

Übungen zur Vorlesung
“Algebraische Zahlentheorie”
WS 2011/12 Blatt 12
Ausgabe: 26.01.2012, Abgabe: 02.02.2012

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws11/azt/azt.html>

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe 12.1: Wir betrachten den Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}, i)$.

(i) Zeigen Sie, daß

$$\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Bestimmen Sie alle Zwischenkörper.

(3 Punkte)

(ii) Zeigen Sie, daß die folgenden Elemente eine Basis des Ganzheitsrings \mathcal{O}_K bilden :

$$1, i, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, i \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(4 Punkte)

(iii) Zeigen Sie

$$D \left(1, i, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, i \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = 400.$$

(2 Punkte)

(iv) Zeigen Sie mit Hilfe der Gradformel, daß die Erweiterung $K/\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ unverzweigt ist. Es kann hilfreich sein, auch den Zwischenkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ zu betrachten.

(5 Punkte)

(v) Berechnen Sie für die Ideale (2), (3) und (5) Zerlegungs- und Trägheitsgruppe in der Erweiterung K/\mathbb{Q} .

(6 Punkte)