Übungen zur Vorlesung
“Algebraische Zahlentheorie”
WS 2011/12 Blatt 2

Ausgabe: 03.11.2011, **Abgabe:** 10.11.2011

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws11/azt/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe 2.1: Ist der Ring $\mathbb{Z}[X]/(X^2+4)$ ganz-abgeschlossen?

(4 Punkte)

Aufgabe 2.2: Sei A ein ganz-abgeschlossener Integritätsbereich mit Quotientenkörper K. Sei B der ganze Abschluß von A in einer endlichen separablen Erweiterung L/K. Dann läßt sich jedes Element von L als Quotient b/a mit $b \in B$ und $a \in A$, $a \neq 0$ schreiben.

(6 Punkte)

Aufgabe 2.3: Sei K ein Zahlkörper, $\alpha \in \mathcal{O}_K$. Dann ist $\alpha \in \mathcal{O}_K^\times$ genau dann, wenn $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \pm 1$ ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.4:

(i) Berechnen Sie Norm und Spur von $\theta^2 - \theta$ in $\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}$, wobei θ eine Wurzel von $X^3 - 2X^2 + 5 = 0$ ist,

(ii) Berechnen Sie Norm und Spur von $-i + 2\sqrt{1+i}$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{1+i})/\mathbb{Q}$.

(iii) Sei θ eine Wurzel von $X^3 + 2X + 1 = 0$. Für welche Werte von a ist $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(a\theta^2 + \theta)$ durch 16 teilbar? Für welche Werte von a ist $N_{\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q}}(a\theta^2 + \theta) = \pm 1$?

(6 Punkte)