# Übungen zur Vorlesung
# “Algebraische Zahlentheorie”
# WS 2011/12 Blatt 1

**Ausgabe:** 27.10.2011, **Abgabe:** 03.11.2011

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws11/azt/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

---

**Aufgabe 1.1:** Sei $R$ ein Ring, $f : M \to N$ ein $R$-Modulhomomorphismus.

(i) Zeigen Sie, daß

$$0 \to \ker f \to M \xrightarrow{f} N \to N/\operatorname{im} f \to 0$$

eine exakte Sequenz von $R$-Moduln ist.

(ii) Sei $f$ surjektiv und $N$ ein freier Modul. Dann ist $M \cong N \oplus \ker f$.

(6 Punkte)

**Aufgabe 1.2:** Geben Sie eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{3}})$ an. Wie sieht in dieser Basis die darstellende Matrix für die Multiplikation mit $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ aus?

(3 Punkte)

**Aufgabe 1.3:** Bestimmen Sie die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von $X^4 - 4X^2 + 2$ über $\mathbb{Q}$.

(6 Punkte)

**Aufgabe 1.4:** Sind die folgenden Zahlen ganz über $\mathbb{Z}$?

$$\frac{-19+4\sqrt{-5}}{21-3\sqrt{-5}}, \qquad \frac{3+2\zeta_3}{1+\zeta_3}, \qquad \frac{\sqrt[3]{2}}{3}, \qquad \frac{5+3\sqrt{5}+\sqrt{13}+3\sqrt{65}}{4}$$

(5 Punkte)