

Übungen zur Vorlesung
“Algebraische Zahlentheorie”
WS 2011/12 Blatt 10
Ausgabe: 12.01.2012, Abgabe: 19.01.2012

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws11/azt/azt.html>

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe 10.1: Zeigen Sie, daß die Gleichung $x^2 + 5 = y^3$ keine ganzzahligen Lösungen hat.

Hinweis: Die Klassengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ hat keine 3-Torsion, der Rest sind Teilbarkeitsargumente in $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

(8 Punkte)

Aufgabe 10.2: Zeigen Sie, daß jeder Zahlkörper von ungeradem Grad nur die Einheitswurzeln ± 1 besitzt.

(2 Punkte)

Aufgabe 10.3: Sei $K = \mathbb{Q}(\theta)$, wobei θ eine Wurzel von $X^3 - 2X - 3$ ist. Bestimmen Sie ein Inverses zu $-\theta^2 - 2\theta - 2$ in \mathcal{O}_K . Wie sieht die Einheitengruppe von K aus?

(5 Punkte)

Aufgabe 10.4: Wir betrachten noch einmal die Gleichung $a^2 - 47b^2 = \pm 19$ aus Aufgabe 9.1. Zeigen Sie, daß es unendlich viele Lösungen geben muss. Was können Sie über das Vorzeichen der 19 aussagen?

(5 Punkte)