckung S_i von S. Seien X_i und Y_i die Urbilder in X bzw. Y. Nach dem 5. Schritt existieren die $X_i \times_{S_i} Y_i$.

Behauptung. *$X_i \times_{S_i} Y_i$ ist das Faserprodukt von X_i und Y über S.*

Gegeben ein Paar von Morphismen $f' : U \to X_i$, $g' : U \to Y$ verträglich mit den Morphismen nach S, so faktorisiert ff' über S_i. Wegen der Verträglichkeit gilt das dann auch für gg'. Damit ist die Voraussetzung für die universelle Eigenschaft von $X_i \times_{S_i} Y_i$ gegeben.
Wir wenden nun Schritt 3 ein letztes Mal an. □

Dem Namen Faserprodukt wollen wir etwas mehr Sinn geben.

Definition 3.11. *Sei X eine Prävarietät, $P \in X$ ein Punkt. Dann heißt*

$$\kappa(P) = \mathcal{O}_{X,P}/m_P$$

Restklassenkörper von P.

Lemma 3.12. *$\kappa(P)$ ist eine endliche Erweiterung von k. Es gibt eine natürliche Abbildung von Prävarietäten*

$$\operatorname{Spm} \kappa(P) \to X$$

die den Punkt auf P abbildet.

Beweis: Es genügt den affinen Fall $X = \operatorname{Spm} A$ zu betrachten. Dann ist $\kappa(P) = A/m_P$. Dies ist ein Körper, der als Algebra von endlichem Typ über k ist. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist er eine endliche Körpererweiterung. Die Abbildung von Prävarietäten gehört zum Ringhomomorphismus $A \to \kappa(P)$. □

Definition 3.13. *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus, $P \in Y$ ein Punkt. Die* Faser von f über P *ist definiert als*

$$X_P = X \times_Y \kappa(P)$$

Nun kommen wir endlich zur Lösung unseres Anfangsproblems.

Definition 3.14. *Sei $f : X \to S$ ein Morphismus. Die* relative Diagonale *ist der eindeutige Morphismus*

$$\Delta : X \to X \times_S X$$

dessen Komposition mit beiden Projektionen die Identität ist.
f heißt separiert*, wenn die Diagonale eine abgeschlossen Immersion ist. X heißt* separiert*, wenn die kanonische Abbildung $X \to \operatorname{Spm} k$ separiert ist. Eine separierte Prävarietät heißt* Varietät.

Beispiel. Wir betrachten das Beispiel der Geraden mit doppeltem Nullpunkt. Dann hat $X \times X$ verdoppelte Koordinatenachsen und sogar 4 Nullpunkte. Die Diagonalabbildung trifft nur zwei dieser Nullpunkte. Das Bild ist nicht abgeschlossen, denn alle 4 Doppelpunkte liegen im Abschluss der Diagonalen.

Satz 3.15. *Ist $f : X \to Y$ Morphismus von affinen Varietäten, so ist f separiert. Insbesondere sind affine Varietäten separiert.*

Beweis: $X = \operatorname{Spm} A$, $Y = \operatorname{Spm} B$, also $X \times_Y X = \operatorname{Spm} A \otimes_B A$. Die Diagonalabbildung wird induziert vom Algebrenhomomorphismus

$$A \otimes_B A \to A \qquad a \otimes a' \mapsto aa'$$

Diese Abbildung ist surjektiv, definiert also auf Niveau der Prävarietäten eine abgeschlossene Immersion. □

Satz 3.16. *Morphismen zwischen Varietäten sind separiert.*

Das folgt durch Zusammensetzen der folgenden Aussagen:

Lemma 3.17. *Seien $f : X \to S$, $g : Y \to S$ gegeben. Dann ist $X \times_S Y \to X \times Y$ eine abgeschlossene Immersion.*

Beweis: Nach Konstruktion sieht die Abbildung lokal aus wie $A \otimes B \to A \otimes_C B$. Diese Abbildung ist surjektiv. □

Lemma 3.18. *Seien $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, so dass $g \circ f$ und g abgeschlossene Immersionen sind. Dann ist f eine abgeschlossene Immersion.*

Beweis: Ohne Einschränkung ist Z affin. Nach Voraussetzung sind dann auch Y und X affin und die Homomorphismen

$$\mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}(Y), \qquad \mathcal{O}(Z) \to \mathcal{O}(X)$$

surjektiv. Dann ist auch $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ surjektiv. □

Lemma 3.19. *Sei X eine Varietät, U, V offene affine Untervarietäten. Dann ist $U \cap V$ affin.*

Beweis: Wir betrachten $U \times V \subset X \times X$. Dann ist $\Delta^{-1}(U \times V) = U \cap V$. Da Δ eine abgeschlossene Immersion ist, sind Urbilder affiner Teilmengen affin. □

Satz 3.20. *Der projektive Raum ist separiert.*

Korollar 3.21. *Alle quasi-projektiven Varietäten sind separiert.*

Beweis des Satzes: Wir benutzen die Standardüberdeckung $\mathbb{P}^n = \bigcup U_i$ wobei U_i das Komplement der Hyperebene $V(X_i)$ ist. Dann ist $\mathbb{P}^n = \bigcup U_i \times U_j$.

Das Urbild unter der Diagonale ist $U_i \cap U_j$. Wir beschreiben dies in affinen Koordinaten.

$$\begin{aligned} U_i &= \operatorname{Spm} k[y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n] \\ U_j &= \operatorname{Spm} k[y'_0, \dots, y'_{j-1}, y'_{j+1}, \dots, y'_n] \\ U_i \cap U_j &= \operatorname{Spm} k[y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n][y_j^{-1}] \end{aligned}$$

letzteres in den Koordinaten von U_i. Die Abbildung $U_i \cap U_j \to U_i \times U_j$ wird auf Ringen gegeben durch

$$k[y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n, y'_0, \dots, y'_{j-1}, y'_{j+1}, \dots, y'_n] \to k[y_0, \dots, y_{i-1}, y_i, \dots, y_n][y_j^{-1}]$$

mit $y_s \mapsto y_s$, $y'_t \mapsto y_j^{-1} y_t$ (wobei $y_i = 1$ verstanden wird). Diese ist surjektiv. $\square$

Kapitel 4

Eigentliche Morphismen und Vollständigkeit

Der Vollständigkeit halber geben wir auch die Übersetzung des Kompaktheitsbegriffs an. Eine Abbildung von topologischen Mannigfaltigkeiten heißt *eigentlich*, wenn Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

Definition 4.1. *Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Varietäten heißt* eigentlich, *wenn f universell abgeschlossen ist, d.h. für jeden Morphismus $u : U \to Y$ ist*

$$X \times_Y U \to U$$

ein abgeschlossener Morphismus. Eine Varietät heißt eigentlich *oder auch* vollständig, *wenn $X \to \operatorname{Spm} k$ eigentlich ist.*

Beispiel. Offene Immersionen sind i.A. nicht eigentlich, denn sie haben i.A. kein abgeschlossenes Bild.

Beispiel. Abgeschlossene Immersionen sind abgeschlossen. Der Basiswechsel einer abgeschlossenen Immersion ist wieder eine abgeschlossene Immersion, denn lokal sieht er aus wie $Y = \operatorname{Spm} A$, $X = \operatorname{Spm} A/I$, $U = \operatorname{Spm} B$,

$$X \times_Y U = \operatorname{Spm}(A/I \otimes_A B)^{\mathrm{red}} \to \operatorname{Spm} B$$

Damit sind abgeschlossene Immersionen eigentlich.

In der Theorie der Mannigfaltigkeiten sind Bilder kompakter Mengen kompakt.

Satz 4.2. *Sei X vollständig, $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. Dann ist $f(X) \subset Y$ abgeschlossen.*

Beweis: Wir betrachten $\Gamma : X \to X \times Y$ mit $P \mapsto (P, f(P))$.

Behauptung. Γ *ist eine abgeschlossene Immersion.*

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Gamma} & Y \times X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \times f} \\ Y & \xrightarrow{\Delta} & Y \times Y \end{array}$$

ist kartesisch, da es auf U-wertigen Punkten für alle U kartesisch ist. Δ ist eine abgeschlossene Immersion, da Y separabel ist. Als Basiswechsel einer abgeschlossenen Immersion ist Γ abgeschlossene Immersion.
Nach Voraussetzung ist $X \times Y \to Y$ abgeschlossen. Dann ist auch die Komposition $X \to X \times Y \to Y$ abgeschlossen. □

Korollar 4.3. *Sei X vollständig und zusammenhängend, $f : X \to \mathbb{A}^1$. Dann ist f konstant.*

Beweis: $f(X)$ ist eine zusammenhängende, abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^1$, also von der Form $\operatorname{Spm} k[T]/P$ für ein irreduzibles Polynom P. Der zugrunde liegende topologische Raum hat nur einen Punkt. □

Beispiel. Sei $X = \operatorname{Spm} A$ irreduzibel, also A nullteilerfrei. Angenommen, X ist vollständig. Jedes Element ϕ von A definiert einen Morphismus $\phi^* : \operatorname{Spm} A \to \mathbb{A}^1$. Nach dem Korollar ist die Abbildung konstant. Daher erfüllt ϕ eine Polynomgleichung über k. Hieraus folgt, dass $k[\phi]$ endlich-dimensional über k ist. Da A nullteilerfrei ist, ist $k[\phi]$ ein Körper. Daher sind in A alle Elemente $\phi \neq 0$ invertierbar. A ist selbst ein Körper, also (Nullstellensatz) eine endliche Körpererweiterung von k.
Daher sind affine Varietäten genau dann vollständig, wenn sie nulldimensional sind, also aus endlich vielen Punkten bestehen.

Satz 4.4. *$\mathbb{P}^n$ ist vollständig.*

Lemma 4.5. *Sei $I \subset k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Ideal. Dann ist $V(I) = \emptyset$ genau dann, wenn es ein $s > 0$ gibt, so dass*

$$I \supset I(s) = \bigoplus_{i=s}^{\infty} k[X_0, \dots, X_n]_i$$

Hierbei enthält $k[X_0, \dots, X_n]_i$ die Monome vom Grad i (und 0).

Beweis: Sei $I \supset I(s)$. Dann enthält I die Monome der Form X_j^s. Der einzige Punkt $P \in \mathbb{A}^{n+1}$, der Nullstelle aller dieser X_j^s ist, ist der Nullpunkt, definiert also keinen Punkt des $\mathbb{P}^n$.
Sei umgekehrt I ein Ideal mit $V(I) = \emptyset$. Seien $F_1, \dots, F_r$ homogene Erzeuger von I. Sei $m_j = \deg F_j$. Die Polynome $F_1(1, T_1, \dots, T_n), \dots, F_r(1, T_1, \dots, T_n)$ haben keine gemeinsame Nullstelle. Nach dem Nullstellensatz erzeugen sie das Einsideal, d.h. es gibt Polynome $G_1(T_1, \dots, T_n), \dots, G(T_1, \dots, T_n)$, so dass

$$1 = \sum_{i=1}^{r} G_i F_i$$

Wir setzen $T_j = X_j/X_0$ und multiplizieren mit dem Hauptnenner $X_0^{l_0}$. Dies beweist $X_0^{l_0} \in I$. Ebenso gibt es $l_1, \ldots, l_n$ mit $X_i^{l_i} \in I$. Wähle $l \geq l_0, \ldots, l_n$, $s = (l-1)(n+1)+1$, dann hat jedes Monom in $k[X_0, \ldots, X_n]$ vom Grad größer gleich s wenigstens einen Exponenten größer gleich l, liegt also in I. □

Beweis des Satzes: (Vgl. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry, I §5 Theorem 3) Sei U eine beliebige Varietät. Zu zeigen ist, dass $U \times \mathbb{P}^n \to U$ abgeschlossen ist. Ohne Einschränkung ist $U = \operatorname{Spm} A$ affin. Dann ist U abgeschlossen in einem $\mathbb{A}^m$, daher genügt es wiederum nur $U = \mathbb{A}^m$ zu betrachten.
Man überlegt sich leicht, dass jede abgeschlossen Teilmenge Z von $\mathbb{A}^m \times \mathbb{P}^n$ durch eine Menge S von Gleichungen der Form

$$g(y; x) \in k[y_1, \ldots, y_m, x_0, \ldots, x_n]$$

gegeben ist, die homogen in den x_i sind. Wir fixieren Z und endlich viele Gleichungen

$$g_1(y, x), \ldots, g_t(y, x)$$

Sei k_j der (homogene) Grad von g_j in den Variablen x_i.
Zu zeigen ist:

Behauptung. *Die Menge T der $P \in \mathbb{A}^m$, so dass $\{g(P, x) = 0\}$ nicht leer ist, ist abgeschlossen in $\mathbb{A}^m$.*

Sei

$$T_s = \{P \in \mathbb{A}^m | < g_1(P, x), \ldots, g_r(P, x) > \supsetneq I(s)\}$$

Nach dem Lemma gilt $T = \bigcap T_s$. Es genügt also zu zeigen, dass T_s abgeschlossen ist.
Sei $V_s = k[x_0, \ldots, x_n]_s$ der Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad s. Sei $\{M^\alpha\}_\alpha$ eine Aufzählung aller Monome vom Grad s, also eine k-Basis von V_s.
Sei k_j der (homogene) Grad von $g_j(y, x)$ in x. Die Bedingung

$$< g_1(P, x), \ldots, g_r(P, x) > \supset I(s)$$

bedeutet, dass jedes M^α geschrieben werden kann als

$$M^\alpha = \sum_{i=1}^{t} g_i(P, x) F_{i,\alpha}(x)$$

M^α und $g_i(P, x)$ sind homogen. Sei k_i der (homogene) Grad von $g_j(y, x)$ in x. Daher können auch die $F_{i,\alpha}$ homogen gewählt werden und so, dass $F_{i,\alpha} = 0$ falls $k_i > s$ und $\deg F_{i,\alpha} = s - k_i$ falls $k_i \leq s$.
Seien $\{N_i^\beta\}_\beta$ die Monome vom Grad $s - k_i$ in irgendeiner Anordnung. Dann ist M^α eine k-Linearkombination der Polynome $g(P, x)N_i^\beta$ für variables i, β. D.h. die Polynome $g_i(P, x)N_i^\beta$ spannen den k-Vektorraum V_s auf. Umgekehrt gilt

$$< g_1(P, x), \ldots, g_r(P, x) > \supset I(s)$$

wenn der von den Polynomen $g_i(P,x)N_i^\beta$ aufgespannte k-Vektorraum echt in V_s enthalten ist. Wie man eine solche echte Inklusion überprüft wissen wir aus linearer Algebra. Wir schreiben alle Vektoren $g_i(P,x)N_i^\beta$ als Spaltenvektoren in der Basis M^α. Der Rang der Rechtecksmatrix ist genau dann echt kleiner als $\dim V_s$, wenn alle quadratischen $\dim V_s$-Untermatrizen Determinante gleich 0 haben. Für variables P werden die Einträge der Matrix Polynome in y.
T_s ist also definiert als die Verschwindungsmenge der Determinanten der polynomialen Matrizen, also abgeschlossen. $\square$

Definition 4.6. *Ein Morphismus $f : X \to Y$ von Varietäten heißt* projektiv*, wenn er Komposition einer abgeschlossenen Immersion $X \to Y \times \mathbb{P}^n$ und der Projektion $Y \times \mathbb{P}^n \to Y$ ist.*

Korollar 4.7. *Alle projektiven Morphismen sind eigentlich. Insbesondere sind alle projektiven Varietäten vollständig.*

Beweis: Nach dem Satz ist $\mathbb{P}^n \to \operatorname{Spm} k$ eigentlich. Als Basiswechsel ist dann auch $\mathbb{P}^n \times Y \to Y$ eigentlich. Die abgeschlossene Immersion $X \to \mathbb{P}^n$ ist ebenfalls eigentlich. Kompositionen eigentlicher Morphismen sind eigentlich. $\square$

Kapitel 5

Differentialformen - der affine Fall

Es geht darum, die Varietäten zu erkennen, die in Analogie zu Mannigfaltigkeiten stehen.

Beispiel. (i) $V(XY)$ ist die Vereinigung von zwei Geraden. Der Schnittpunkt ist eine Singularität.

(ii) $V(Y^2-X^2(X-1))$ ist irreduzibel, hat aber in $(0,0)$ trotzdem 2 Tangenten, der Punkt ist eine Singularität.

(iii) $V(Y^2-X(X-1)(X-2))$ hat (in Charakteristik ungleich 2) keine Singularität.

Die Charakterisierung aus der Theorie der Mannigfaltigkeiten – lokal wie eine offenen Teilmenge im $\mathbb{A}^n$ – funktioniert nicht. Auch die letzte hat keine offene Teilmenge, die sich offen in $\mathbb{A}^1$ einbetten ließe. (Übungsaufgabe). Schließlich sind alle offenen Teilmengen dicht, das ist zu groß. Wir werden später eine feinere Topologie auf Varietäten einführen, die sich "analytischer" benimmt, und in der die Kurve tatsächlich lokal wie $\mathbb{A}^1$ aussieht. Zunächst nehmen wir aber den traditionellen Zugang.
Untermannigfaltigkeiten kann man mit dem Jacobi-Kriterium und dem Satz über implizierte Funktionen identifizieren. Das funktioniert dann auch algebraisch.

Definition 5.1. *Sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine abgeschlossene Untervarietät mit Verschwindungsideal $< f_1, \ldots, f_m >$. Dann heißt X* glatt*, wenn für alle $P \in X$ die* Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(P)\right)$$

über $\kappa(P)$ den Rang $n - \dim X$ hat.

Ist k nicht algebraisch abgeschlossen, so muss der Funktionswert in $\kappa(P)$ aufgefasst werden.

Bemerkung. Im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers spricht man meist von *nicht-singulären* Varietäten. Das verallgemeinert sich zu den Begriffen *regulär* und *glatt*, die wiederum über perfekten Körpern übereinstimmen. Für uns spielt der zweite Begriff die Hauptrolle.

Beispiel. In unseren Kurvenbeispielen geht es um das Verschwinden des Gradienten.

(i) $V(XY)$. Die Jacobi-Matrix ist (Y, X). Sie verschwindet in $X = Y = 0$.

(ii) $V(Y^2 - X^2(X-1))$. Jacobi-Matrix: $(2X(X-1) + X^2, 2Y) = (X(3X-1), 2Y)$. Sie verschwindet nur, falls $Y = 0$. Da die Punkte auf der Kurve liegen sollen, folgt $0 = X^2(X-1)$, also $X = 0, 1$. Nur für den ersten Wert verschwindet die Jacobi-Matrix.

(iii) $V(Y^2 - X(X-1)(X-2)$: Jacobi-Matrix

$$((X-1)(X-2) + X(X-2) + X(X-1), 2Y) \Rightarrow Y = 0, X = 0, 1, 2$$

Keiner dieser X-Werte ist Nullstelle der Jacobi-Matrix. Die Kurve ist nicht-singulär.

Lemma 5.2. *Die Glattheit von X hängt nicht von der Wahl der Einbettung in den affinen Raum ab.*

Beweis: Seien $f : X \to \mathbb{A}^n$, $g : X \to \mathbb{A}^m$ zwei abgeschlossene Immersionen. Dann gibt es einen Morphismus $\phi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$, so dass $g = \phi \circ f$. Nun heißt es mit Kettenregel rechnen. Wir ersparen uns das und suchen direkt nach einer intrinsischen Reformulierung. $\square$

Kähler-Differentiale

Referenz: Matsumura, Commutative Ring Theory, §25

Definition 5.3. *Sei A ein Ring, B eine A-Algebra und M ein B-Modul. Eine* A-Derivation *von B nach M ist eine Abbildung*

$$d : B \to M$$

so dass

(i) d ist additiver Gruppenhomomorphismus

(ii) $d(bb') = bdb' + b'db$ für alle $b, b' \in B$ (Leibniz-Regel)

(iii) $da = 0$ für alle $a \in A$.

Beispiel. $A = \mathbb{R}$, $B = M$ der Ring der C^∞-Funktionen auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist partielles Ableiten nach einer Variablen eine $\mathbb{R}$-Derivation.

Definition 5.4. *Der* Modul der relativen Differentialformen *von B über A ist ein B-Modul $\Omega_{B/A}$ zusammen mit einer A-Derivation*

$$d : B \to \Omega_{B/A}$$

so dass es für jeden B-Modul M und jede A-Derivation $d' : B \to M$ einen eindeutigen B-Modulhomomorphismus $f : \Omega_{B/A} \to M$ gibt mit $d' = f \circ d$.

Lemma 5.5. *Der Modul der relativen Differentialformen existiert und ist eindeutig.*

Beweis: Die Eindeutigkeit folgt aus der universellen Eigenschaft.
Existenz: Sei F der freie Modul mit Basis die Symbole db für $b \in B$. Sei R der Untermodul von Relationen, der von Ausdrücken der Form

(i) $d(b + b') - db - db'$ für alle $b, b' \in B$

(ii) $d(bb') - bdb' - b'db$ für alle $b, b' \in B$

(iii) da für alle $a \in A$

erzeugt wird. Sei $\Omega_{B/A} = F/R$. Offensichtlich ist $d : B \to \Omega_{B/A}$ mit $d(b) = db$ eine Derivation. Ist $d' : B \to M$ eine andere Derivation, so definiert $f(db) = d'b$ die gesuchte B-lineare Abbildung, denn f respektiert die Relationen in R. $\square$

Beispiel. A beliebig, $B = A[T_1, \dots, T_n]$. Nach Konstruktion wird $\Omega_{B/A}$ als B-Modul von den dP erzeugt, wobei P ein beliebiges Polynom ist. Die Rechenregeln für Derivationen implizieren aber

$$dP = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial T_i} dT_i$$

also genügen als Erzeuger die dT_i.

Behauptung. *$dT_1, \dots, dT_n$ sind B-linear unabhängig in $\Omega_{B/A}$.*

Sei $\sum f_i dT_i$ eine Relation. Die Derivation

$$\frac{\partial}{\partial T_i} : A[T_1, \dots, T_n] \to A[T_1, \dots, T_n]$$

faktorisiert eindeutig über $\phi_i : \Omega_{B/A} \to B$. Es folgt

$$\phi_i(dT_j) = \frac{\partial T_j}{\partial T_i} = \delta_{ij}$$

Wenden wir ϕ_i auf die Relation an, so erhalten wir $f_i = 0$. Dies gilt für alle i, diese sind linear unabhängig.
Insgesamt ist also $\Omega_{A[T_1,\dots,T_n]/A}$ ein B-Modul, vom Rang n. Man beachte noch: Ist $A = k$ ein Körper, so ist $n = \dim \mathbb{A}^n = \dim \operatorname{Spm} k[T_1, \dots, T_n]$.

Beispiel. Sei $A = k$ Körper, $B = k[x, y]/xy$. Dann wird $\Omega_{B/k}$ von dx und dy erzeugt. Ausserdem gilt die Relation

$$0 = d(xy) = xdy + ydx \Rightarrow xdx = -ydy$$

Um zu sehen, dass dies wirklich die einzige Relation ist, müssen wir ein paar Rechenregeln beweisen.

Definition 5.6. *Sei A ein Ring, $\tilde{B}$ eine A-Algebra und $N \subset \tilde{B}$ ein Ideal mit $N^2 = 0$. Sei $B = \tilde{B}/N$.*

$$0 \to N \to \tilde{B} \xrightarrow{f} B \to 0$$

Dann heißt $\tilde{B}$ Erweiterung von B durch A. Die Erweiterung heißt trivial *oder* zerfallend *(split), wenn es einen A-Algebrenhomomorphismus $\phi : B \to \tilde{B}$ gibt, so dass $f\phi = \mathrm{id}$, d.h. $\tilde{B} \cong B \oplus N$ als A-Modul.*
Sei $g : C \to B$ ein A-Algebrenhomomorphismus. Ein A-Algebrenhomomorphismus $h : C \to \tilde{B}$ heißt Liftung *von g, wenn $g = hf$.*

Bemerkung.

(i) N ist zunächst ein $\tilde{B}$-Modul, wegen der Bedingung $N^2 = 0$ wird es aber auch ein B-Modul.

(ii) Gegeben eine A-Algebra B und einen B-Modul N, so definieren wir eine A-Algebrenstruktur auf $B \oplus N$ mit dem Produkt

$$(b, x)(b', x') = (bb', bx' + b'x) \text{ für alle } b, b' \in B, x, x' \in N$$

Dies sind algebraische Formalisierungen von analytischen Prinzipien.

Beispiel. Sei $A = k$ ein Körper, $B = k[T]/(T^i)$. Dann ist $\tilde{B} = k[T]/(T^{i+1})$ eine Erweiterung durch den Modul $N = (T^i)/(T^{i+1}) \cong k$. Ein Morphismus $k[X] \to B$ besteht in der Angabe eines Anfangsstücks einer Potenzreihe in T, die Liftung in der Wahl eines Koeffizienten vor T^i.

Lemma 5.7. *Sei A ein Ring, B eine A-Algebra und $\tilde{B}$ eine Erweiterung von B mit Kern N. Weiter sei $g : C \to B$ ein A-Algebrenhomomorphismus, $h : C \to \tilde{B}$ eine Liftung. Dann gibt es eine natürliche Bijektion zwischen den Liftungen von g und den A-Derivationen von C nach N.*

Beweis: Sei $D : C \to N$ eine Derivation, $h' = h + D : C \to \tilde{B}$. Dann ist $fh' = fh + fD = fh = g$. h' ist A-linear. Z.z. bleibt, dass h' mit der Multiplikation verträglich ist.

$$\begin{aligned}
h'(cc') &= (h + D)(cc') = h(cc') + D(cc') = h(c)h(c') + cD(c') + c'D(c) \\
h'(c)h'(c) &= (h(c) + D(c))(h(c') + D(c')) \\
&= h(c)h(c') + h(c)D(c') + D(c)h(c') + D(c)(D(c')
\end{aligned}$$

Der Summand $D(c)D(c')$ liegt in N^2, ist also 0. Da $D(c') \in N$, hängt das Produkt $h(c)D(c')$ nur vom Bild von $h(c)$ in B ab, also von $g(c)$, d.h. $h(c)D(c') = cD(c')$.

Sei umgekehrt h' eine weitere Liftung. Wir betrachten $h - h'$. Wegen $fh = fh'$ hat sie Werte in N. Nach Voraussetzung ist die Abbildung A-linear. N ist ein B-Modul, also via g auch ein C-Modul. Die Überprüfung der Leibniz-Regel geht analog zu oben. □

Satz 5.8. *Sei B eine A-Algebra, $f : B \otimes_A B \to B$ der "Diagonalhomomorphismus" $b \otimes b' \mapsto bb'$ und $I = \operatorname{Ker} f$. Dann ist I/I^2 mit der B-Modulstruktur über den ersten Faktor und der Derivation $d : B \to I/I^2$, $db = 1 \otimes b - b \otimes 1$ ein Modul von relativen Differentialformen für B über A.*

Beweis: f ist B-linear, wenn $B \otimes_A B$ mit der angegebenen skalaren Multiplikation versehen wird. Daher sind I und I/I^2 ebenfalls B-Moduln.
Sei $\tilde{B} = B \otimes_A B/I^2$. Dann ist

$$0 \to I/I^2 \to \tilde{B} \to B$$

eine Erweiterung. Die Abbildungen $\lambda_i : B \to \tilde{B}$ mit $\lambda_1(b) = b \otimes 1 \mod I^2$, $\lambda_2(b) = 1 \otimes b \mod I^2$ sind beides Liftungen der Identität. Insbesondere ist ihre Differenz $d = \lambda_2 - \lambda_1$ eine Derivation. Gleichzeitig haben wir gezeigt, dass die Erweiterung trivial ist, also $\tilde{B} \cong B \oplus I/I^2$ mit der oben konstruierten Multiplikation.
Nun müssen wir Universalität überprüfen. Sei $D : B \to M$ eine Derivation. Wir definieren

$$\phi : B \otimes_A B \to B \oplus M \qquad x \otimes y \mapsto (xy, xDy)$$

Dies ist ein A-Algebrenhomomorphismus, denn

$$\begin{aligned}
\phi(x \otimes y \cdot x' \otimes y') &= \phi(xx' \otimes yy') = (xx'yy', xx'D(yy')) \\
&= (xx'yy', xx'yD(y') + xx'y'D(y)) \\
\phi(x \otimes y)\phi(x' \otimes y') &= (xy, xD(y))(x'y', x'D(y')) \\
&= (xyx'y', xyx'D(y') + x'y'xD(y))
\end{aligned}$$

Sei $\sum x_i \otimes y_i \in I$, also $\sum x_i y_i = 0$. Dann folgt

$$\phi(\sum x_i \otimes y_i) = (\sum x_i y_i, \sum x_i D y_i) \in 0 \oplus M$$

also $\phi : I \to M$, $\phi : I^2 \to M^2 = 0$. Dies induziert

$$\overline{\phi} : I/I^2 \to M$$

Behauptung. $\overline{\phi} d = D$

$$\phi(1 \otimes b - b \otimes 1) = (b, 1Db) - (b, bD1) = (0, Db - bD1) = (0, Db)$$

Behauptung. *I/I^2 wird erzeugt von den Elementen db für $b \in B$.*

Dann ist die Definition von $\overline{\phi}$ auch eindeutig und die universelle Eigenschaft gilt.
Für jedes $b \otimes b' \in \tilde{B}$ gilt

$$b \otimes b' = (b \otimes 1)(1 \otimes b' - b' \otimes 1) + bb' \otimes 1 = bdb' + bb' \otimes 1$$

und daher für $\sum x_i \otimes y_i \in I$

$$\sum x_i \otimes y_i = \sum x_i dy_i + \sum x_i y_i = \sum x_i dy_i$$

□

Definition 5.9. *Eine A-Algebra R heißt* formal glatt über A, *wenn für jede Erweiterung von A-Algebren*

$$0 \to N \to \tilde{B} \to B \to 0$$

die natürliche Abbildung auf A-Algebrenhomomorphismen

$$\mathrm{Hom}_A(R, \tilde{B}) \to \mathrm{Hom}_A(R, B)$$

surjektiv ist, d.h. jeder Homomorphismus nach B hat eine Liftung.
Eine A-Algebra R heißt formal unverzweigt über A, *wenn*

$$\mathrm{Hom}_A(R, \tilde{B}) \to \mathrm{Hom}_A(R, B)$$

injektiv ist, d.h. Liftungen sind eindeutig, wenn sie existieren.
Eine A-Algebra R heißt formal étale, *wenn sie formal glatt und formal unverzweigt ist, d.h. die Abbildung ist bijektiv, d.h. die Liftungen existieren und sind eindeutig.*

Formal étale bzw. étale Abbildungen zwischen k-Algebren von endlichem Typ werden bei uns noch sehr wichtig werden.

Lemma 5.10. *R/A ist genau dann formal unverzweigt, wenn $\Omega_{R/A} = 0$.*

Beweis: Sei die Erweiterung formal unverzweigt. Wir betrachten die universelle Erweiterung

$$0 \to \Omega_{R/A} \to \tilde{R} \to R \to 0$$

Sie spaltet, d.h. es existiert ein Lift. Da dieser eindeutig sein soll, ist $\mathrm{Der}_A(R, \Omega_{R/A}) = 0$, insbesondere $d = 0$ und dann auch $\Omega_{R/A}$.
Ist umgekehrt $\Omega_{R/A} = 0$, so gibt es keine A-Derivationen auf R, nach Lemma 5.7 sind dann alle Liftungen eindeutig. □

Beispiel. Sei $R = A[T_1, \ldots, T_n]$. Wir betrachten A-Algebrenhomomorphismen $\mathrm{Hom}_A(R, B) = B^n$. Die Surjektivität von $\tilde{B} \to B$ impliziert die von $\tilde{B}^n \to B^n$. Der Polynomring ist formal glatt.

Beispiel. Sei A ein Ring, $S \subset A$ eine multiplikative Menge und $R = S^{-1}A$. Wir betrachten

$$\mathrm{Hom}_A(S^{-1}A, \tilde{B}) \to \mathrm{Hom}_A(S^{-1}A, B)$$

für eine Erweiterung. Ein Homomorphismus von $S^{-1}A$ nach $\tilde{B}$ oder B ist jeweils eindeutig bestimmt durch die Werte auf A, also durch die A-Modulstruktur. Damit ist $S^{-1}A$ formal unverzweigt. Ein Homomorphismus von $S^{-1}A$ nach $\tilde{B}$ bzw. B existiert, wenn die Bilder von S Einheiten in $\tilde{b}$ bzw. B sind.

Behauptung. *Ein Element von $\tilde{B}$ ist genau dann eine Einheit, wenn das Bild in B eine Einheit ist.*

Sei $u \in \tilde{B}$ eine Einheit modulo N, d.h. es existiert $u' \in \tilde{B}$ und $n \in N$ mit

$$uu' = 1 + n \Rightarrow uu'(1-n) = (1+n)(1-n) = 1 - n^2 = 1$$

Damit ist u invertierbar.
Dies bedeutet, dass $S^{-1}A$ sogar formal étale ist. Insbesondere gilt $\Omega_{S^{-1}A/A} = 0$. Dasselbe kann man auch zu Fuss sehen: Für $a \in A, s \in S$ folgt

$$d(a/s) = s^{-1}da - \frac{a}{s^2}ds = 0$$

Theorem 5.11 (Erste fundamentale exakte Sequenz)**.** *Seien $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ Ringhomomorphismen. Dann ist die Sequenz*

$$\Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega_{C/A} \xrightarrow{\beta} \Omega_{C/B} \to 0$$

mit

$$\alpha(d_{B/A}b \otimes c) = cd_{C/A}g(b)$$
$$\beta(d_{C/A}c) = d_{C/B}c$$

exakt. Ist zusätzlich C formal glatt über B, dann ist die erweiterte Sequenz

$$0 \to \Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega_{C/A} \xrightarrow{\beta} \Omega_{C/B} \to 0$$

split-exakt.

Beispiel. Sei $A = k$ ein Körper, $B = k[X_1, \ldots, X_n]$, $C = B[Y_1, \ldots, Y_m]$. Dann ist

$$\Omega_{B/k} =< dX_1, \ldots, dX_n >_B$$
$$\Omega_{C/k} =< dX_1, \ldots, dX_n, dY_1, \ldots, dY_m >_C$$
$$\Omega_{C/B} =< dX_1, \ldots, dX_n >_C$$

Beweis: Um die Exaktheit einer Sequenz $N' \xrightarrow{a} N \xrightarrow{b} N''$ von C-Moduln zu zeigen, genügt es für jeden B-Modul T die Exaktheit der Sequenz

$$\mathrm{Hom}_B(N', T) \xleftarrow{a^*} \mathrm{Hom}_B(N, T) \xleftarrow{b^*} \mathrm{Hom}_B(N'', T)$$

zu überprüfen. (Mit $T = N''$ erhalten wir $a^*b^*(\mathrm{id}_T) = 0$ und daher $ba = 0$; mit $T = N/\operatorname{Im} a$ sieht man leicht $\operatorname{Ker} b = \operatorname{Im} a$.) Wir müssen also zeigen, dass

$$\mathrm{Der}_A(B,T) \leftarrow \mathrm{Der}_A(C,T) \leftarrow \mathrm{Der}_B(C,T) \leftarrow 0$$

exakt ist. Das ist offensichtlich wahr.
Sei weiterhin T ein C-Modul, zusätzlich C formal glatt über B. Sei $D \in \mathrm{Der}_A(B,T)$. Wir betrachten die triviale Erweiterung

$$0 \to T \to C \oplus T \to C \to 0$$

Wie bisher wird $C \oplus T$ auch zu einer B-Algebra via $b \mapsto (g(b), Db)$. Nach Voraussetzung hat die Identität $C \to C$ einen Lift zu einem B-Algebrenhomomorphismus $h : C \to C \oplus T$. Dieser hat die Form $h(c) = (c, D'c)$ mit einer Derivation D'. Dieser entspricht einer C-linearen Abbildung $\alpha' : \Omega_{C/A} \to T$. Wir setzen nun speziell $T = \Omega_{B/A} \otimes C$ und D mit $D(b) = d_{B/A}(b) \otimes 1$. Dann impliziert $D = D' \circ g$ gerade $\alpha'\alpha = 1_T$. Dies ist die gesuchte Spaltung. □

Korollar 5.12. *Sei A ein Ring, B eine A-Algebra, $S \subset B$ eine multiplikative Menge. Dann gilt*

$$\Omega_{S^{-1}B/A} = S^{-1}\Omega_{B/A}$$

Beweis: Die Erweiterung $S^{-1}B/B$ ist formal étale, also formal glatt. In der kurzen exakten Sequenz des Theorems verschwindet der Term $\Omega_{S^{-1}B/B}$, d.h.

$$\Omega_{B/A} \otimes_B S^{-1}B \cong \Omega_{S^{-1}B/A}$$

und der linke Modul ist natürlich isomorph zu $S^{-1}\Omega_{B/A}$. □

Bemerkung. Wenn wir demnächst anfangen zu garbifizieren, dann ist diese Information entscheidend.

Theorem 5.13 (Zweite fundamentale exakte Sequenz). *Seien $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ Ringhomomorphismen, g surjektiv mit Kern $\mathfrak{m}$. Dann ist die Sequenz*

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega_{C/A} \to 0$$

mit

$$\delta(x) = d_{B/A}x \otimes 1$$

exakte Sequenz von C-Moduln. Ist C formal glatt über A, dann ist

$$0 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega_{C/A} \to 0$$

split-exakt.

Beispiel. Sei $A = k$ ein Körper, $B = k[X,Y]$, $C = k[X]$. Dann ist $\mathfrak{m} = Yk[X,Y]$. Wie bisher

$$\Omega_{C/k} = < dX >_{k[X]}$$
$$\Omega_{B/k} \otimes_B C = < dX, dY >_{k[X]}$$

Schließlich wird $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ als $k[X,Y]$-Modul von Y erzeugt. Das Polynom Y operiert aber durch Multiplikation mit 0, da $Y^2 = 0 \mod \mathfrak{m}^2$. Daher ist es ein $k[X]$-Modul und als solcher auch frei vom Rang 1.

Beweis: Die Surjektivität von α folgt aus der ersten fundamentalen Sequenz, da $\Omega_{C/B} = 0$.
Wir nehmen wieder einen beliebigen C-Modul T und betrachten

$$\mathrm{Hom}_C(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, T) \xleftarrow{\delta^*} \mathrm{Der}_A(B,T) \xleftarrow{\alpha^*} \mathrm{Der}_A(C,T)$$

Für $D \in \mathrm{Der}_A(B,T)$ gilt $\delta^*(D) = 0$, wenn $D(\mathfrak{m}) = 0$, d.h. D kann als Derivation auf $C = B/\mathfrak{m}$ betrachtet werden. Die Sequenz ist exakt.
Sei nun zusätzlich C formal glatt über A. Wir betrachten die Erweiterung

$$0 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to B/\mathfrak{m}^2 \to C \to 0$$

Die Identität $C \to C$ liftet zu einem A-Algebrenhomomorphismus $s : C \to B/\mathfrak{m}^2$, d.h. die Erweiterung spaltet. Wie bisher erhalten wir eine Derivation $D : B/\mathfrak{m}^2 \to \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Sei nun $\psi \in \mathrm{Hom}_C(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, T)$ ein Modulhomomorphismus. Die Komposition

$$D' : B \to B/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{D} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\psi} T$$

ist eine A-Derivation auf B mit $\delta^*(D') = \psi$, denn für jedes $x \in \mathfrak{m}$ mit $\overline{x} = x \mod \mathfrak{m}^2$ gilt

$$D'(x) = \psi(D(\overline{x})) = \psi(\overline{x} - sg(\overline{x})) = \psi(\overline{x})$$

Damit ist δ^* surjektiv. Speziell mit $T = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ erhalten wir die gesuchte Spaltung der Sequenz von Differentialformenmoduln. $\square$

Korollar 5.14. *Sei k ein Körper, $B = k[X_1, \dots, X_n]/ < f_1, \dots, f_m >$ eine k-Algebra von endlichem Typ. Dann gilt*

$$\Omega_{B/k} = F/R$$

wobei F der freie B-Modul mit Basis dT_i $(i = 1, \dots, n)$ und R der Untermodul, der von den

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial X_i} dT_i \qquad j = 1, \dots, m$$

erzeugt wird.

Beweis: Wir setzen in der zweiten fundamentalen Sequenz $A = k[X_1, \dots, X_n]$. Dessen Differentialformenmodul ist genau F. Weiterhin ist $\mathfrak{m} =< f_1, \dots, f_m >$ und $R = \delta\mathfrak{m}$. $\square$

Beispiel. Sei k ein Körper, K/k einfache Körpererweiterung. Sei zunächst $K = k[X]/P$ endlich. Dann gilt

$$\Omega_{K/k} = KdX/P'dX$$

Hier sind zwei Fälle möglich: Wenn die Ableitung identisch verschwindet, so ist $\Omega_{K/k} = K$. Die Erweiterung ist inseparabel. Wenn sie nicht identisch verschwindet, dann ist sie auch ungleich $0 \mod P$, da $\deg P' < \deg P$. Dann ist $\Omega_{K/k} = 0$ und die Erweiterung separabel.
Sei nun K/k nicht endlich, also $K = k(T)$. Dies ist die Lokalisierung von $k[T]$ und $\Omega_{K/k} \cong K$.
Allgemein folgt (Übungsaufgabe), dass K/k genau dann separabel ist, wenn

$$\dim_K \Omega_{K/k} = \mathrm{trdeg} K/k$$

Kapitel 6

Die Differentialformengarbe

Sei X eine Varietät über dem Körper k. Wir wollen auf X eine Garbe Ω_X definieren, die für jede offene affine Untervarietät U den Wert $\Omega_X(U) = \Omega_{\mathcal{O}(U)/k}$ hat. Dafür betrachten wir erst allgemeine Modulgarben.

Definition 6.1. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein geringter Raum. Eine $\mathcal{O}_X$-*Modulgarbe *ist eine Garbe $\mathcal{F}$ von abelschen Gruppen, so dass für jede offene Teilmenge $U \subset X$ die Gruppe $\mathcal{F}(U)$ mit einer $\mathcal{O}_X(U)$-Modulstruktur versehen ist und für jede Inklusion $V \subset U$ das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ {\scriptstyle \varrho\times\varrho}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \varrho} \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V) \end{array}$$

kommutiert. Ein Morphismus von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben ist ein Garbenhomomorphismus $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ zwischen $\mathcal{O}_X$-Modulgarben, so dass für jede offene Teilmenge die Abbildung $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ ein $\mathcal{O}_X(U)$-Modulhomomorphismus ist.

Bemerkung. Kern, Kokern und Bild eines $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus sind $\mathcal{O}_X$-Moduln. $\mathcal{O}_X$-Untermodulgarben von $\mathcal{O}_X$ heißen *Idealgarben.* Direkte Summen von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben sind $\mathcal{O}_X$-Modulgarben. Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ beide $\mathcal{O}_X$-Modulgarben, so wird $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ definiert als Garbifizierung von $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{G}(U)$.

Beispiel. Sei $X = \operatorname{Spm} A$ eine affine Varietät, M ein A-Modul. Dann gibt es eine eindeutige $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\tilde{M}$ auf X mit

$$\tilde{M}(U_f) = M_f$$

für alle standardoffenen U_f. Die Formel ist die gleiche wie in der Definition der Strukturgarbe selbst:

$$\tilde{M}(U) = \{s : U \mapsto \prod_{P \in U} M_P | s(P) \in M_P, (*)\}$$

wobei $(*)$ die Bedingung ist: Für jedes $P \in U$ existiert eine standardoffene Menge U_f und ein $t \in M_f$ so dass $t_Q = s(Q)$ für alle $Q \in U_f$. Dass dies eine Garbe mit der behaupteten Eigenschaft ist, folgt wie für $\mathcal{O}_X = \tilde{A}$ selbst. Nach Konstruktion ist für jeden Punkt $P \in X$

$$\tilde{M}_P = M_{m_P}$$

Ist speziell $M = I$ ein Ideal von A, so ist $\mathcal{I} = \tilde{I}$ eine Idealgarbe. Es folgt $(A/I)^\sim \cong \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$. Wir berechnen die Halme dieser Garbe:

$$(A/I)^\sim_P = A_{m_P}/I_{m_p}$$

verschwindet, sobald I Elemente aus $A \smallsetminus m_P$ enthält, also nicht ganz in m_P enthalten ist. Das gilt genau dann, wenn $P \notin V(I)$. Sei zusätzlich I reduziert, $Y = \operatorname{Spm} A/I$, $i : Y \to X$ die abgeschlossen Immersion. Dann induziert $\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$ eine Isomorphismus

$$\mathcal{O}_X/\mathcal{I} \cong i_*\mathcal{O}_Y$$

denn die Abbildung auf globalen Schnitten ist die Identität.

Beispiel. Sei $X \to Y$ Morphismus von affinen Varietäten. Wir setzen

$$\Omega_{X/Y} = (\Omega_{\mathcal{O}(X)/\mathcal{O}(Y)})^\sim$$

Nach Korollar 5.12 ist dann

$$\Omega_{X/Y}(U_f) = \Omega_{\mathcal{O}(X)_f/\mathcal{O}(Y)}$$

für alle standardoffenen $U_f \subset X$.

Diese Konstruktion werden wir nun zusammenkleben.

Definition 6.2. *Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ heißt* kohärent, *wenn es eine offene affine Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von X gibt, so dass $\mathcal{F}|_{U_i} = \mathcal{F}(U_i)^\sim$ und $\mathcal{F}(U_i)$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_X(U_i)$-Modul ist.*

Beispiel. Allgemein: Ist $Y \to X$ eine abgeschlossene Immersion, so ist die induzierte Abbildung

$$\mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y$$

ein surjektiver Homomorphismus von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben. Der Kern $\mathcal{I}$ ist eine Idealgarbe. $i_*\mathcal{O}_Y$ und $\mathcal{I}$ sind kohärent, da alle auftretenden Ringe noethersch sind.

Definition 6.3. *Sei $f : X \to Y$ ein Varietätenhomomorphismus, $\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe auf Y. Dann heißt*

$$f^*\mathcal{F} = f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$$

inverses Bild von $\mathcal{F}$.

Offensichtlich ist $f^*\mathcal{F}$ eine $\mathcal{O}_Y$-Modulgarbe.

Beispiel. Sei $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$, dann ist $f^*\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$.

Lemma 6.4. *Wenn $\mathcal{F}$ kohärent ist, dann auch $f^*\mathcal{F}$.*

Beweis: Ohne Einschränkung ist $Y = \operatorname{Spm} A$ affin, $\mathcal{F} = \tilde{M}$ für einen endlich erzeugten A-Modul. Da die Aussage lokal auf X ist, kann ohne Einschränkung $X = \operatorname{Spm} B$ ebenfalls als affin angenommen werden. f induziert einen Ringhomomorphismus $f^\# : A \to B$.

Behauptung. $f^*\mathcal{F} = (M \otimes_A B)^\sim$

Wir betrachten globale Schnitte:

$$f^{-1}\mathcal{O}_X(Y) = \lim_{f(Y)\subset U_s} \mathcal{O}_X(U_f) = S^{-1}A$$
$$f^{-1}\mathcal{F}(Y) = \lim_{f(Y)\subset U_s} \tilde{M}(V) = S^{-1}M$$

wobei S die multiplikative Menge der $s \in A$ ist mit $s \notin m_{f(P)}$ für alle $P \in X$ oder äquivalent mit $f^\#(s) \notin m_P$ für alle $P \in X$ oder äquivalent mit $f^\#(s)$ invertierbar in B. Nach Definition gilt also

$$f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X = S^{-1}M \otimes_{S^{-1}A} B \cong M \otimes_A B$$

Dies ist ein endlich erzeugter B-Modul. Die analoge Rechnung funktioniert auch für alle standardoffenen in Y. $\square$

Definition 6.5. *Sei $f : X \to Y$ Morphismus von Varietäten. Sei $\Omega_{X/Y}$ die eindeutige $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe, so dass für jede offene affine Teilmenge $U \subset X$ und jede offene affine Teilmenge $V \subset Y$ mit $f(U) \subset V$ gilt*

$$\Omega_{X/Y}(U) = \Omega_{\mathcal{O}(U)/\mathcal{O}(V)}$$

Sie heißt relative Differentialformengarbe *von X. Speziell für $X = \operatorname{Spm} k$ schreiben wir auch Ω_X.*

Satz 6.6. *Sei $\Delta : X \to X \times X$ und $\mathcal{I}$ die zugehörige Idealgarbe. Dann gilt*

$$\Omega_X := \Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$$

Insbesondere ist Ω_X wohldefiniert und kohärent.

Beweis: Sei also $U \subset X$ affin. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & U \times U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \times X \end{array}$$

kartesisch. Daher ist $\Delta_*\mathcal{O}_X|_{U\times U} = \Delta_*\mathcal{O}_U$ und $\mathcal{I}|_{U\times U}$ ist die Idealgarbe der Inklusion $U \to U \times U$. Ohne Einschränkung können wir also $X = U = \operatorname{Spm} A$

als affin annehmen. Dann ist $\mathcal{I} = \tilde{I}$, wobei I der Kern von $A \otimes_k A \to A$ ist. Aus der Rechnung im letzten Lemma sehen wir

$$\Delta^*(\mathcal{I}/\mathcal{I})(X) = A \otimes_{A\otimes A} I/I^2 = I/I^2$$

Die letzte Gleichheit gilt, da in der exakten Sequenz

$$I \otimes_{A\otimes A} I/I^2 \to (A \otimes A) \otimes_{A\otimes A} I/I^2 \to (A \otimes A)/I \otimes_{A\otimes A} I/I^2 \to 0$$

die erste Abbildung über $I \cdot I/I^2 = 0$ faktorisiert.
Nach Satz 5.8 ist I/I^2 ein Modul von Differentialformen für A. □

Bemerkung. Das selbe Argument funktioniert fast in der relativen Situation. Unser Problem ist die Definition des Faserproduktes: $X \times_Y X$ sieht lokal aus wie $\mathrm{Spm}(A \otimes_B A)^{\mathrm{red}}$, aber in Satz 5.8 kommt $A \otimes_B A$ vor. Im Allgemeinen ist dieser Ring nicht reduziert.

Theorem 6.7 (Erste fundamentale exakte Sequenz). *Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Morphismen von Varietäten. Dann gibt es eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_X$-Modulgarben*

$$f^*\Omega_{Y/Z} \to \Omega_{X/Z} \to \Omega_{X/Y} \to 0$$

Insbesondere ist die Garbe der relativen Differentialformen wohldefiniert und kohärent.

Beweis: In der affinen Situation ist dies genau Theorem 5.11. Für $Z = \mathrm{Spm}\, k$ sind die ersten beiden Terme wohldefiniert und kohärent. Als Kokern gilt dies dann auch für $\Omega_{X/Y}$. □

Theorem 6.8 (Zweite fundamentale exakte Sequenz). *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus und $Z \subset X$ eine abgeschlossene Untervarietät mit Idealgarbe $\mathcal{I}$. Dann gibt es eine exakte Sequenz von $\mathcal{O}_Z$-Modulgarben*

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_Z \to \Omega_{Z/Y} \to 0$$

Hier wird nicht mehr zwischen Garben auf X, die von $\mathcal{I}$ annulliert werden, und Garben auf Z unterschieden. Sauberer lautet die Sequenz:

$$i^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \xrightarrow{\delta} i^*\Omega_{X/Y} \to \Omega_{Z/Y} \to 0$$

Beweis: In der affinen Situation ist das genau Theorem 5.13 □

Glatte Varietäten

Definition 6.9. *Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ heißt* frei, *wenn sie isomorph ist zu $\bigoplus_{s\in S} \mathcal{O}_X$. Die Mächtigkeit von S heißt* Rang. *Eine $\mathcal{O}_X$-Modulgarbe $\mathcal{F}$ heißt* lokal-frei, *wenn es eine offene Überdeckung $\{U_i\}_{i\in I}$ von X gibt, so dass $\mathcal{F}|_{U_i}$ frei sind.*

Der Rang einer lokal-freien Garbe ist lokal-konstant. Lokal-freie Garben von endlichem Rang sind automatisch kohärent.

Definition 6.10. *Sei X eine Varietät. X heißt* glatt, *wenn Ω_X lokal frei vom Rang gleich der Dimension von X ist.*

Beispiel. $\mathbb{A}^n$ ist glatt, denn $\Omega_{\mathbb{A}^n} =< dX_1, \dots, dX_n >$ ist ein freier Modul.

Lemma 6.11 (Nakayama)**.** *Sei R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal m, sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann gilt*

$$mM = 0 \Rightarrow M = 0$$

Beweis: Seien $x_1, \dots, x_n$ Erzeuger von M. Nach Voraussetzung gibt es $a_{ij} \in m$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = x_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} - a_{ij}) x_j = 0$$

Multiplikation von links mit der adjungierten Matrix von $(\delta_{ij} - a_{ij})$ impliziert, dass $x = \det(\delta_{ij} - a_{ij})$ alle Erzeuger annihiliert. Es gilt $x = \det(\delta_{ij}) = 1 \mod m$. Da R lokal ist, ist x invertierbar, also

$$M = x^{-1} x M = 0$$

□

Lemma 6.12. *Sei X Varietät, $\mathcal{F}$ kohärente Garbe auf X. Dann ist $\mathcal{F}$ genau dann lokal-frei vom Rang n, wenn für alle $P \in X$ mit zugehöriger Abbildung $\iota_P : \operatorname{Spm} \kappa(P) \to X$ der $\kappa(P)$-Vektorraum $\iota_P^* \mathcal{F}$ die Dimension n hat.*

$\iota_P^* \mathcal{F}$ heißt auch *Faser* von $\mathcal{F}$ im P, im Unterschied zum *Halm* $\mathcal{F}_P$.

Beweis: Sei $\mathcal{F}$ lokal-frei. Ohne Einschränkung ist $X = \operatorname{Spm} A$ affin, $\mathcal{F}$ frei. Da ι_P^* mit direkten Summen vertauscht, genügt es den Fall $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ zu betrachten. Dann ist $\kappa(P) = A/m_P$ und $\iota_P^* \mathcal{O}_X = \iota_P^* \mathcal{O}_X = A_P \otimes_{A_P} \kappa(P)$ hat die Dimension 1.
Sei nun umgekehrt $\dim \iota_P^* \mathcal{F} = n$ für alle n. Ohne Einschränkung ist $X = \operatorname{Spm} A$ affin, $\mathcal{F} = \tilde{M}$ für einen endlich erzeugten A-Modul $M =< x_1, \dots, x_N >_A$. Sei P ein Punkt, m_P das zugehörige maximale Ideal. Es gilt

$$\iota_P^* \mathcal{F} = \mathcal{F}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} \kappa(P) \cong M_P \otimes_{A_P} \kappa(P) = M/m_P M$$

Da dies ein Vektorraum der Dimension n ist, gibt es n Elemente $f_1, \dots, f_n \in M$, deren Restklassen eine Basis bilden. Wir wenden Nakayamas Lemma an auf $R = A_P$ und den Modul $M_P / < f_1, \dots, f_n >_{A_P}$. Dieser verschwindet modulo m_P, also insgesamt. Daher sind $f_1, \dots, f_n$ Erzeuger von M_P. Dies bedeutet, dass es $a_{ij} \in A_P$ gibt sodass

$$x_i = \sum a_{ij} f_n$$

Die endlich vielen Koeffizienten a_{ij} haben nur endlich viele Nenner in $A \smallsetminus m_P$. Sei s ein Hauptnenner. Dann sagt die Gleichung, dass M_s bereits von $f_1, \ldots, f_n$ erzeugt wird. Wir ersetzen A durch A_s, geometrisch also X durch die standardoffene Umgebung U_s von P. Ab jetzt sind $f_1, \ldots, f_n$ Erzeuger von M.

Behauptung. *$f_1, \ldots, f_n$ sind linear unabhängig.*

Wir betrachten

$$A^n \to M \qquad e_i \mapsto f_i$$

Sei K der Kern. Für jeden Punkt $Q \in \operatorname{Spm} A$ hat $M/m_Q M$ die Dimension n und wird von den Restklassen von $f_1, \ldots, f_n$ erzeugt. Daher sind diese linear unabhängig über $\kappa(Q)$. Dies bedeutet, dass $K/m_Q K = 0$. Nach Nakayamas Lemma folgt $K_{m_Q} = 0$ für alle Q. Ein solcher A-Modul ist trivial (kommutative Algebra, Satz 5.15). Daher ist $A^n \cong M$, der Modul ist frei. □

Definition 6.13. *Sei X Varietät, $P \in X$ mit $\iota_P : \operatorname{Spm} \kappa(P) \to X$. Dann heißt*

$$T_P^* X = \iota_P^* \Omega_X$$

Kotangentialraum von X in P. *Der* Tangentialraum $T_P X$ *von X in P ist der duale Vektorraum.*

Der Kotangentialraum ist eine kohärente Garbe auf $\operatorname{Spm} \kappa(P)$, also ein endlich-dimensionaler $\kappa(P)$-Vektorraum. Tangential- und Kotangentialraum haben dieselbe Dimension.

Korollar 6.14. *Eine Varietät X ist genau dann glatt, wenn alle Kotangentialräume die Vektorraumdimension $\dim X$ haben.*

Satz 6.15. *Sei $X = \operatorname{Spm} k[X_1, \ldots, X_n]/ < f_1, \ldots, f_m >$. Dann ist X genau dann glatt, wenn die Jacobimatrix (siehe Definition 5.1) in allen Punkten den Rang $n - \dim X$ hat.*

Beweis: Sei $A = \mathcal{O}(X)$. Wir berechnen die Kotangentialräume. Wir haben nach Korollar 5.14 eine Präsentation

$$A^m \xrightarrow{\phi} A^n \to \Omega_{A/k} \to 0$$

wobei die erste Abbildung $e_i \mapsto \sum \frac{\partial f_i}{\partial X_j} e'_j$, die zweite $e'_i \mapsto dX_i$ ($(e_1, \ldots, e_m)$ Standardbasis von A^m, $(e'_1, \ldots, e'_n)$ Standardbasis von A^n). Sei P ein Punkt von X. Wir berechnen den Kotangentialraum

$$\kappa(P)^m \xrightarrow{\phi} \kappa(P)^n \to T_P^* X \to 0$$

Die Abbildung ϕ ist Multiplikation mit der Jacobi-Matrix. Daher ist

$$\dim_{\kappa(P)} T_P^* X = n - \mathrm{rk}\phi$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

Wir betrachten nun die zweite fundamentale exakte Sequenz für $P \in X$:

$$m_P/m_P^2 \to \Omega_X \otimes \kappa(P) \to \Omega_{\kappa(P)/k} \to 0$$

Lemma 6.16. *Seien $f_1, \dots, f_n \in m_P$, so dass die Bilder in m_P/m_P^2 eine $\kappa(P)$-Basis sind. Dann gilt $< f_1, \dots, f_n >= m_P$. und $n \geq \dim \mathcal{O}_P$.*

Beweis: Wir betrachten $m' =< f_1, \dots, f_n >$. Nach Voraussetzung ist $m' \to m_P/m_P^2$ surjektiv, d.h. $m_P = m' + m_P^2$. Wir betrachten $M = m_P/m'$. Dann gilt

$$m_P M = m_P(m_P/m') = (m_P^2 + m')/m' = m_P/m' = M$$

Nach Nakayamas Lemma ist $M = 0$. Dies ist die erste Behauptung. Die Elemente $f_1, \dots, f_n$ sind Definitionsgleichungen für den Punkt P in einer Umgebung $U \subset X$ von P. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz geht mit jeder Gleichung die Dimension der Varietät höchstens um 1 herunter, also

$$0 = \dim(U \cap V(f_1, \dots, f_n)) \geq \dim U - n$$

$\square$

Definition 6.17. *Sei R ein lokaler noetherscher Ring mit maximalem Ideal m und Restklassenkörper κ. Dann heißt R* regulär*, falls*

$$\dim R = \dim_\kappa m/m^2$$

Korollar 6.18. *Sei k algebraisch abgeschlossen, X Varietät über k, $P \in X$ ein Punkt. Dann gilt*

$$m_P/m_P^2 \cong T_P^* X$$

Die Varietät ist genau dann glatt, wenn alle lokalen Ringe regulär sind.

Beweis: Wir betrachten die zweite fundamentale exakte Sequenz für $P \in X$. Da k algebraisch abgeschlossen ist, gilt $\kappa(P) = k$. Insbesondere ist die Erweiterung formal glatt. Nach Theorem 5.13 ist die Sequenz

$$0 \to m_P/m_P^2 \to \Omega_X \otimes \kappa(P) \to \Omega_{\kappa(P)/k} \to 0$$

exakt. Der rechte Term verschwindet. $\square$

Bemerkung. Über beliebigen Körpern sind die Begriffe nicht äquivalent. Denn wenn K/k inseparable, endliche Erweiterung, dann ist $X = \operatorname{Spm} K$ nicht glatt über k, da der Kotangentialraum die Dimension 1 hat. Aber der lokale Ring im einzigen Punkt ist K, also regulär der Dimension 0.

Wenn k perfekt ist, geht das Argument durch, denn:

Lemma 6.19. *Sei K/k endlich separabel. Dann ist K/k formal etale.*

Beweis: Formal unverzweigt gilt, da $\Omega_{K/k} = 0$. Wir überprüfen formal glatt. Nach dem Satz vom primitiven Element ist $K = k[X]/P$. Sei

$$0 \to N \to \tilde{B} \to B \to 0$$

eine Erweiterung von k-Algebren, also $N^2 = 0$. Sei $\phi : K \to B$ ein Algebrenhomomorphismus, d.h. $b = \phi(X) \in B$ ist eine Nullstelle von P. Da K ein Körper ist, ist auch $\phi(K) \subset B$ ein Körper. Sei $\tilde{b}$ ein Urbild von b in $\tilde{B}$. Nach Voraussetzung gilt $P(\tilde{b}) \in \tilde{B}$. Gesucht ist $n \in N$ mit

$$0 = P(\tilde{b} + n) = P(\tilde{b}) + P'(\tilde{b})n$$

da $N^2 = 0$. Da K/k separabel ist, gilt $P'(b) \neq 0$. Da $P'(b)$ im Körper $\phi(K)$ liegt, ist das Element invertierbar, d.h. es gibt $b_1 \in B$ mit $b_1 P'(b) = 1$. Sei $\tilde{b}_1$ ein beliebiges Urbild. Es erfüllt

$$\tilde{b}_1 P'(\tilde{b}) - 1 =: n' \in N$$

Dann ist

Behauptung. $n = -\tilde{b}_1 P(\tilde{b})$ *ist das gesuchte Element.*

Es liegt in N, da $P(\tilde{b}) \in N$. Wir rechnen nach:

$$= P(\tilde{b}) - P'(\tilde{b})\tilde{b}_1 P(\tilde{b}) = P(\tilde{b}) - (1 + n')P(\tilde{b}) = -n'P(\tilde{b}) = 0$$

da $N^2 = 0$. □

Wir übergehen weitere Kriterien für glatte Untervarietäten und betrachten statt dessen die relative Situation.
Dasselbe gilt auch höherdimensional.

Satz 6.20. *Sei X glatte affine Varietät. Dann ist $\mathcal{O}(X)$ formal glatt über k.*

Beweis: Wir deuten das Argument nur an. Ähnlich wie oben: wir schreiben $A = \mathcal{O}(X)$ als Quotient des Polynomrings. Das Liften des eines Algebrenhomomorphismus führt auf eine lineare Gleichung, deren Lösbarkeit durch die Bedingung an die Jacobi-Matrix garantiert ist. □

Satz 6.21. *Sei X glatte Varietät, $Y \to X$ glatte abgeschlossene Untervarietät mit Idealgarbe $\mathcal{I}$. Dann ist die Sequenz*

$$0 \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega_X \otimes i_*\mathcal{O}_Y \to \Omega_Y \to 0$$

(vergl. Theorem 6.8) exakt. $\mathcal{I}$ wird lokal von $r = \dim X - \dim Y$ vielen Elementen erzeugt und $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ ist lokal frei vom Rang r.

Beweis: (vergl. Hartshorne, II Thm 8.17) Sei zunächst Y glatt, also lokal formal glatt über k. In der garbifizierten Version von Theorem 5.13 ist dann die Sequenz

$$0 \to \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to \Omega_X \otimes i_*\mathcal{O}_Y \to \Omega_Y \to 0$$

exakt, lokal sogar split exakt. Alle Fasern von $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ haben die Dimension r, daher ist die Garbe lokal frei von diesem Rang.
Nach Nakayamas Lemma wird $\mathcal{I}$ lokal von r Elementen erzeugt. □

Weitere Kriterien und Eigenschaften übergehen wir, da wir uns später vor allem für die relative Situation interessieren.

Flache Morphismen

Definition 6.22. *Sei $f : X \to Y$ Morphismus von Varietäten. f heißt* flach*, wenn für alle $P \in X$ der Ringhomomorphismus*

$$f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \to \mathcal{O}_{X,P}$$

flach ist, d.h. $\cdot \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(P)}} \mathcal{O}_{X,P}$ ist exakt.

Bemerkung. Diese rein algebraische Bedingung scheint niemand so recht geometrisch zu verstehen. Flachheit bedeutet, dass die verschiedenen Fasern von f etwas miteinander "zu tun haben". Ist z.B. f zusätzlich projektiv, so sind Dimension, Grad und (arithmetisches) Geschlecht konstant.

Beispiel. (i) Sei $j : U \to X$ offene Immersion. Dann ist $j_P^\#$ die Identität, also ist j flach.

(ii) Ist $f : X \to Y$ mit $Y = \operatorname{Spm} \kappa$, wobei κ ein Körper, dann ist f flach.

(iii) Sei $i : P \to X$ abgeschlossene Inklusion eines Punktes. Angenommen, $i^\# : \mathcal{O}_P \to \kappa(P)$ ist flach. Wir betrachten die Sequenz

$$0 \to m_P \to \mathcal{O}_P \to \kappa(P) \to 0$$

und bilden $\otimes_{\mathcal{O}_P} \kappa(P)$. Dann ist die Sequenz

$$0 \to m_P \otimes \kappa(P) \to \kappa(P) \to \kappa(P) \to 0$$

exakt, also $m_P \otimes \kappa(P) = 0$. Andererseits ist

$$m_P \otimes m_P \to m_P \otimes \mathcal{O}_P \to m_P \otimes \kappa(P) \to 0$$

ebenfalls exakt, also ist $m_P \otimes \kappa(P)$ der Kokern von $m_P \otimes m_P \to m_P$. Es folgt $m_P^2 = m_P$. Nach Nakayamas Lemma ist dann $m_P = 0$, d.h. $\mathcal{O}_P = \kappa(P)$ und $X = \operatorname{Spm} \kappa(P)$.

Bemerkung. Abgeschlossene Immersionen sind nur flach, wenn sie die Inklusion einer Zusammenhangskomponente sind. (Übungsaufgabe)

Lemma 6.23. *Seien X, Y affin. Dann ist $f : X \to Y$ genau dann flach, wenn $f^\# : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ flach.*

Beweis: Wir übersetzen in Ringe: Ein Ringhomomorphismus $\phi : A \to B$ ist genau dann flach, wenn für alle maximalen Ideale $m \subset B$ die Erweiterung $A_{\phi^{-1}m} \to B_m$ flach ist. Wir erinnern uns: Ein B-Modul M ist genau dann trivial, wenn $M_m = 0$ für alle maximalen Ideale. Angewendet auf Kerne und Kokern bedeutet dies, dass ein Komplex

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to$$

von B-Moduln genau dann exakt ist, wenn alle Lokalisierungen exakt sind. Damit können wir den Beweis führen: Sei

$$0 \to N_1 \to N_2 \to N_3 \to 0$$

exakte Sequenz von A-Moduln. Wir setzen $M_i = N_i \otimes_A B$. Da Lokalisieren exakt ist, sind die Komplexe

$$0 \to N_{1,\phi^{-1}m} \to N_{2,\phi^{-1}m} \to N_{3,\phi^{-1}m} \to 0$$

exakt. Tensorieren mit B_m ergibt die Sequenz

$$0 \to M_{1,m} \to M_{2,m} \to M_{3,m} \to 0$$

Diese ist exakt, da B_m flach über $A_{\phi^{-1}m}$. Aus dem Kriterium folgt die Exaktheit der Sequenz der M_i, also die Flachheit von B über A.
Sei umgekehrt B flach über A. Sei $S = A \smallsetminus \phi^{-1}m$ für ein maximales Ideal $m \subset B$. Wir betrachten eine exakte Sequenz von $S^{-1}A$-Moduln

$$0 \to X_1 \to X_2 \to X_3 \to 0$$

Wegen $S^{-1}B = B \otimes_A S^{-1}A$ folgt $X_i \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}B = X_i \otimes_A B$. Da B flach über A ist, ist die Sequenz

$$0 \to X_1 \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}B \to X_2 \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}B \to X_3 \otimes_{S^{-1}A} S^{-1}B \to 0$$

exakt. B_m ist eine Lokalisierung von $S^{-1}B$, daher ist auch dieser Ringhomomorphismus flach. □

Beispiel. Seien X, Y Varietäten. Dann ist $p : X \times Y \to X$ flach: Es genügt, die affine Situation zu betrachten, also $A \to A \otimes_k B$, $a \mapsto a \otimes 1$. Diese Abbildung ist flach, da B/k flach ist.

Glatte Morphismen

Definition 6.24. *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. f heißt* glatt *von relativer Dimension n, wenn gilt:*

(i) $f : X \to Y$ ist flach.

(ii) Sind $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ irreduzible Komponenten mit $f(X') \subset Y'$, so gilt $\dim X' = \dim Y' + n$.

(iii) Für alle $x \in X$ gilt
$$\dim_{\kappa(x)} \iota_x^* \Omega_{X/Y} = n$$

Beispiel. Sei $f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^1$ die Multiplikationsabbildung, der Einfachheit halber k algebraisch abgeschlossen. Die relative Dimension ist 1. Auf Ringen ist die Abbildung $k[X] \to k[X_1, X_2]$ mit $X \mapsto X_1X_2$. Die relative Differentialformengarbe ist $< dX_1, dX > / < X_1dX_2 + X_2dX_1 >$. Wir ziehen zurück auf

$(a, b) \in \mathbb{A}^2$ und erhalten $< dX_1, dX_2 > / < adX_2 + bdX_1 >$. Dies ist ein k-Vektorraum der Dimension 1, es sei denn $adX_2 + bdX_2 = 0$, also mit Ausnahme des Punktes $(0, 0)$. Die Abbildung ist nicht glatt. Wir schränken sie jetzt ein auf $\mathbb{A}^2 \smallsetminus \{(0, 0)\}$. Dann hat die Differentialformengarbe in jedem Punkt eine Faser der richtigen Dimension. Zu untersuchen bleibt die Flachheit. Es genügt zu zeigen, dass $k[X] \to k[X_1, X_2]_{X_1}$ flach ist. Sei $Y = X_1X_2$. Dann gilt

$$k[X_1, X_2]_{X_1} = k[X_1, Y]_{X_1} = k[X_1]_{X_1} \otimes_k k[Y]$$

und die Abbildung wird $X \mapsto Y$. Eine k-Basis von $k[X_1]_{X_1}$ definiert daher eine eine $k[X]$-Basis von $k[X, Y]_{X_1}$. Als freier Modul ist er flach.

Kapitel 7

Etale Morphismen

(vergleiche Milne, Etale Cohomology, I §3)

Definition 7.1. *Ein Morphismus $X \to Y$ von Varietäten heißt* unverzweigt, *wenn $\Omega_{X/Y} = 0$.*

Lemma 7.2. *Ein Morphismus von affinen Varietäten ist genau dann unverzweigt, wenn der zugehörige Ringhomomorphismus formal unverzweigt ist.*

Beweis: Das ist Lemma 5.10. $\square$

Theorem 7.3. *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

(i) *f ist flach und unverzweigt.*

(ii) *f ist glatt von relativer Dimension 0.*

(iii) *$f^*\Omega_Y \to \Omega_X$ ist ein Isomorphismus.*

(iv) *Für jede offene affine Teilmenge $U \subset Y$ und $V \subset X$ mit $f(V) \subset U$ ist $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(V)$ formal etale.*

(v) *Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene affine Umgebung $V = \operatorname{Spm} C$ von x und eine offene affine Umgebung $U = \operatorname{Spm} A$ von $y = f(x)$, so dass $f(V) \subset U$ und $A \to C$ formal etale ist.*

(vi) *Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene affine Umgebung $V = \operatorname{Spm} C$ von x und eine offene affine Umgebung $U = \operatorname{Spm} A$ von $y = f(x)$, so dass $f(V) \subset U$*

$$C = A[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_n \rangle$$

mit $\det \frac{\partial f_i}{\partial X_j}$ *ist invertierbar in C.*

(vii) *Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es eine offene affine Umgebung $V = \operatorname{Spm} C$ von x und eine offene affine Umgebung $U = \operatorname{Spm} A$, so dass $f(V) \subset U$ mit $B = A[X]/\langle f \rangle$, $b \in B$ so dass f' Einheit in $C = B_b$.*

Definition 7.4. *Morphismen mit den Eigenschaften wie im Theorem heißen* etale*. Morphismen der Form in (vii) heißen* standard etale*.*

Bemerkung. Die dritte Charakterisierung funktioniert auch sehr gut im Setting von Mannigfaltigkeiten. f induziert einen Isomorphismus der Kotangentialräume, also auch einen der Tangentialräume. Eine solche Abbildung ist ein lokaler Diffeomorphismus (bzw. im komplexen Setting: lokal biholomorph). Im algebraischen Setting sind etale Morphismen *nicht* lokale Isomorphismen.

Beispiel. (i) Wir betrachten die Abbildung $x \mapsto x^n$ auf

$$\mathbb{G}_m = \mathbb{A}^1 \smallsetminus \{0\} = \operatorname{Spm} k[X, X^{-1}]$$

Der zugehörige Ringhomomorphismus ist

$$A = k[X, X^{-1}] \to C = k[Y, Y^{-1}] \qquad X \mapsto Y^n$$

d.h. $C = A[Y]/(Y^n - X)$ wegen $Y^{-1} = Y^{n-1}X^{-1}$. Die Jacobi-Matrix ist

$$\frac{\partial Y^n - X}{\partial Y} = nY^{n-1}$$

Dieses Element ist genau dann invertierbar in C, wenn $n \neq 0$, also wenn $\operatorname{Char}(k) \nmid n$.

(ii) Eine Isogenie von elliptischen Kurven ist genau dann etale, wenn die Isogenie separabel ist, d.h. die Erweiterung von Funktionenkörpern ist separabel.

Beweis von Theorem 7.3, Anfang. Einige der Implikationen sind einfach, wir gehen sie durch:
(ii) $\Rightarrow$ (i): Nach Voraussetzung ist f flach. Alle Fasern von $\Omega_{X/Y}$ verschwinden, also ganz $\Omega_{X/Y}$.
(v) $\Rightarrow$ (iii): Wir betrachten die erste fundamentale exakte Sequenz für $X \to Y \to \operatorname{Spm} k$:

$$f^*\Omega_Y \to \Omega_X \to \Omega_{X/Y} \to 0$$

Nach Theorem 5.11 ist sie lokal sogar split-exakt, da X/Y lokal formal glatt ist. Da X/Y zusätzlich unverzweigt ist, verschwindet $\Omega_{X/Y}$, und wir erhalten den Isomorphismus (iii).
(iv) $\Rightarrow$ (v): trivial
(vi), (vii) $\Rightarrow$ (v): Wir betrachten $A \to C$ und überprüfen das Kriterium für formal etale. Das Argument funktioniert genau wie im Beweis von Lemma 6.19. Wir betrachten eine Erweiterung

$$0 \to N \to \tilde{B} \to B \to 0$$

von A-Algebren. Gegeben ein A-Algebrenhomomorphismus $C \to B$, also ein n-Tupel $(b_1, \dots, b_n) \in B^n$ mit $f_i(b_1, \dots, b_n) = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Dieser soll nach

$\tilde{B}$ geliftet werden. Seien also $\tilde{b}_i$ Urbilder der b_i. Wir schreiben $\tilde{b} = (\tilde{b_1}, \dots, \tilde{b}_n)$. Gesucht sind $x = (x_1, \dots, x_n) \in N^n$, so dass

$$0 = f_i(\tilde{b} + x) = f_i(\tilde{b}) + \sum_{j=1}^{n} \partial f_i X_j(b) x_j$$

Das Gleichungssystem ist lösbar, da die Matrix in C invertierbar ist. Dasselbe Argument funktioniert in der Situation von (vii).
(vii) $\Rightarrow$ (vi): Wir schreiben $C = B_b = A[X, U]/\langle f, bU - 1\rangle$. Dann ist die Jacobimatrix

$$\begin{pmatrix} f' & Ub' \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Sie hat die Determinante $f'b$. Nach Voraussetzung sind f' und b Einheiten in C.

□

Beispiel. Sei k algebraisch abgeschlossen, A eine unverzweigte k-Algebra von endlichem Typ, $P \in \operatorname{Spm} A$. Nach Korollar 6.18 ist dann $m_P/m_P^2 = 0$. Nach Nakayamas Lemma ist $m_P = 0$ in $\mathcal{O}_P$, also $\mathcal{O}_P = k$. D.h. A hat Dimension 0 und es gilt sogar:

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} k$$

Man beachte, dass wir die Reduziertheit nicht gefordert haben, es folgt aus der Bedingung an die Kotangentialräume! Speziell für $Y = \operatorname{Spm} k$ ist die Situation sehr einfach.

Im Allgemeinen müssen wir hierfür viel mehr arbeiten. Zunächst ein Nachtrag.

Lemma 7.5. *Sei $A \to B$ Ringhomomorphismus von endlichem Typ, $A \to C$ Ringhomomorphismus. Dann gilt*

$$\Omega_{C \otimes_A B/C} = \Omega_{B/A} \otimes_A C$$

Beweis: Sei $B = A[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_m\rangle$. Dann ist

$$B^m \to B^n \to \Omega_{B/A} \to 0$$

exakt, wobei die Basisvektoren von B^n mit dX_i identifiziert werden. Diese Sequenz tensorieren wir mit C. □

Lemma 7.6. *Sei $f : X \to Y$ flach und unverzweigt. Dann ist f quasi-endlich, d.h. jeder Punkt hat nur endlich viele Urbildpunkte. Für alle $x \in X$ ist die Restklassenkörpererweiterung $\kappa(x)/\kappa(f(x))$ separabel.*

Beweis: Ohne Einschränkung sind $Y = \operatorname{Spm} A$, $X = \operatorname{Spm} B$ affin. Sei $y \in Y$ mit Restklassenkörper κ. Dann ist $\kappa(y) \to B \otimes_A \kappa(y)$ ebenfalls flach und unverzweigt. Es genügt zu zeigen, dass $B' = B \otimes_A \kappa(y)$ ein endlich-dimensionaler $\kappa(y)$-Vektorraum ist, denn die Faser über y ist $\operatorname{Spm} B'^{\text{red}}$. Sei k der algebraische Abschluss von $\kappa(y)$. Dann ist auch $k \to B' \otimes_{\kappa(y)} k$ unverzweigt, nach dem obigen Beispiel also endlich-dimensionaler k-Vektorraum.
Die Restklassenkörpererweiterungen sind unverzweigt, also separabel. □

Flachheitskriterien

Lemma 7.7. *Sei A ein Ring, B ein A-Modul. B ist genau dann flach, wenn für alle Ideale $\mathfrak{I} \subset A$ die Abbildung $\mathfrak{I} \otimes_A B \to B$ injektiv ist, d.h. $\mathfrak{I} \otimes B = \mathfrak{I}B$.*

Beweis: Sei B flach. Wir tensorieren die exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{I} \to A \to A/\mathfrak{I} \to 0$$

mit B und erhalten wegen Flachheit die exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{I} \otimes B \to B \to B \otimes A/\mathfrak{I} \to 0$$

Sei umgekehrt die Voraussetzung für alle Ideale erfüllt. Sei

$$g : M' \to M \to M'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von A-Moduln. Wir wollen zeigen, dass sie unter Tensorprodukt mit B exakt bleibt. Da Tensorprodukte mit Vereinigungen vertauschen, genügt es den Fall zu betrachten, dass M endlich erzeugt ist.
Wir betrachten zunächst den Fall, dass M frei ist von Rang r. Für $r = 1$ sind wir in der Situation eines Ideals. Für $r > 1$ betrachten wir $M \cong M_1 \otimes M_2$ mit M_1, M_2 frei von Rang echt kleiner als r.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] & M \arrow[r] & M_2 \arrow[r] & 0 \\
 & M_1 \cap M' \arrow[r] \arrow[u] & M' \arrow[r] \arrow[u, "g"'] & M'/M_1 \cap M' \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Alle vertikalen Pfeile sind Inklusionen. Bei Tensorieren mit B bleibt die obere Zeile split-exakt. Nach Induktionsvoraussetzung bleiben die äußeren Pfeile injektiv, nach dem Schlangenlemma dann auch der mittlere.
Sei nun M beliebig, endlich erzeugt. Wir schreiben M als Quotient eines freien Moduls F. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & F \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[u] & g^{-1}M' \arrow[r] \arrow[u, "i"'] & M' \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

und tensorieren mit B. Nach dem freien Fall bleibt der mittlere Pfeil injektiv, also auch der rechte. $\square$

Lemma 7.8. *Sei A ein Ring, $\mathfrak{I} \subset A$ ein Ideal. Sei $0 \to N \to F \to M \to 0$ eine exakte Sequenz von A-Moduln, F, M flach. Dann gilt*

$$\mathfrak{I}F \cap N = \mathfrak{I}N$$

Beweis: Aus der exakten Sequenz des Lemmas erhalten wir

$$0 \to N \cap \mathfrak{I}F \to \mathfrak{I}F \to \mathfrak{I}M \to 0$$
$$\mathfrak{I} \otimes N \to \mathfrak{I} \otimes F \to \mathfrak{I} \otimes M \to 0$$

Wegen der Flachheit gilt $\mathfrak{I} \otimes F = \mathfrak{I}F$, $\mathfrak{I} \otimes M = \mathfrak{I}M$. Wegen der zweiten Sequenz ist das Bild von $\mathfrak{I} \otimes N$ dann $\mathfrak{I}N \subset \mathfrak{I}F$. Wegen der ersten Sequenz ist dies auch $N \cap \mathfrak{I}F$. □

Lemma 7.9 (Milne, I§2.10)**.** *Sei M ein flacher A-Modul, $a_i \in A$, $x_i \in M$ für $i = 1, \dots, r$. Wenn*

$$\sum a_i x_i = 0$$

dann gibt es $x'_1, \dots, x'_{r'} \in M$, $a_{i,j} \in A$, für $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, r'$ mit

$$x_i = \sum_j a_{ij} x'_j \qquad \sum_i a_i a_{ij} = 0$$

Beweis: Sei F freier A-Modul mit Basis $(y_i)_{i \in I}$, I eine Menge, $g : F \to M$ surjektiv. Die Basis und g sind so gewählt, dass $g(y_i) = x_i$ für $i = 1, \dots, r$. Sei N der Kern der Projektion. Wir betrachten das Ideal $\mathfrak{I} = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$. Nach Voraussetzung und Lemma 7.8

$$n = \sum_i a_i y_i \in N \cap \mathfrak{I}F = \mathfrak{I}N$$

Also gibt es $n_1, \dots, n_r \in N_i$ mit

$$n = \sum_i a_i n_i$$

Wir schreiben in der Basis von F

$$n_i = y_i - \sum_{j \in J} a_{ij} y_j$$

Hierbei ist $J \subset I$ endlich. Wir setzen $x'_j = g(y_j)$ für $j \in J$. Anwenden von g ergibt

$$0 = x_i - \sum_j a_{ij} x'_j$$

Außerdem gilt

$$n = \sum_i a_i n_i = \sum_i (a_i y_i - a_i \sum_j a_{ij} y_j) = n - \sum_{ij} (a_i a_{ij}) y_j$$

Da die y_j linear unabhängig sind folgt

$$0 = \sum_i a_i a_{ij}$$

□

Lemma 7.10. *Sei B ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal m. Dann gilt*

$$\bigcap_r m^r = 0$$

Beweis: $N = \bigcap_r m^r$ ist endlich erzeugt und erfüllt $mN = N$. Das solche Moduln verschwinden, ist eine Version von Nakayamas Lemma: Sei $x_1, \ldots, x_n$ ein minimaler Satz von Erzeugern. Wegen $mN = M$ gilt

$$x_1 = \sum_j a_j x_j \qquad a_{ij} \in m$$

Also ist $(1 - a_1)x_1$ Linearkombination der anderen Elemente. Wegen $a_1 \in m$ ist $1 - a_i$ invertierbar. Das Erzeugendensystem ist nicht minimal. □

Satz 7.11 (Milne, I§2.5)**.** *Sei A noethersch, B eine noethersche flache A-Algebra. Sei $b \in B$, so dass b kein Nullteiler in B/mB ist für alle $m \in \operatorname{Spm} A$. Dann ist $B/(b)$ eine flache A-Algebra.*

Bemerkung. In diesem Satz ist 0 ein Nullteiler. Die Voraussetzung enthält also, dass $b \notin mB$ für alle $m \in \operatorname{Spm} A$.

Beweis: Da Flachheit eine lokale Eigenschaft ist, genügt es den Fall zu betrachten, dass A und B lokale Ringe sind. (Noethersch bleibt beim Lokalisieren erhalten.) Angenommen, b ist ein Nullteiler in B. Sei $cb = 0$. Nach Voraussetzung ist $c = 0$ in B/mB, also $c \in m$.

Behauptung. $c \in m^r B$ *für alle* r.

Sei $a_1, \ldots, a_N$ eine minimale Menge von Erzeugern von m^r. Sie existiert, da der Ring noethersch ist. Wir schreiben $c = \sum_i a_i b_i$ mit $b_i \in B$. Nach Voraussetzung

$$0 = bc = \sum_i a_i b_i b$$

Nach Lemma 7.9 für $x_i = b_i b$ gibt es $a_{ij} \in A$, so dass

$$b_i b = \sum_j a_{ij} b b_j \qquad \sum_i a_i a_{ij} = 0$$

Wegen der Minimalität des Erzeugendensystems sind $a_{ij} \in m$ (sonst wäre das Element invertierbar und ein Erzeuger könne eliminiert werden). Hieraus folgt, dass $b_i b \in mB$. Da b kein Nullteiler in B/mB ist, folgt $b_i \in mB$. Damit ist $c \in m^{r+1}B$.
Sei m_B das maximale Ideal von B. Es gilt wegen Lemma 7.10

$$c \in \bigcap_r m^r B \subset \bigcap_r m_B^r = 0$$

Damit haben wir verifiziert, dass b kein Nullteiler ist.

Sei $I \subset A$ ein Ideal. Mit $A \to B$ ist auch $A/I \to B \otimes_A A/I = B/IB$ flach. Die Argumentation gilt auch für diesen Ringhomomorphismus, also ist b kein Nullteiler in B/IB. Wir betrachten das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & I \otimes B \arrow[r, "1\otimes b"] \arrow[d] & I \otimes B \arrow[r] \arrow[d] & I \otimes (B/\langle b\rangle) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & B/\langle b\rangle \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B/IB \arrow[r, "b"] \arrow[d] & B/IB \arrow[r] \arrow[d] & (B/\langle b\rangle)/I(B/\langle b\rangle) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

(In der Exaktheit der beiden linken Spalten steckt die Flachheit von B, in der Exaktheit der unteren Zeilen die Tatsache, dass b kein Nullteiler ist.) Aus dem Schlangenlemma (oder direkter Diagrammjagd) folgt die Injektivität von

$$I \otimes (B/\langle b\rangle) \to B/\langle b\rangle$$

Nach Lemma 7.7 ist $B/\langle b\rangle$ flach. $\square$

Beweis von Theorem 7.3, Fortsetzung. (vi) $\Rightarrow$ (ii): Unverzweigtheit ist bereits gezeigt oder folgt aus der Formel für $\Omega_{C/A}$. Wir überprüfen Flachheit. Man sieht leicht, dass es genügt, die Flachheit nach Basiswechsel zu einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper zu verifizieren. Ab jetzt sind alle Ringe Lokalisierungen von Ringen von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Da es genügt, die lokalen Erweiterungen zu betrachten, übersetzen wir die Voraussetzungen in die lokale Situation.
Sei $m_C \subset C$ maximal, m_A das Urbild in A, m_B das Urbild in $B = A[X_1, \dots, X_n]$. Als freier Modul ist B flach. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial X_i}$ sind eine Basis des relativen Differentialformenmoduls $\Omega_{B/A}$, und daher auch von $\Omega_{B_{m_B}/A_{m_A}}$. Die Determinante der Jacobimatrix ist invertierbar in C, also auch in $C/m_C C = B/m_B B$ und daher auch in B_{m_B}. Wir ersetzen nun A, B, C durch die jeweiligen lokalen Ringe. Es gilt $C = B/\langle f_1, \dots, f_n\rangle$ und die Determinante der Jacobi-Matrix ist invertierbar in B. Sei $C_i = B/\langle f_1, \dots, f_i\rangle$, also $C_{i+1} = C_i/\langle f_{i+}\rangle$ Für $i = 0$ ist der Ring flach. Wir wollen induktiv mit dem Kriterium 7.11 zeigen, dass C_i flach über A ist.

Behauptung. *f_{i+1} ist kein Nullteiler in $C_i/m_A C_i$.*

Wir ersetzen für den Rest des Arguments A, B, C durch die Restklassenringe modulo m_A.
Es ist $k = A/m_A$. Dann ist nun $B = k[X_1, \dots, X_n]$, $C_i = k[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_i\rangle$ und nach Voraussetzung ist die Determinante der Jacobi-Matrix invertierbar in B und dann auch in $B/m_B = k$. Wir betrachten die Kotangentialräume

$$V_i = k \otimes \Omega_{C_i/k} = \langle dX_1, \dots, dX_n\rangle_k / \langle df_1, \dots, df_i\rangle$$

Nach Voraussetzung an die Determinante ist $V_n = 0$. Wegen $\dim_\kappa V_0 = n$ folgt $\dim_\kappa V_i = n - i$. Wegen allgemeiner Dimensionstheorie für Varietäten ist $\dim C_{i+1} \geq \dim C_i - 1$. Da $\dim C_n = 0$ und $\dim C_0 = \mathbb{A}^n = n$, folgt $\dim C_i = i$ für alle i. Nach Korollar 6.18 sind alle C_i regulär. Nach Atiyah-MacDonald Theorem 11.22 und Lemma 11.23 ist C_i dann nullteilerfrei. $\square$

Definition 7.12. *Ein Morphismus $f : X' \to X$ heißt* endlich, *wenn f affin ist und für jede offene affine Teilmenge $U \subset X$ der Ringhomomorphismus $\mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}(f^{-1}U)$ endlich ist, d.h. endlich erzeugt als $\mathcal{O}(U)$-Modul.*

Bemerkung. Endliche Morphismen sind quasi-endlich, denn nach Basiswechsel zu einem Punkt $x \in X$ erhalten wir einen endlich-dimensionalen $\kappa(x)$-Vektorraum.

Satz 7.13. *Sei $f : X \to Y$ endlich, und étale in einer Umgebung von $x \in X$. Dann gibt es offene affine Umgebungen V von x und U von $f(x)$ mit $f(V) \subset U$ und $f : V \to U$ standard-etale.*

Beweis: (Vergl. Milne I§3.14.) Ohne Einschränkung ist $X = \operatorname{Spm} C$, $Y = \operatorname{Spm} A$ und dann C eine endliche A-Algebra. Sei $\mathfrak{p}$ das Ideal zu $f(x)$. In der Argumentation lokalisieren wir an $\mathfrak{p}$, d.h. wir rechnen über $A_\mathfrak{p}$ statt A. Sei $\mathfrak{q} \subset C_\mathfrak{p}$ das maximale Ideal zu x. Nach Voraussetzung ist f etale in einer Umgebung von x. Insbesondere ist $\kappa(\mathfrak{q})/\kappa(\mathfrak{p})$ separabel. Die Faser von f über $f(x)$ ist $C/\mathfrak{p}C = \kappa(\mathfrak{q}) \times C'$ Sei $\bar{t} \in C/\mathfrak{p}C$ ein primitives Element für $\kappa(\mathfrak{q})$. Sei $t \in C_\mathfrak{p}$ ein Urbild. Sei $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q} \cap A_\mathfrak{p}[t]$.

Behauptung. *$A_\mathfrak{p}[t]_{\mathfrak{q}'} \to C_\mathfrak{q}$ ist ein Isomorphismus.*

Modulo $\mathfrak{p}$ sieht man, dass $\mathfrak{q}$ das einzige Primideal von $C_\mathfrak{p}$ ist, dass über $\mathfrak{q}'$ liegt. Daher ist $C_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}[t]} A_\mathfrak{p}[t]_{\mathfrak{q}'}$ ein lokaler Ring, also gleich $C_\mathfrak{q}$. Da $A_\mathfrak{p}[t] \to C_\mathfrak{p}$ injektiv und endlich ist, ist auch

$$A_\mathfrak{p}[t]_{\mathfrak{q}'} \to C_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}[t]} A_\mathfrak{p}[t]_{\mathfrak{q}'} = C_\mathfrak{q}$$

injektiv und endlich. Die Abbildung ist surjektiv nach Nakayamas Lemma, da $\kappa(\mathfrak{q}') = \kappa(\mathfrak{q})$.
Da $A_\mathfrak{p}$ noethersch ist und $A_\mathfrak{p}[t]$ Untermodul eines endlichen $A_\mathfrak{p}$-Moduls, ist auch $A_\mathfrak{p}[t]$ endlich über $A_\mathfrak{p}$. Der Isomorphismus von lokalen Ringen induziert einen Isomorphismus auf offenen Umgebungen

$$A_\mathfrak{p}[t]_{c'} \to C_{\mathfrak{p},c}$$

mit $c' \notin \mathfrak{q}', c \notin \mathfrak{q}$. Daher ist $A_\mathfrak{p}[t]$ etale über $A_\mathfrak{p}$ in einer Umgebung von $\mathfrak{q}'$. Wir dürfen daher $C_\mathfrak{p}$ durch $A_\mathfrak{p}[t]$ ersetzen, d.h. ab jetzt wird $C_\mathfrak{p}$ von einem Element t erzeugt. Sei $n = [\kappa(\mathfrak{q}) : \kappa(\mathfrak{p})]$. Dann erzeugen $1, \bar{t}, \dots, \bar{t}^{n-1}$ den Vektorraum $\kappa(\mathfrak{p})$. Nach Nakayamas Lemma erzeugen $1, t, \dots, t^{n-1}$ den $A_\mathfrak{p}$-Modul $A_\mathfrak{p}[t]$, d.h. es gibt eine Surjektion

$$h : A_\mathfrak{p}[T]/P \to C_\mathfrak{p}$$

wobei P ein normiertes Polynom ist. Die Reduktion $\overline{P}(T)$ ist das Minimalpolynom von $\bar{t}$, also separabel. Daher ist P' invertierbar.
Wir ersetzen nun A durch eine Lokalisierung A_a, so dass $P \in A[T]$. Sei $B = A[T]/P$. Wir wählen b und $c \in C$ so, dass

$$h' : B_b \to C_c$$

eine Surjektion von étalen A-Algebren ist.

Behauptung. *h' induziert eine offene Immersion.*

Nach Milne I §3 3.6 ist h ebenfalls etale, also flach und daher offen. Da h surjektiv ist, ist es geometrisch eine abgeschlossen Immersion. Eine abgeschlossene Immersion, die offen ist, ist eine offene Immersion einer Zusammenhangskomponente. $\square$

Theorem 7.14 (Zariskis Hauptsatz)**.** *Sei $f : X \to Y$ quasi-endlicher Morphismus von Varietäten. Dann gibt es eine Faktorisierung*

$$X \to X' \to Y$$

so dass $X \to X'$ eine offene Immersion ist und $X' \to Y$ endlich.

Beweis: Milne I 1.8. Er verweist auf Raynaud, Anneaux Locaus Henseliens, SLN 169. Das letzte Kapitel von Mumford, The Red book of Varieties and Schemes enthält eine Diskussion der verschiedenen Versionen des Satzes und der Zusammenhänge. $\square$

Beweis von Theorem 7.3 Ende. Zariskis Hauptsatz zusammen mit dem vorherigen Satz beweisen die Richtung (i)$\Rightarrow$ (vii) von Theorem 7.3.
Wir wissen die Äquivalenz von (i), (ii), (vi), (vii), sowie (vi)$\Rightarrow$ (v)$\Rightarrow$ (iii), (iv)$\Rightarrow$ (v).
(i) $\Rightarrow$ (iv): Sei $U \subset Y$ und $V \subset X$ affin. Dann erfüllt auch $f : V \to X$ die Bedingung (i) und daher auch (v). Für jede Erweiterung

$$0 \to N \to \tilde{B} \to B \to 0$$

ist die Liftungseigenschaft zu überprüfen. Wir überdecken U und V durch formal etale, affine $U_i \to V_i$. Dann ist auch $U_i \to V$ formal etale. Für diese gilt die Liftungseigenschaft, d.h.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(V)}(\mathcal{O}(U_i), \tilde{B}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(V)}(\mathcal{O}(U_i), B)$$

Wegen der Verklebungseigenschaft von Algebrenhomomorphismen überträgt sich dies auf $U \to V$.
(iii) $\Rightarrow$ (vi): Wir verzichten auf den Beweis. Milne gibt als Referenz Artin, Théorèmes de Représentabilité pour les Espaces Algébriques I.1.1 □

Weitere Eigenschaften

Satz 7.15. *Flache Morphismen von Varietäten sind offen.*

Insbesondere sind also etale Morphismen offen!

Lemma 7.16 (Going-Down)**.** *Sei $\phi : A \to B$ ein flacher Ringhomomorphismus, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}'$ Primideale von A, $\mathfrak{P} \subset B$ ein Primideal mit $\phi^{-1}\mathfrak{P} = \mathfrak{p}$. Dann gibt es ein Primideal $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{P}' \subset B$ mit $\phi^{-1}\mathfrak{P}' = \mathfrak{p}'$.*

Beweis: Z.B. Matsumura oder Milne I §2.8. □

Bemerkung. In der algebraischen Zahlentheorie beweist man diese Aussage für ganze Ringerweiterungen. Injektive, ganze Ringerweiterungen sind flach, daher ist es der selbe Satz.

Lemma 7.17 (Going-Up)**.** *Sei $\phi : A \to B$ injektiver endlicher Ringhomomorphismus von Integritätsbereichen von endlichem Typ, d.h. B ist ein endlich erzeugter A-Modul. Dann ist $\phi^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ surjektiv, wobei $\operatorname{Spec} A$ die Menge der Primideale von A ist.*

Beweis: Kommutative Algebra Theorem 7.16 oder Matsumura, algebraische Zahlentheorie □

Lemma 7.18. *Sei $f : \operatorname{Spm} B \to \operatorname{Spm} A$ Morphismus von irreduziblen affinen Varietäten, so dass $f^\# : A \to B$ injektiv ist. Dann enthält $f(\operatorname{Spm} B)$ eine offene Teilmenge von $\operatorname{Spm} A$.*

Beweis: B ist von endlichem Typ über A. Sei K der Quotientenkörper von A. Dann ist $K \to B \otimes_A K$ ebenfalls injektiv und von endlichem Typ. Sei $\mathfrak{p} \in B \otimes_A K$ ein maximales Ideal. Nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ist $\kappa(\mathfrak{p})$ eine endliche Körpererweiterung von K. Das maximale Ideal entspricht einem eindeutigen Primideal $\mathfrak{p}' \subset B$. Ohne Einschränkung ersetzen wir B durch $B/\mathfrak{p}'$, geometrisch bedeutet dies, dass wir von $\operatorname{Spm} B$ zu $V(\mathfrak{p}')$ übergehen. Dann ist $Q(B) = \kappa(\mathfrak{p})$ eine endliche Körpererweiterung von $K = Q(A)$. Über einer offenen Teilmenge von A ist $A \to B$ endlich und dann nach Going-Up der Morphismus surjektiv. □

Beweis von Satz 7.15: Es genügt, einen flachen Morphismus von affinen Varietäten $f : X \to Y$ zu betrachten und zu zeigen, dass $f(X) \subset Y$ offen ist bzw. $Y \smallsetminus f(X)$ abgeschlossen.
Wir argumentieren mit Induktion nach der Dimension von Y. Ohne Einschränkung ist Y irreduzibel. Wenn X nicht leer ist, so wenden wir Going-Down an auf $\mathfrak{P} \in X$, $\mathfrak{p} = f(\mathfrak{P})$ und $\mathfrak{p}' = 0 \subset \mathcal{O}(Y)$. Sei $Z = V(\mathfrak{P}') \subset X$. Wir wenden

Lemma 7.18 an auf $Z \to X$. (Der zugehörige Ringhomomorphismus ist injektiv, da $\phi^{-1}\mathfrak{P}' = 0$.) Das Bild $f(Z)$ enthält eine offene Teilmenge $U \subset X$. Sei $Y' = X \smallsetminus Y$ und $X' = \operatorname{Spm} \mathcal{O}(X) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \mathcal{O}(Y')$. Dann ist auch $X' \to Y'$ flach und die Dimension von Y' echt kleiner als die von Y. Nach Induktionsannahme ist $Y' \smallsetminus f(X')$ abgeschlossen. $\square$

Kapitel 8

Verallgemeinerte Topologien

Der Begriff des topologischen Raums soll so weit verallgemeinert werden, dass wir immer noch von Prägarben und Garben sprechen können.
Literatur: Günter Tamme, Einführung in die etale Kohomologie, Regensburg 1979.
Zur Erinnerung: Sei X ein topologischer Raum. Eine Prägarbe ist ein kontravarianter Funktor auf der Kategorie $\underline{X}$ deren Objekte die offenen Teilmengen sind und Morphismen die Inklusionen.

Definition 8.1. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Sei $\mathcal{A}$ eine weitere Kategorie. Eine* Prägarbe *$\mathcal{F}$ mit Werten in $\mathcal{A}$ ist ein kontravarianter Funktor*

$$\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$$

Sei $\mathrm{PSh}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ *die Kategorie der Prägarben auf $\mathcal{C}$ mit Werten in $\mathcal{A}$. Morphismen von Prägarben sind Transformationen von Funktoren.*

Besonders wichtig sind die Fälle $\mathcal{A}$ die Kategorie der Mengen oder die der abelschen Gruppen. Wir werden meist mit letzterer arbeiten und sie in der Notation weglassen.

Beispiel. (i) X topologischer Raum.

(ii) Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{C}$ die Kategorie aller stetigen Abbildungen $f : X' \to X$, die lokale Homöomorphismen sind mit Morphismen in $\mathcal{C}$ die stetigen Abbildungen $X' \to X''$ verträglich mit der Abbildung nach X.

(iii) X Varietät, $\mathcal{C}$ die Kategorie der etalen Morphismen $f : X' \to X$ mit Morphismen in $\mathcal{C}$ die etalen Morphismen $X' \to X''$ verträglich mit der Abbildung nach X.

(iv) k Körper, $\mathcal{C}$ die Kategorie der k-Varietäten mit Morphismen die offenen Immersionen.

(v) k Körper, $\mathcal{C}$ die opponierte Kategorie der Kategorie der algebraischen Körpererweiterungen von von k.

Das Yoneda-Lemma besagt, dass $\mathcal{C}$ als Unterkategorie der Kategorie der Prägarben von Mengen aufgefasst werden kann. $\mathrm{PSh}(\mathcal{C}, \mathrm{Ens})$ hat beliebige Limiten und Kolimiten und daher oft sehr nützlich.

Satz 8.2. *Die Kategorie der Prägarben von abelschen Gruppen auf $\mathcal{C}$ ist eine abelsche Kategorie.*

Definition 8.3. *Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt* abelsch*, wenn für jedes Paar von Objekten $A, B \in \mathcal{C}$ die Menge* $\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Mor}(A, B)$ *mit der Struktur einer abelschen Gruppe ausgestattet ist, so dass:*

(i) Die Komposition von Morphismen ist bilinear.

(ii) Zu je zwei Objekten existieren direktes Produkt und direkte Summe.

(iii) $\mathcal{C}$ hat ein Nullobjekt 0 *mit* $\mathrm{Hom}(0, B) = \mathrm{Hom}(A, 0) = 0$ *für alle A, B.*

(iv) Jeder Morphismus in $\mathcal{C}$ hat einen Kern und einen Kokern.

(v) Das Bild wird definiert als Kern des Kokerns. Das Kobild wird definiert als Kokern des Kerns. Dann ist die natürliche Abbildung $\mathrm{Coim}\, f \to \mathrm{Im}\, f$ *ein Isomorphismus für alle Morphismen f in $\mathcal{C}$.*

Für weitere Details siehe Tamme, Introduction to etale cohomology oder Hartshorne.

Beweis von Satz 8.2: Folgt sofort, da die Kategorie der abelschen Gruppen abelsch ist. Wir verifizieren z.B. die Existenz des Kerns. Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben. Für jedes $X \in \mathcal{C}$ sein $\mathcal{K}(X) = \mathrm{Ker}(\mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X))$. Dann ist $\mathcal{K}$ eine Prägarbe und erfüllt die universelle Eigenschaft des Kerns. □

Wir erinnern an den Garbenbegriff. Eine Prägarbe von abelschen Gruppen auf einem topologischen Raum X ist eine Garbe, wenn für jede offene Überdeckung $\{U_i\}_{i \in I}$ für ein $U \subset X$

$$0 \to F(U) \to \prod_{i \in I} F(U_i) \to \prod_{i,j \in I} F(U_i \cap U_j)$$

Um dies zu verallgemeinern müssen wir also wissen, was Überdeckungen sind und was $U_i \cap U_j$ ist.

Definition 8.4. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Eine* Topologie *T auf $\mathcal{C}$ besteht aus einer Menge* $\mathrm{Cov}(T)$ *von* Überdeckungen*, das sind Familien $\{\phi_i : U_i \to U\}_{i \in I}$ von Morphismen in $\mathcal{C}$, so dass gilt*

(i) Ist $\{U_i \to U\}$ eine Überdeckung und $V \to U$ ein Morphismus, so existieren die Faserprodukte $U_i \times_U V$ und $\{U_i \times_U V \to V\}$ ist eine Überdeckung.

(ii) Ist $\{U_i \to U\}$ eine Überdeckung und für jedes i die Familie $\{V_{ij} \to U_i\}$ eine Überdeckung, so ist auch $\{V_{ij} \to U\}$ eine Überdeckung.

(iii) Ist $\phi : U' \to U$ ein Isomorphismus, so ist $\{U' \to U\}$ eine Überdeckung.

Eine Kategorie mit Topologie heißt auch Situs.
Sei $(\mathcal{C}, T)$ ein Situs. Eine Garbe *(von abelschen Gruppen) auf $\mathcal{C}$ ist eine Prägarbe, so dass für alle Überdeckungen $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ die Sequenz*

$$0 \to F(U) \to \prod_{i\in I} F(U_i) \to \prod_{i,j\in I} F(U_i \times_U U_j)$$

exakt ist. Morphismen von Garben sind die Morphismen der zugrundeliegenden Prägarben. Die Kategorie der Garben auf $\mathcal{C}$ wird mit $\mathrm{Sh}(\mathcal{C}, T)$ *bezeichnet.*

Beispiel. (i) X topologischer Raum, $\underline{X}$ die zugehörige Kategorie. Eine Familie $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ heißt Überdeckung, wenn $\bigcup_{i\in I} U_i = U$. Garben sind dann gewöhnliche Garben, denn

$$U_i \times_U U_j = U_i \cap U_j$$

(ii) $\underline{X}$ die Kategorie wie eben. Eine Familie $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ heißt Überdeckung, wenn I endlich und $\bigcup_{i\in I} U_i = U$. Man sieht leicht, dass die Überdeckungsaxiome erfüllt sind. Garben bezüglich dieser Topologie sind einfach gewöhnliche Garben, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat, d.h. alle offenen Mengen U in X sind quasi-kompakt. Dies ist für die Zariski-Topologie auf Varietäten (also die gewöhnliche Topologie) der Fall.

(iii) Sei X topologischer Raum, $\mathcal{C}$ die Kategorie der lokalen Homöomorphismen. Eine Familie $\{\phi_i : U_i \to U\}_{i\in I}$ heißt Überdeckung, wenn $\bigcup_{i\in I} \phi_i(U_i) = U$. Die Kategorie der Garben bezüglich dieser Topologie ist äquivalent zur Kategorie der gewöhnlichen Garben (Übungsaufgabe).

(iv) Sei k Körper, $\mathcal{C}$ die Kategorie der k-Varietäten. Eine Familie $\{U_i \to U\}_{i\in I}$ heißt Überdeckung, wenn alle $U_i \subset U$ offen sind und $\bigcup_{i\in I} U_i = U$. Die Zuordnung $X \mapsto \Omega_X(X)$ definiert eine Garbe auf diesem Situs

Definition 8.5. *Sei X eine Varietät. Der* etale Situs X_{et} *besteht aus der Kategorie der etalen Morphismen $X' \to X$ und den Überdeckungen die Familien $\{\phi_i : U_i \to U\}_{i\in I}$, so dass*

$$\bigcup_{i\in I} \phi_i(U_i) = U$$

Bemerkung. Sowohl der Situs zu einem gewöhnlichen topologischen Raum als auch der etale Situs enthalten den Morphismus $\emptyset \to X$. Die *leere Familie* $\{\}_{i\in\emptyset}$ ist nach Definition eine Überdeckung von $\emptyset$: jedes Element in $\emptyset$ hat ein Urbild. Wendet man auf diese Überdeckung das Garbenaxiom an, so erhält man

$$0 \to \mathcal{F}(\emptyset) \to \prod_{i\in\emptyset} \to \prod_{i\in\emptyset}$$

Ein leeres Produkt von abelschen Gruppen ist 0, d.h. $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$. Hieraus folgt dann, dass $\mathcal{F}$ disjunkte Vereinigungen auf direkte Summen abbildet.

Beispiel. Sei k ein Körper. Wir wollen Garben auf k_{et} verstehen. Die Objekte von k_{et} haben die Form

$$X' = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Spm} \kappa_i$$

wobei κ_i/k endlich, separable Körpererweiterung. X' hat die etale Überdeckung $\{\operatorname{Spm} \kappa_i \to X'\}_{i=1}^{n}$. Aus dem Garbenaxiom folgt

$$\mathcal{F}(X') = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{F}(\kappa_i)$$

Die Garbe ist also durch die Werte auf separablen Körpererweiterungen eindeutig bestimmt. (Wir lassen ab sofort Spm weg.) Ein k-Körperautomorphismen $\sigma : \kappa \to \kappa'$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $\sigma_* : \mathcal{F}(\kappa) \to \mathcal{F}(\kappa')$. Insbesondere erhalten wir

$$\operatorname{Gal}(\kappa/k) \times \mathcal{F}(\kappa) \to \mathcal{F}(\kappa) \qquad (\sigma, x) \mapsto \sigma_*(x)$$

Mit anderen Worten, $\mathcal{F}(\kappa)$ ist eine Darstellung von $\operatorname{Gal}(\kappa/k)$. Nun wenden wir uns der Garbenbedingung zu. Sei L/K eine Erweiterung (von endlichen separablen Erweiterungen von k). Nach dem Garbenaxiom ist die Sequenz

$$0 \to \mathcal{F}(K) \to \mathcal{F}(L) \to \mathcal{F}(L \otimes_K L)$$

exakt. Sei L/K normal. Dann ist

$$L \otimes_K L = \bigoplus_{\sigma \in \operatorname{Gal}(L/K)} L$$

In dieser Darstellung hat der Morphismus $L \to L \otimes_K L$ die Form

$$x \mapsto (\sigma(x))$$

Zusammen bedeutet dies

$$\mathcal{F}(K) = \mathcal{F}(L)^{\operatorname{Gal}(L/K)}$$

Sei $\overline{k}$ der separable Abschluss von k. Wir setzen

$$\mathcal{F}(\overline{k}) = \bigcup \mathcal{F}(K)$$

wobei die Vereinigung über alle endlichen Teilkörper von k geht. Hierauf operiert $\operatorname{Gal}(\overline{k}/k)$ und es gilt

$$\mathcal{F}(K) = \mathcal{F}(\overline{k})^{\operatorname{Gal}(\overline{k}/K)}$$

Eine etale Garbe auf k ist also dasselbe wie ein $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$-Modul M mit der Eigenschaft

$$M = \bigcup M^H$$

wobei $H = \mathrm{Gal}(\overline{k}/K)$ für H/k endlich. Versieht man $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ mit der Topologie als projektiver Limes der $\mathrm{Gal}(K/k)$, so sind dies genau die diskreten Moduln mit stetiger Operation.

Bemerkung. Bisher haben wir die mengentheoretische Voraussetzung, dass $\mathrm{Cov}(T)$ eine Menge ist, ignoriert. Tatsächlich war sie in einigen Beispielen, auch für den etalen Situs verletzt. Der Ausweg in diesem Fall ist es, als Indexsysteme nur Teilmengen einer festen Menge I zuzulassen und die Kategorie aller etalen Morphismen durch eine äquivalente kleine Kategorie zu ersetzen, d.h. eine, in der die Objekte eine Menge bilden. Das geht, da ja alle etalen Morphismen mit endlich vielen Polynomgleichungen beschrieben werden können. Die Theorie hängt dann a priori ab von diesen Wahlen. Am Ende kann man Unabhängigkeit der etalen Kohomologie von der Wahl zeigen. Wir folgen einer langen Tradition und ignorieren das Problem.

Lemma 8.6. *Der etale Situs ist ein Situs.*

Beweis: Zu zeigen ist, dass etale Morphismen stabil sind unter Komposition (folgt aus Eigenschaft (i) von Theorem 7.3) und unter Basiswechsel.
Seien also $\phi : U_1 \to U$ und $\phi : U_2 \to U$ etale. Wir wollen zeigen, dass $U_1 \times_U U_2 \to U$ ebenfalls etale ist. Ohne Einschränkung ist $U = \mathrm{Spm}\, A$, $U_1 = \mathrm{Spm}\, A[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_n\rangle$, so dass das Jacobi-Kriterium erfüllt ist und $U_2 = \mathrm{Spm}\, B$. Dann ist

$$B \otimes_A A[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_n\rangle = B[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_n\rangle$$

und das Jacobi-Kriterium ist erfüllt. Zu zeigen bleibt noch:

Behauptung. $C = B[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_n\rangle$ *ist reduziert.*

In Görtz, Wedhorn, Algebraic Geometry I Prop. 14.57 wird erklärt, welche Resultate aus Matsumura man benutzen muss und wie. (Matsumura 23.9, 23.7, S_1 und R_0 bedeuten reduziert) Das Kriterium ist, dass A reduziert ist und alle $\kappa[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_n\rangle$ reduziert für alle Restklassenkörper κ von A. $\square$

Garbifizierung

Ziel ist es, wie im Falle von der gewöhnlichen Topologie jeder Prägarbe eine Garbe zuzuordnen. Der Beweis ist etwas anders, da wir nicht über Halme sprechen können.

Definition 8.7. *Seien* $\mathfrak{U} = \{U_i \to U\}_{i\in I}$ *und* $\mathfrak{V} = \{V_j \to U\}_{j\in J}$ *Überdeckungen in einem Situs. Eine* Verfeinerungsabbildung $\mathfrak{U} \to \mathfrak{V}$ *besteht aus einer Abbildung* $\sigma : J \to I$ *und einer Familie von Morphismen* $s_j : V_j \to U_{\sigma(i)}$, *so dass* $V_j \to U$ *gegeben ist durch* $V_j \to U_{\sigma(i)} \to U$.

Lemma 8.8. *Die Überdeckungen von U bilden bezüglich der Verfeinerungsmorphismen eine Kategorie. Je zwei Verfeinerungsmorphismen haben eine gemeinsame Verfeinerung.*

Beweis: Die erste Aussage ist klar. Seien

$$\{V_j \to U\}_{j\in J} \to \{U_i \to U\}_{i\in I}, \{V'_{j'} \to U\}_{j'\in J'} \to \{U_i \to U\}_{i\in I}$$

Verfeinerungsmorphismen. Wir betrachten $\{V_j \times_U V'_{j'} \to U\}_{j\in J, j'\in J'}$. Aus den Überdeckungsaxiomen folgt, dass dies eine Überdeckung ist. Die Abbildung $(j,j') \mapsto \sigma(j)$ und $V_j \times V'_{j'} \to V_j \to U_{\sigma(j)}$ definiert eine Verfeinerungsabbildung. □

Definition 8.9. *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe. Für eine offene Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i \to U\}_{i\in I}$ sei*

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{Ker} \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \to \prod_{i,i'\in I} \mathcal{F}(U_i \times_U U_{i'})$$

Lemma 8.10. *Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe. Gegeben einen Verfeinerung $\mathfrak{V} \to \mathfrak{U}$ von Überdeckungen von U, so induziert jeder Verfeinerungsmorphismus einen Homomorphismus auf*

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

induziert. Dieser ist unabhängig von der Wahl des Verfeinerungsmorphismus.

Beweis: Gegeben seien Verfeinerungsmorphismen $\sigma : J \to I, (f_j)_{j\in J}$ und $\tau : J \to I, (g_j)_{j\in J}$. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "f^*-g^*"] & \prod_{i,i'\in I} \mathcal{F}(U_i \times U_{i'}) \arrow[d, "f^*-g^*"] \arrow[dl, "\Delta"] \\
0 \arrow[r] & \check{H}^0(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) \arrow[r] & \prod_{j\in J} \mathcal{F}(V_j) \arrow[r, "d"] & \prod_{j,j'\in J} \mathcal{F}(V_j \times V_{j'})
\end{tikzcd}$$

wobei die j-Komponente von Δ gegeben ist als $\mathcal{F}$ angewendet auf die Komposition

$$(f_j, g_j) : V_j \to U_{\sigma(j),\tau(j)}$$

Man überprüft

$$\Delta \circ d = f^* - g^*$$

Also verschwindet sie auf dem Kern. □

Dies bedeutet, dass das System der $H^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ bezüglich der Verfeinerungsmorphismen gerichtet ist.

Definition 8.11. *Sei $\mathcal{F}$ Prägarbe. Wir setzen*

$$\check{H}^0(U, \mathcal{F}) = \lim \check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

wobei der Limes über alle Überdeckungen von U gebildet wird.

Satz 8.12. *Sei $(\mathcal{C}, T)$ ein Situs, $\mathcal{F}$ eine Prägarbe. Dann existiert eine Garbe $\mathcal{F}^+$ und ein Prägarbenhomomorphismus $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ mit der folgenden universellen Eigenschaft: Jeder Homomorphismus von $\mathcal{F}$ in eine Garbe $\mathcal{G}$ faktorisiert eindeutig über θ. Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so ist θ ein Isomorphismus.*

Beweis: (Tamme Satz 3.1) Wir definieren

$$\mathcal{F}^\dagger(U) = \check{H}^0(U, \mathcal{F})$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{F}^\dagger$ wieder eine Prägarbe ist. Die Zuordnung $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^\dagger$ ist ein Funktor. Ist $\mathcal{F}$ bereits eine Garbe, so ist $\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$ und daher auch $\mathcal{F}^\dagger(U) = \mathcal{F}(U)$. Ist $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von einer Prägarbe $\mathcal{F}$ in eine Garbe $\mathcal{G}$, so ist in dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathcal{F}^\dagger & \longrightarrow & \mathcal{G}^\dagger \end{array}$$

die rechte vertikale Abbildung eine Gleichheit, d.h. der Morphismus faktorisiert eindeutig über $\mathcal{F}^\dagger$. Es genügt nun zu zeigen, dass $(\mathcal{F}^\dagger)^\dagger$ stets eine Garbe ist.
Wir nennen eine Prägarbe *separiert*, wenn $\mathcal{F}(U) \to \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$ injektiv ist für alle Überdeckungen von U.

Behauptung. *Sei $\mathcal{F}$ Prägarbe. Dann ist $\mathcal{F}^\dagger$ separiert.*

Sei $\overline{s}$ im Kern von $\mathcal{F}^\dagger(U) \to \prod_{i \in I} \mathcal{F}^\dagger(U_i)$. Zu $\overline{s}$ gibt es eine Überdeckung $\{V_j \to U\}_{j \in J}$ und

$$s \in \check{H}^0(\mathfrak{V}, \mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\prod_{j \in J} \mathcal{F}(V_j) \to \prod_{j,j'} \mathcal{F}(V_j \times V_{j'}))$$

welches $\overline{s}$ repräsentiert. Sei s_i das Bild von s unter

$$\check{H}^0(\{V_j \to U\}, \mathcal{F}) \to \check{H}^0(\{V_j \times U_i\}, \mathcal{F})$$

Dieses repräsentiert das Bild von $\overline{s}$ unter $\check{H}^0(U, \mathcal{F}) \to \check{H}^0(U_i, \mathcal{F})$. Nach Voraussetzung verschwindet es. Deshalb gibt es eine Verfeinerungsabbildung

$$f_i : \{W_{il} \to U_i\}_l \to \{V_j \times_U U_i \to U_i\}_j$$

so dass $(f_i)_*(s_i) = 0$. Durch Komposition erhalten wir eine Überdeckung $\{W_{il} \to U\}_{i,l}$, welche $\{V_j \to U\}$ verfeinert. Auf dieser Überdeckung verschwindet das Bild von s.

Behauptung. *Sei $\mathcal{F}$ eine separierte Prägarbe. Dann sind die Verfeinerungsmorphismen*

$$\check{H}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathfrak{V}, \mathcal{F})$$

injektiv.

Wir betrachten die gemeinsame Verfeinerung $\{V_j \times U_i \to U\}$ mit den Verfeinerungsmorphismen

$$\{V_j \times U_i \to U\} \xrightarrow{p_2} \{U_i \to U\}$$
$$\{V_j \times U_i \to U\} \xrightarrow{p_1} \{V_j \to U\} \to \{U_i \to U\}$$

Beide induzieren dieselbe Abbildung auf $\check{H}^0$, daher genügt es den Fall p_2 zu betrachten. Diese wird induziert von

$$\prod_i \mathcal{F}(U_i) \to \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \times V_j)$$

Diese ist als Produkt von injektiven Abbildungen injektiv.

Behauptung. *Sei $\mathcal{F}$ separierte Prägarbe. Dann ist $\mathcal{F}^\dagger$ eine Garbe.*

Wir betrachten

$$0 \to \mathcal{F}^\dagger(U) \to \prod_i \mathcal{F}^\dagger(U_i) \to \mathcal{F}^\dagger(U_i \times U_j)$$

Nach Voraussetzung ist die Sequenz exakt in $\mathcal{F}^\dagger(U)$. Wir betrachten $\overline{s}$. Das Element wird repräsentiert durch ein $s \in \prod_i \check{H}^0(\mathfrak{U}_i, \mathcal{F})$, wobei $\mathfrak{U}_i$ eine Überdeckung von U_i ist. Das Bild von s verschwindet auf einer gemeinsamen Verfeinerung von $\mathfrak{U}_i \times U_j$ und $U_i \times \mathfrak{U}_j$ (beides sind Überdeckungen von $U_i \times U_j$. Nach der letzen Behauptung verschwindet es dann auf allen gemeinsamen Verfeinerungen, also auch auf $\mathfrak{U}_i \times \mathfrak{U}_j$ sei $\{V_\mu \to U\}$ die Komposition mit allen $U_i \times U_j \to U$. Das Bild von s in $\prod_\nu \mathcal{F}(V_\mu)$ liegt dann in $\check{H}^0(\{V_\mu \to U\}, \mathcal{F})$. Dies ist das gesuchte Urbild. □

Satz 8.13. *Sei $(\mathcal{C}, T)$ ein Situs. Dann ist die Kategorie der Garben von abelschen Gruppen auf $(\mathcal{C}, T)$ abelsch. Der Inklusionsfunktor von Garben nach Prägarben ist linksexakt. Der Garbifizierungsfunktor ist exakt.*

Beweis: Seien $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ Garben. Dann ist $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ (im Prägarbensinn) eine Garbe und hat die universelle Eigenschaft.
Sei $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Garbenhomomorphismus. Sei $\mathcal{K}$ der Kern im Prägarbensinn. Man sieht leicht (vergleiche gewöhnliche topologische Räume), dass dies eine Garbe ist. Dann ist die universelle Eigenschaft automatisch erfüllt.
Sei schließlich $\mathcal{H}$ der Kokern im Prägarbensinn. Man überprüft mit den universellen Eigenschaften, dass die Garbifizierung $\mathcal{H}^+$ die universelle Eigenschaft erfüllt.
Dann ist automatisch auch das Bild die Garbifizierung des Prägarbenbildes und das Kobild die Garbifizierung des Prägarbenkobildes. Der Homomorphiesatz für Prägarben impliziert den für Garben.
Die Exaktheitsaussagen sind nun klar. □

Morphismen von Siten

Zwischen topologischen Räumen gibt es stetige Abbildungen. Wir haben gesehen, dass es dann Funktoren zwischen den Garbenkategorien auf den beiden Räumen gibt.

Definition 8.14. *Seien* $(\mathcal{C}, T)$ *und* $(\mathcal{C}', T')$ *Siten. Ein* Morphismus von Siten *ist ein Funktor* $a : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$*, so dass gilt:*

(i) Ist $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ *eine Überdeckung in* T*, so ist* $\{a(U_i) \to a(U)\}_{i \in I}$ *eine Überdeckung in* T'*.*

(ii) Ist $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ *eine Überdeckung in* T *und* $V \to U$ *ein Morphismus in* $\mathcal{C}$*, so ist*

$$a(U_i \times_U V) \to a(U_i) \times_{a(U)} a(V)$$

ein Isomorphismus.

Beispiel. (i) Sei $f : X \to Y$ stetig. Dann ist $a = f^{-1} : \underline{Y} \to \underline{X}$ ein Morphismus von Siten. Man beachte, dass er in die Gegenrichtung geht!

(ii) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. Dann ist der Basiswechsel ein Morphismus von Siten $Y_{\mathrm{et}} \to X_{\mathrm{et}}$.

(iii) Sei X eine Varietät, $X_{\mathrm{Zar}} = \underline{X}$. Dann ist die Inklusion $X_{\mathrm{Zar}} \to X_{\mathrm{et}}$ ein Morphismus von Siten.

(iv) Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der Varietäten mit der etalen Topologie, X eine Varietät. Dann ist die Inklusion $X_{\mathrm{et}} \to \mathcal{C}$ ein Morphismus von Siten.

Satz 8.15. *(i) Sei* $a : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ *ein Funktor. Dann gibt es adjungierte Funktoren*

$$a_* : \mathrm{PSh}(\mathcal{C}') \to \mathrm{PSh}(\mathcal{C}) \qquad a^* : \mathrm{PSh}(\mathcal{C}) \to \mathrm{PSh}(\mathcal{C}')$$

d.h.

$$\mathrm{Hom}(a_*\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, a^*\mathcal{G})$$

für alle $\mathcal{F} \in \mathrm{PSh}(\mathcal{C}')$*,* $\mathcal{G} \in \mathrm{PSh}(\mathcal{C})$*.*

(ii) Sei $a : (\mathcal{C}, T) \to (\mathcal{C}', T')$ *ein Morphismus von Siten. Dann gibt es adjungierte Funktoren*

$$a^* : \mathrm{Sh}(\mathcal{C}') \to \mathrm{Sh}(\mathcal{C}) \qquad a_* : \mathrm{Sh}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Sh}(\mathcal{C}')$$

Beweis: Sei $\mathcal{F}'$ Prägarbe auf $\mathcal{C}'$. Dann ist

$$U \mapsto \mathcal{F}'(a(U))$$

eine Prägarbe auf $\mathcal{C}$. Diese nennen wir $a^*\mathcal{F}'$. Die universelle Eigenschaft bestimmt dann die Prägarbe $a_*\mathcal{F}$ eindeutig:

$$U' \mapsto \lim_{(U,\phi)} \mathcal{F}(U)$$

wobei U ein Objekt von $\mathcal{C}$ und $\phi : U' \to a(U)$ ein Morphismus in $\mathcal{C}'$. Als Übergangsabbildungen verwenden wir Morphismen $U_1 \to U_2$ verträglich mit ϕ_1, ϕ_2. Da beliebige Limiten in der Kategorie der abelschen Gruppen existieren, existiert dieser Limes. Man sieht rein formal, dass dies eine Prägarbe definiert, die die richtige universelle Eigenschaft hat.
a^* im Prägarbensinn erhält die Garbeneigenschaft. a_* im Garbensinn erhält man als Garbifizierung von a_* im Prägarbensinn. □

Beispiel. (i) Sei $f : X \to Y$ Morphismus von Varietäten. Dann erhalten wir

$$f^* : \mathrm{Sh}(Y_{\mathrm{et}}) \to \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{et}}) \qquad f_* : \mathrm{Sh}(X_{\mathrm{et}}) \to \mathrm{Sh}(Y_{\mathrm{et}})$$

wobei $f^* = a_*$, $f_* = a^*$ für den induzierten Morphismus von Siten.

(ii) Sei $f : X_{\mathrm{Zar}} \to X_{\mathrm{et}}$ die Inklusion. Dann ist f^* die Einschränkung und f_* die etale Garbifizierung. Im einzelnen: Sei $\mathcal{F}$ Zariski-Garbe auf X und $i : U' \to X$ etale. Dann ist $i(U) \subset X$ offen. Daher hat das System der (U, ϕ) mit $\phi : U' \to U$ ein finales Objekt, nämlich $U = i(U')$ und wir erhalten

$$a_*\mathcal{F}(U \to X) = \mathcal{F}(i(U))$$

(iii) Sei $\star$ die Kategorie mit einem Objekt und einzigem Morphismus die Identität. Sei $(\mathcal{C}, T)$ ein Situs. Wir betrachten einen Morphismus von Siten $a : (\mathcal{C}, T) \to \star$. Eine abelsche Prägarbe auf $\star$ ist eine einzige abelsche Gruppe A. Die Prägarbe a_*A ist dann die konstante Prägarbe. (Ihre Garbifizierung der heißt *konstante Garbe*). Mit den Garben ist es subtiler. Es gibt nämlich zwei Topologien auf $\star$, je nachdem, ob die leere Familie eine Überdeckung von $\star$ ist oder nicht. Im ersten Fall ist die die einzige Garbe auf $\star$ die Gruppe 0. Im zweiten Fall erhalten wir die Kategorie der abelschen Gruppen. Dann gibt es aber zum Beispiel keinen Morphismus von Siten $X_{\mathrm{et}} \to \star$.

Wir sind besonders an den konstanten etalen Garben $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ interessiert - und allem was man daraus durch Zurückziehen und Herunterdrücken, Summen, Kerne und Kokerne erhält.

Definition 8.16. *Sei X eine Varietät. Eine etale Garbe $\mathcal{F}$ heißt* lokal-konstant, *wenn es eine etale Überdeckung $f : X' \to X$ gibt, so dass $f^*\mathcal{F}$ konstant ist. Sie heißt* endlich lokal-konstant, *wenn die Fasern endliche abelsche Gruppen sind. Eine etale Garbe $\mathcal{F}$ auf X_{et} heißt* konstruierbar, *wenn es eine Folge von abgeschlossenen Untervarietäten*

$$X = X_n \supset X_{n-1} \supset \cdots \supset X_0 = \emptyset$$

gibt, so dass $\mathcal{F}$ eingeschränkt auf alle $X_{i+1} \smallsetminus X_i$ isomorph zu einer endlich lokal-konstanten Garbe ist.

Statt endlich lokal-konstant sagt man auch *lisse* oder *glatt*.

Halme

Definition 8.17. *Sei X eine Varietät. Ein* geometrischer Punkt *ist die Wahl eines Punktes $P \in X$ und eines separablen Abschlusses $\overline{\kappa(P)}$ von κ. Wir schreiben $\overline{P} : \operatorname{Spm} \overline{\kappa(P)} \to X$.*

Bemerkung. $\overline{\kappa(P)}$ ist keine k-Algebra von endlichem Typ, aber Vereinigung von solchen. Damit kann $\overline{P}$ als formaler projektiver Limes von Varietätenmorphismen aufgefasst werden. Eigentlich ist die Konstruktion aber harmlos: P liegt in einer affinen offenen Teilmenge $\operatorname{Spm} A$ und dann ist $\overline{P}$ äquivalent zu einem k-Algebrenhomomorphismus $A \to \overline{\kappa(P)}$.

Definition 8.18. *Sei $\overline{P}$ ein geometrischer Punkt von X. Eine* etale Umgebung *von $\overline{P}$ ist eine Faktorisierung*

$$\overline{P} \to U \to X$$

wobei $U \to X$ etale ist.
Sei $\mathcal{F}$ eine etale Garbe auf X. Der Halm von $\mathcal{F}$ in $\overline{P}$ ist definiert als

$$\mathcal{F}_{\overline{P}} = \lim_{U} \mathcal{F}(U)$$

wobei der Limes über alle etalen Umgebungen von $\overline{P}$ gebildet wird.

Beispiel. Sei $X = \operatorname{Spm} k$. Ein geometrischer Punkt ist also die Wahl eines separablen Abschlusses $\overline{k}$ von k. Eine etale Umgebung von $\overline{k}$ ist gegeben als

$$k \to \bigoplus_{i=1}^{n} K_i \to \overline{k}$$

wobei K_i/k endlich und separabel. Genau ein K_{i_0} wird nach $\overline{k}$ eingebettet, also

$$k \to \bigoplus_{i=1}^{n} K_i \to K_{i_0} \to \overline{k}$$

$\operatorname{Spm} K_{i_0}$ ist eine kleinere etale Umgebung des geometrischen Punktes. Der Halm ist also

$$\mathcal{F}_{\overline{k}} = \lim_{K} \mathcal{F}(K)$$

wobei K alle endlichen Teilkörper von $\overline{k}$ durchläuft.
Je zwei separable Abschlüsse von k sind isomorph, daher sind auch die Halme in allen geometrischen Punkten isomorph - jedoch nicht kanonisch isomorph. Daher hängt der Halm vom geometrischen Punkt ab und nicht nur vom Bildpunkt in X.

Lemma 8.19. *(i) Sei $\overline{P} \to X$ ein geometrischer Punkt. Dann ist der Funktor $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_{\overline{P}}$ induziert vom Morphismus von Siten $a : X_{\mathrm{et}} \to \overline{P}_{\mathrm{et}}$.*

(ii) Der Funktor $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_{\overline{P}}$ ist exakt und vertauscht mit direkten Limiten.

(iii) Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten, $\overline{P} \to X$ ein geometrischer Punkt. Dann ist $\overline{P}$ ebenfalls ein geometrischer Punkt von Y, und es gilt

$$\mathcal{F}_{\overline{P}} = (f^*\mathcal{F})_{\overline{P}}$$

für alle etalen Garben auf Y.

Beweis: Der etale Situs von $\overline{P}$ besteht aus Varietäten, die aus endlich vielen Kopien von $\overline{P}$ bestehen. Eine Garbe auf diesem Situs ist eindeutig durch den Wert in einem Punkt bestimmt. Nach Definition ist $a_*\mathcal{F}(\overline{P}) = \mathcal{F}_{\overline{P}}$. In dieser Sichtweise ist die letzte Aussage eine Komposition von zwei Morphismen von Siten.

Ebenfalls nach Konstruktion vertauscht a_* mit direkten Limiten. Die Linksexaktheit folgt aus der Linksexaktheit von $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(U)$ und der Exaktheit von Limiten. Wir überprüfen die Rechtsexaktheit. Sei also $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ surjektiver Garbenhomomorphismus. Sei $\phi(\mathcal{F})$ die Bildprägarbe. Als Unterprägarbe einer Garbe ist sie separiert. Nach Definition ist $\phi(\mathcal{F})^+ = \phi(\mathcal{F})^\dagger = \mathcal{G}$. Sei $\overline{s} \in \mathcal{G}_{\overline{P}}$. Das Element wird repräsentiert durch ein Element von $\mathcal{G}(U)\phi(\mathcal{F})^\dagger(U)$ für eine etale Umgebung von $\overline{P}$. Dieser wird wieder nach Definition repräsentiert durch ein $s \in \check{H}^0(\mathfrak{U}, \phi(\mathcal{F}))$ für eine etale Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_i \to U\}$. Der geometrische Punkt faktorisiert über ein U_{i_0}. Wir ersetzen nun U durch U_{i_0} und verfeinern die Überdeckung $\mathfrak{U} \times U_{i_0}$ zu $\{U_{i_0} \to U_{i_0}\}$. Den Index i_0 lassen wir weg. Nun wird $\overline{s}$ repräsentiert durch ein Element von

$$\check{H}^0(\{U \to U\}, \phi(\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}(\phi(\mathcal{F})(U) \to \phi(\mathcal{F})(U)) = \phi(\mathcal{F})(U)$$

Dieses hat ein Urbild in $\mathcal{F}(U)$. □

Satz 8.20. *Eine etale Garbe $\mathcal{F}$ verschwindet genau dann, wenn alle Halme in geometrischen Punkten verschwinden.*

Beweis: Dies ist eine Übungsaufgabe im Rechnen mit Garben. Sei $\mathcal{F}$ etale Garbe, $\mathcal{F}_{\overline{P}} = 0$ für alle geometrischen Punkte. Sei $s \in \mathcal{F}(U)$. Dann verschwindet s in $\mathcal{F}_{\overline{P}}$. Nach Definition gibt es eine etale Umgebung $U_{\overline{P}}$ von $\overline{P}$, so dass s über $U_{\overline{P}}$ verschwindet. Über jedem Punkt $P \in X$ gibt es einen geometrischen Punkt $\overline{P}$. Daher ist die Familie der $U_{\overline{P}}$ eine etale Überdeckung von U. Aus dem Garbenaxiom folgt, dass s verschwindet. □

Man sagt, der etale Situs hat genügend viele Punkte. Das ist nicht für jeden Situs der Fall. Ein Gegenbeispiel ist die rigid-analytische Topologie der p-adischen Analysis.

Kapitel 9

Garbenkohomologie

Abgeleitete Funktoren

Wir fassen hier im Sinne Grothendiecks Kohomologie als eine Maschine auf, die lange exakte Sequenzen produziert.
Literatur: Hartshorne Kap. III

Definition 9.1. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie. Ein Objekt $I \in \mathcal{A}$ heißt* injektiv*, wenn* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\cdot, I)$ *exakt ist. D.h. für jede Inklusion $A \to A'$ in $\mathcal{A}$ und jeden Morphismus $A \to I$ existiert ein Lift $A' \to I$.*
Wir sagen $\mathcal{A}$ hat genügend viele Injektive*, wenn es für jedes Objekt A ein injektives I und einen Monomorphismus $A \to I$ gibt.*

Speziell in der Kategorie der abelschen Gruppen sind Injektive leicht zu finden.

Definition 9.2. *Eine abelsche Gruppe I heißt* divisibel*, wenn es für jedes $a \in A$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $b \in I$ gibt mit $nb = a$.*

Beispiele sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Satz 9.3. *Divisible abelsche Gruppen sind injektiv. Die Kategorie hat genügend viele Injektive.*

Beweis: Sei I divisibel. Da jede abelsche Gruppe Vereinigung ihrer endlich erzeugten Untergruppen ist, genügt es, die universelle Eigenschaft für endlich erzeugte abelsche Gruppen zu überprüfen. Sei also $A' \to A$ Inklusion von endlich erzeugten abelschen Gruppen. Nach dem Struktursatz für endliche erzeugte abelsche Gruppen ist A direkte Summe von zyklischen Moduln. Wir beweisen die Aussage mit Induktion über die Anzahl der Summanden.
Sei also zunächst A zyklisch. Ist $A = \mathbb{Z}$, so ist $A' = n\mathbb{Z}$. Ein Morphismus $A' \to I$ ist definiert durch $n \mapsto a$. Nach Voraussetzung gibt es $b \in I$ mit $nb = a$. Der Morphismus liftet zu $1 \mapsto b$. Ist $A = \mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ mit p prim, so ist $A' = p^j\mathbb{Z}/p^i\mathbb{Z}$ mit $j \leq i$. Wieder ist $A' \to I$ gegeben durch $p^i \mapsto a$ mit der Nebenbedingung $p^{j-i}a = 0$. Dies liftet zu $1 \mapsto b$ mit $p^j b = a$ und die Nebenbedingung $p^i b = p^{i-j}p^j b = 0$ ist erfüllt.

Für den Induktionsschritt betrachten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow\subset & & \uparrow\subset & & \uparrow\subset & & \\
0 & \longrightarrow & A_1' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A_2' & \longrightarrow &
\end{array}$$

wobei die obere Zeile split-exakt ist und A_1 und A_2 aus weniger Summanden bestehen, also die Liftungseigenschaft bezüglich I hier schon gilt. Dies führt zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(A_1, I) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(A, I) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(A_2, I) & \longleftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathrm{Hom}(A_1', I) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(A', I) & \longleftarrow & \mathrm{Hom}(A_2', I) & \longleftarrow & 0
\end{array}$$

mit exakten Zeilen, und in dem die äußeren vertikalen Pfeile surjektiv sind. Eine Diagrammjagd ergibt die Surjektivität in der Mitte.
Offensichtlich lassen sich nun endlich erzeugte abelsche Gruppen in Injektive einbetten: Der freie Anteil in einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum, eine Torsionsgruppe $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ mit $1 \mapsto 1/N$ nach $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
Sei A abelsche Gruppe mit Erzeugendensystem $\{a_i\}_{i\in I}$. Dann erhalten wir eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to K \to \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z} \to A \to 0$$

Daher bettet sich A ein nach $I = (\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Q})/K$. Dieses I ist divisibel, also injektiv. □

Satz 9.4. *Sei X ein topologischer Raum oder eine Varietät mit der etalen Topologie. Dann haben die Kategorien von Garben genügend viele Injektive.*

Beweis: Wir beginnen mit einem topologischen Raum. Sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe. Für jeden Punkt $P \in X$ sei $\mathcal{F}_P \to I_P$ eine Inklusion in eine injektive Gruppe. Wir setzen $\mathcal{I} = \prod_{P\in P} i_{P*}I_P$, wobei $i_P : P \to X$ die Inklusion ist. (Direkte Produkte von Garben werden definiert als Garbifizierung des direkten Produktes von Prägarben).

Behauptung. *$\mathcal{I}$ ist injektiv.*

Es ist

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \prod i_{P*}I_P) = \prod \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, i_{P*}I_P) = \prod \mathrm{Hom}(i_P^*\mathcal{G}, I_P)$$

Weiter gilt $i_P^* = \mathcal{G}_P$. Die Exaktheit des Funktors folgt aus der Exaktheit des direkten Produktes für abelsche Gruppen, Exaktheit der Halmbildung und der Injektivität der I_P. Speziell für $\mathcal{G} = \mathcal{F}$ erhalten wir eine natürliche Abbildung $\mathcal{F} \to \mathcal{I}$. Dies ist injektiv, da die Abbildung auf Halmen $\mathcal{F}_P \to \mathcal{I}_P \to (i_{P*}\mathcal{F}_P)_P = \mathcal{F}_P$ injektiv ist.

In der etalen Situation benutzen wir denselben Ansatz. Sei X eine Varietät, $P \in X$ ein Punkt und $i_{\overline{P}} : \operatorname{Spm} \overline{\kappa(P)} \to X$ ein geometrischer Punkt über P. Dieser definiert einen Morphismus von Siten aus der Komposition von

$$X_{\text{et}} \to \operatorname{Spm} \kappa(P)_{\text{et}} \to \overline{\kappa(P)}_{\text{et}}$$

$i^*_{\overline{P}}$ ist dann genau der Halm im geometrischen Punkt. $\square$

Bemerkung. Tatsächlich reicht eine sehr milde Bedingung an den Situs, um die Existenz von Injektiven zu garantieren.

Definition 9.5. *Sei $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie.*

(i) Ein Komplex in $\mathcal{A}$ ist eine Folge

$$\dots \xrightarrow{d^{i-1}} K^i \xrightarrow{d^i} K^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} K^{i+2} \to \dots$$

so dass $d^{i+1} \circ d^i = 0$ für alle $i \in \mathbb{Z}$.

(ii) Sei K^* ein Komplex. Dann heißt

$$H^i(K^*) = \operatorname{Ker} d^i / \operatorname{Im} d^{i-1}$$

i-te Kohomologie von K^*.

(iii) Eine Homotopie *von Komplexen C^* und K^* ist eine Folge von Abbildungen $h^i : C^i \to K^{i-1}$. Zwei Morphismen von Komplexen heißen* homotop *wenn $f^i - g^i = d^{i-1}h^i + h^{i+1}d^i$ für $i \geq 0$.*

(iv) Zwei Komplexe C^* und K^* heißen homotopieäquivalent*, wenn es Morphismen von Komplexen $\phi : C^* \to K^*$ und $\psi : K^* \to C^*$, so dass $\phi \circ \psi$ und $\psi \circ \phi$ homotop zur Identität sind.*

Lemma 9.6. *Homotope Morphismen induzieren dieselbe Abbildung auf der Kohomologie. Homotopieäquivalente Komplexe haben isomorphe Kohomologie.*

Beweis: Die Differenz $dh + hd$ ist 0 auf der Kohomologie. $\square$

Definition 9.7. *(i) Sei A ein Objekt. Eine* Auflösung *ist ein Komplex*

$$0 \to C^0 \to C^1 \to \dots$$

zusammen mit einer Abbildung $A \to C^0$, so dass der augmentierte Komplex

$$0 \to A \to C^0 \to C^1 \to \dots$$

exakt ist. Die Auflösung heißt injektiv*, wenn alle C^i injektiv sind.*

(ii) Sei $f : A \to B$ ein Morphismus in $\mathcal{A}$. Seien C^*_A und C^*_B Auflösungen von A und B. Ein Morphismus von Auflösungen über f *ist ein Komplexhomomorphismus $f^* : C^*_A \to C^*_B$ verträglich mit der Inklusion von A und B.*

(iii) *Zwei Morphismen von Auflösungen heißen* homotop, *wenn sie homotop als Morphismen von Komplexen sind (also $h^i = 0$ für $i \leq 0$).*

(iv) *Zwei Auflösungen C_A^* und $C*_B$ heißen* homotopieäquivalent, *wenn es Morphismen von Auflösungen $\phi : C_A^* \to C_B^*$ und $\psi : C_B^* \to C_A^*$ gibt, so dass $\phi\psi$ und $\psi\phi$ homotop zur Identität sind.*

Lemma 9.8. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven. Dann hat jedes Objekt eine injektive Auflösung. Jeder Morphismus setzt sich fort zu einem Morphismus von injektiven Auflösungen. Je zwei Morphismen von injektiven Auflösungen sind homotop. Insbesondere sind je zwei injektive Auflösungen desselben Objektes homotopieäquivalent.*

Beweis: Sei A ein Objekt. Sei $A \to I^0$ Inklusion mit I^0 injektiv. Sei $A^1 = I^0/A$. Sei $A^1 \to I^1$ Inklusion mit I^1 injektiv. Nach Konstruktion ist

$$0 \to A \to I^0 \to I^1$$

exakt. Wir fahren induktiv fort: $A^i = I^{i-1}/A^{i-1}$, $A^i \to I^i$ Inklusion in ein injektives Objekt und erhalten eine injektive Auflösung.
Sei $f : A \to B$ ein Morphismus in A. Seien I^* und J^* injektive Auflösungen. Wir betrachten also

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & J^0 & \longrightarrow & J^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

$A \to I^0$ ist injektiv. Wir betrachten die Komposition $A \to B \to J^0$ in das injektive Objekt J^0. Wegen der universellen Eigenschaft gibt es einen Lift nach $I^0 \to J^0$, also einen Morphismus, der in das Diagramm passt. Wir gehen über zum neuen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^0/A & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & \big\downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & J^0/B & \longrightarrow & J^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Mit demselben Argument fahren wir fort und erhalten den gesuchten Morphismus von Auflösungen.
Gegeben seien nun zwei Morphismen von Auflösungen. Wir betrachten die Differenz, also das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & I^0 & \longrightarrow & I^1 & \longrightarrow & \dots \\ & & {\scriptstyle 0}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f^0-g^0} & & \big\downarrow{\scriptstyle f^1-g^1} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & J^0 & \longrightarrow & J^1 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

$f^0 - g^0$ induziert eine Abbildung $I^0/A \to J^0$. $I^0/A \to I^1$ ist injektiv. Aus der universellen Eigenschaft von J^0 folgt die Existenz eines Lifts, also $h^1 : I^1 \to J^0$. Im nächsten Schritt betrachten wir

$$\begin{tikzcd}
I^0 \arrow[r] \arrow[d, "f^0-g^0-h^1d"'] & I^1 \arrow[r] \arrow[d, "f^1-g^1-dh^1"] & I^2 \arrow[d, "f^2-g^2"] \\
J^0 \arrow[r] & J^1 \arrow[r] & J^2
\end{tikzcd}$$

und wiederholen das Argument. □

Damit können wir abgeleitete Funktoren einführen.

Definition 9.9. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein linksexakter Funktor. Sei A ein Objekt von $\mathcal{A}$ und I^* eine injektive Auflösung. Dann heißt*

$$R^iF(A) = H^i(F(I^*))$$

i-ter rechtsabgeleiteter Funktor *von A.*

Bemerkung. Für rechtsexakte Funktoren arbeitet man mit projektiven Auflösungen und erhält linksabgeleitete Funktoren.

Lemma 9.10. *$R^iF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist ein wohldefinierter Funktor. Es gilt $R^0F = F$. Ist*

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{A}$, so erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$0 \to R^0F(A') \to R^0F(A) \to R^0F(A'') \to R^1F(A') \to R^1(A) \to \dots$$

Die Verbindungshomomorphismen $R^i(A'') \to R^{i+1}F(A')$ sind natürlich.

Beweis: Gegeben ein Morphismus von Objekten, so erhalten wir einen Morphismus der injektiven Auflösungen und daher einen Morphismus auf der Kohomologie. Auch nach Anwenden von F sind je zwei solche Morphismen homotopieäquivalent und stimmen daher auf der Kohomologie überein. Angewendet auf verschiedene Auflösungen eines Objektes sehen wir die Wohldefiniertheit.
$R^0F = F$ folgt aus der Definition und Linksexaktheit von F.
Sei nun $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ eine kurze exakte Sequenz. Seien I^* und J^* injektive Auflösungen von A' und A''. Wir zeigen die Existenz eines Morphismus $A \to I^0 \oplus J^0$, so dass

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] & I^0 \oplus J^0 \arrow[r] & J^0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u] & A'' \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Komponente $A \to J^0$ ist durch das kommutative Diagramm gegeben. Die Komponente $A \to I^0$ erhalten wir als Lift von $A' \to I^0$, da I^0

injektiv ist. Dasselbe Verfahren definiert eine injektive Auflösung K^* von A, so dass

$$0 \to I^* \to K^* \to J^* \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Komplexen ist. Die Zeilen sind split-exakt. Wir wenden F an und erhalten eine kurze exakte Sequenz von Komplexen

$$0 \to F(I^*) \to F(K^*) \to F(J^*) \to 0$$

Die zugehörige lange exakte Sequenz von Kohomologiegruppen ist die gesuchte. $\square$

Hier finden sich zwei wichtige klassische Beispiele.

Beispiel. Sei $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ die Kategorie der abelschen Gruppen. Für jedes Objekt A ist $\mathrm{Hom}(A, \cdot)$ linksexakt. Dann heißt

$$\mathrm{Ext}^i(A, B) := R^i \,\mathrm{Hom}(A, B)$$

i-te Erweiterungsgruppe von A durch B.
Für jedes Objekt A ist $\cdot \otimes A$ rechtsexakt. Dann heißt die

$$\mathrm{Tor}_i(A, B) = L_i A \otimes B$$

i-Torsionsgruppe von A und B.

Definition 9.11. *Sei $(\mathcal{C}, T)$ ein Situs, $X \in \mathcal{C}$. Wir schreiben*

$$\Gamma(X, \cdot) : \mathrm{Sh}(\mathcal{C}, T) \to \mathrm{ab} \qquad \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}(X)$$

und für die abgeleiteten Funktoren

$$H^i_T(X, \mathcal{F}) := R^i\Gamma(X, \mathcal{F})$$

die i-te Garbenkohomologie von X mit Werten in $\mathcal{F}$.
Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Varietäten. Dann heißen die $R^i f_*$ (in der Zariski oder etalen Topologie) höhere direkte Bilder.

Bemerkung. Singuläre Kohomologie einer Mannigfaltigkeit stimmt mit ihrer Garbenkohomologie mit Koeffizienten in der jeweiligen konstanten Garbe. Der entscheidende Fall ist der einer Kugel.

Die Definition mit injektiven Auflösungen sind willkürlich aus, ist es aber nicht.

Definition 9.12. *Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ abelsche Kategorien und Eine δ-Funktor auf $\mathcal{A}$ mit Werten in $\mathcal{B}$ ist eine Folge von Funktoren*

$$F^i : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \qquad i \geq 0$$

zusammen mit für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \to A' \to A \to A'' \to 0$$

in A eine natürliche lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned}0 \to F^0(A') \to F^0(A) \to F^0(A'') \to F^1(A') \to \dots \\ F^i(A)' \to F^i(A) \to F^i(A'') \to F^{i+1}(A') \to \dots\end{aligned}$$

Sei $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linksexakt. Ein universeller δ-Funktor *F^* zu F ist ein δ-Funktor mit $F = F^0$, so dass es für jeden anderen δ-Funktor mit $F'^0 = F$ natürliche Transformationen $F^i \to F'^i$ gibt, verträglich mit den langen exakten Sequenzen.*

Satz 9.13. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linksexakt. Dann sind die R^iF ein universeller δ-Funktor.*

Beweis: Grothendieck, sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. j. 9 (1957), 119–221, II 2.2.1 □

Injektive Objekte sind sehr abstrakt und für konkrete Rechnungen eher nutzlos. Statt dessen arbeitet man mit azyklischen Auflösungen.

Definition 9.14. *Sei $\mathcal{A}$ eine abelsche Kategorie mit genügend vielen Injektiven, $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ linksexakt. Ein Objekt $A \in \mathcal{A}$ heißt* azyklisch *für F, wenn*

$$R^iF(A) = 0 \qquad i \geq 1$$

Eine Auflösung K^* heißt azyklisch, *wenn alle K^i azyklisch sind.*

Lemma 9.15. *Sei A ein Objekt, K^* eine azyklische Auflösung. Dann gilt*

$$R^iF(A) = H^i_*(F(K^*))$$

Beweis: Mit einem Spektralsequenzargument ist das sofort klar. Hier der explizite Beweis. Für alle i sei $C^i = \operatorname{Coker} d^{i-1}$. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \to A \to K^0 \to C^0 \to 0$$

Diese induziert eine lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned}0 \to F(A) \to F(K^0) \to F(C^0) \to R^1F(A) \to 0 \\ \to R^1F(C^0) \to R^2F(A) \to 0 \dots\end{aligned}$$

also $R^iF(C^0) = R^{i+1}F(A)$ für $i \geq 1$. Andererseits ergibt anwenden von F auf

$$0 \to C^0 \to K^1 \to K^2$$

dass $F(C^0) = \operatorname{Ker}(F(d^1))$. Also

$$R^1F(A) = \operatorname{Ker}(F(d^0))/\operatorname{Im} F(d^0)$$

Wir wiederholen das Argument nun induktiv mit den exakten Sequenzen

$$0 \to C^i \to K^{i+1} \to C^{i+1} \to 0$$

□

Nun brauchen wir nur noch azyklische Objekte.

Definition 9.16. *Sei X ein topologischer Raum. Eine Garbe heißt* welk*, wenn für alle $V \subset U$ die Abbildung $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ surjektiv ist.*

Beispiel. Sei X reelle Mannigfaltigkeit. Dann ist die Garbe der differenzierbaren Funktionen welk. (Nicht ganz offensichtlich, Teilung der Eins!)

Beispiel. Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe. Dann ist

$$U \mapsto \bigoplus_{P \in U} \mathcal{F}_P$$

eine welke Garbe. Die mittels dieser Vorschrift konstruierten Auflösungen heißen *Godement*-Auflösungen.

Satz 9.17. *(i) Sei $\mathcal{F}$ eine Garbe. Dann ist*

$$U \mapsto \bigoplus_{P \in U} \mathcal{F}_P$$

eine welke Garbe.

(ii) Injektive Garben sind welk.

(iii) Welke Garben sind azyklisch für Schnittfunktoren $\Gamma(U, \cdot)$.

Beweis: Hartshorne

$\square$

Die analoge Aussage für die etale Topologie ist komplizierter.

Kapitel 10

Ausblick

Über algebraisch abgeschlossenen Körpern verhält sich etale Kohomologie wie gewöhnliche singuläre Kohomologie.

Theorem 10.1. *Sei k algebraisch abgeschlossen, X eine k-Varietät, $\mathcal{F}$ eine konstruierbare Garbe auf X mit* $\mathrm{Char}(k)$ *invertierbar auf $\mathcal{F}$. Dann sind alle etalen Kohomologiegruppen*

$$H^i_{\mathrm{et}}(X, \mathcal{F})$$

endliche abelsche Gruppen. Sie verschwinden für $i > 2\dim X$.

Speziell für $k = \mathbb{C}$ erhalten wir einen Vergleichsisomorphismus.

Definition 10.2. *Sei X ein topologischer Raum. Wir definieren den Situs X_{et} auf der Kategorie der lokalen Homöomorphismen $Z \to X$ und als Überdeckungen solche Familien $\{U_i \to U\}_{i \in I}$ von lokalen Homöomorphismen mit $\bigcup U_i = U$.*

Ist $X/\mathbb{C}$ eine Varietät, $X(\mathbb{C})$ der zugehörige topologische Raum mit der Topologie induziert von der metrischen Topologie auf $\mathbb{C}^n$, also der gewöhnlichen Topologie. Dann gibt es offensichtliche Morphismen von Siten

$$X_{\mathrm{et}} \to X(\mathbb{C})_{\mathrm{et}} \leftarrow \underline{X(\mathbb{C})}$$

Es ist leicht zu sehen, dass der zweite eine Äquivalenz der Kategorien von Garben induziert.

Theorem 10.3. *Sei $X/\mathbb{C}$ eine Varietät. Dann ist*

$$H^i_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

Die Kohomologie rechts ist singuläre Kohomologie. Sie kann auch als Garbenkohomologie berechnet werden. Dann verallgemeinert sich die Aussage auch auf konstruierbare Garben und deren Bilder.
Über einem beliebigem Körper berechnet sich etale Kohomologie als Galoiskohomologie der etalen Kohomologie über dem separablen Abschluss. Sie ist im allgemeinen unendlich-dimensional.
Jedoch:

Theorem 10.4. *Sei k Körper, X eine k-Varietät, $\mathcal{F}$ eine konstruierbare Garbe auf X mit* $\mathrm{Char}(k)$ *invertierbar auf $\mathcal{F}$. Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus. Dann sind alle Garben*

$$R^i f_* \mathcal{F}$$

konstruierbar. Sie verschwinden für $i >> 0$.

Speziell für $Y = \mathrm{Spm}\, k$ erhalten wir eine konstruierbare etale Garbe auf $\mathrm{Spm}\, k$, oder äquivalent eine abelsche Gruppe mit Operation von $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Diese ist isomorph zu

$$H^i_{\mathrm{et}}(\overline{X}, \mathcal{F}) \qquad \overline{X} = X_{\overline{k}}$$

Dies sind die Galoismoduln, die im Beweis der Weil-Vermutung vorkommen werden! Bisher handelt es sich jedoch um endliche Gruppen, statt der gewünschten Koeffizienten in einem Körper der Charakteristik 0.

Definition 10.5. *Sei X eine Varietät über $\mathbb{F}_q$ wobei $q = p^n$. Sei l eine Primzahl ungleich p. Die l*-adische Kohomologie *ist definiert als*

$$H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) := \mathbb{Q}_l \otimes_{\mathbb{Z}_l} \varprojlim H^i(X_{\overline{\mathbb{F}}_q}, \mathbb{Z}/l^\nu \mathbb{Z})$$

mit der natürlichen Operation von $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q)$.

Satz 10.6. $H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)$ *ist ein endlich-dimensionaler $\mathbb{Q}_l$-Vektorraum und verschwindet für $i > 2 \dim X$.*

Dies ist die gesuchte Kohomologietheorie. Es gilt eine Fixpunktformel:

Satz 10.7. *Sei X projektiv. Dann gilt*

$$|X(\mathbb{F}_q)| = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \mathrm{Tr}(\Phi^* | H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_l))$$

(Für allgemeine Varietäten muss man hier Kohomologie mit kompaktem Träger benutzen.) Die Rechnungen aus Kapitel 0 führen nun leicht zum Beweis der Rationalität der Zeta-Funktion. Sei

$$P_i(t) = \det(1 - \Phi^* t | H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_l)) \in \mathbb{Q}_l[t]$$

Wir erinnern uns:

$$Z(X,t) = \prod_{x \in X} \frac{1}{1 - t^{\deg x}} = \exp \sum N_r \frac{t^r}{r}$$

wobei $N_r = |X(\mathbb{F}_{q^r})|$ und $\deg x = [\kappa(x) : \mathbb{F}_q]$.

Korollar 10.8.

$$Z(X,t) = \prod P_i(t)^{(-1)^{i+1}}$$

Dass hier Koeffizienten in $\mathbb{Q}_l$ statt $\mathbb{Q}$ auftauchen, ist ein Schönheitsfehler. Es ist bis heute nicht bewiesen, ob für beliebige Varietäten die einzelnen P_i unabhängig von der Wahl von l sind! Für glatt projektive Varietäten folgt es aus Delignes Ergebnis, der sogenannten Riemannschen Vermutung.
Die Funktionalgleichung folgt aus Poincaré-Dualität.

Definition 10.9. *Sei $l \neq \mathrm{Char}(k)$. Sei $\mu_{l^n} \subset \overline{k}^*$ die Gruppe der l^n-ten Einheitswurzeln mit der natürlichen Operation von* $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$*.*

$$\mathbb{Z}_l(1) := \varprojlim_n \mu_{l^n}, \qquad \mathbb{Z}_l(n) = \mathbb{Z}_l(1)^{\otimes n}, \qquad \mathbb{Q}_l(n) = \mathbb{Q}_l \otimes \mathbb{Z}_l(n)$$

Bemerkung. Als Gruppe ist $\mu_{l^n} \cong \mathbb{Z}/l^n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_l(1) \cong \mathbb{Z}_l$ und daher $\mathbb{Q}_l(n) \cong \mathbb{Q}_l$.

Beispiel. Für $k = \mathbb{F}_p$ operiert Φ auf $\mathbb{Q}_l(1)$ durch Multiplikation mit p.

Theorem 10.10 (Poincaré-Dualität)**.** *Sei X glatt projektive Varietät der Dimension n Dann ist*

$$H^{2n}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) \cong \mathbb{Q}_l(-n)$$

und die Paarungen

$$H^i(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) \times H^{2i-1}(X, \mathbb{Q}_l) \to H^{2n}(\overline{X}, \mathbb{Q}_l) \to \mathbb{Q}_l(-n)$$

sind perfekt.

Elliptische Kurven

Sei E/k eine elliptische Kurve. Für jede Varietät S trägt dann $E(S)$ die Struktur einer abelschen Gruppe. Dies definiert eine etale Garbe. Für N teilerfremd zur Charakteristik erhalten wir eine kurze exakte Sequenz etaler Garben

$$0 \to E[N] \to E \xrightarrow{[N]} E \to 0$$

Diese heißt auch *Kummer-Sequenz*, analog zur entsprechenden Sequenz für Einheitswurzeln. Der Halm von $E[N]$ ist isomorph zu $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$. Der l-adische Tatemodul einer elliptischen Kurve ist

$$T_l(E) = \varprojlim_n E[l^n], \qquad V_l(E) = \mathbb{Q}_l \otimes T_l(E)$$

Als Vektorraum ist $V_l(E)$ isomorph zu $\mathbb{Q}_l^2$.
Sei $E[l^n]$ der Kern der Multiplikation mit l^n. Wir fassen ihn als etale Garbe auf, also

Satz 10.11. *Es gilt*

$$H^1(\overline{E}, \mathbb{Q}_l)(1) = \mathbb{Q}_l \otimes V_l(E)$$

Die Weil-Paarung

$$V_l(E) \times V_l(E) \to \mathbb{Q}_l(1)$$

übersetzt sich in Poincaré-Dualität

$$H^1(\overline{E}, \mathbb{Q}_l) \times H^1(\overline{E}, \mathbb{Q}_l) \to \mathbb{Q}_l(-1)$$

Der direkte Beweis der Weil-Vermutung für elliptische Kurven im Seminar übersetzt sich so in den mit etaler Kohomologie.
Sei nun K ein Zahlkörper, E elliptische Kurve über K. Der *schwache Satz von Mordell-Weil* besagt, dass $E(K)/NE(K)$ endlich ist. Der Beweis im Seminar hat eine kohomologische Interpretation. Wir betrachten nämlich die lange exakte Kohomologiesequenz zur Kummer-Sequenz

$$0 \to E[N](K) \to E(K) \xrightarrow{[N]} E(K) \to H^1_{\text{et}}(K, E[N]) \to H^1_{\text{et}}(K, E) \to \dots$$

Die etale Kohomologie von k lässt sich als Gruppenkohomologie berechnen. Ist der Koeffizientenmodul trivial (also $E[N](K) = E[N](\overline{K})$), so gilt

$$H^1_{\text{et}}(K, E[N]) = \text{Hom}(\text{Gal}(\overline{K}/K), \mathbb{Z}/N) \otimes E[N]$$

Die Endlichkeit von $\text{Hom}(\text{Gal}(\overline{K}/K), \mathbb{Z}/N)$ ist ein echter zahlentheoretischer Satz.

Plan fürs Sommersemester

Möglichst viele Beweise für Eigenschaften von etaler Kohomologie!

Inhaltsverzeichnis