Übungen zur Vorlesung
"Algebraische Zahlentheorie"
WS 2011/12 Blatt 7

Ausgabe: 08.12.2011, **Abgabe:** 15.12.2011

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws11/azt/azt.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.

Aufgabe 7.1: Sei R ein Dedekind-Ring mit endlich vielen Primidealen. Zeigen Sie, daß R schon ein Hauptidealring ist.

(6 Punkte)

Aufgabe 7.2: Sei R ein Dedekind-Ring. Jedes Ideal von R kann durch zwei Elemente erzeugt werden.

(5 Punkte)

Aufgabe 7.3: Ein Polynom $f(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ vom Grad n ist genau dann irreduzibel, wenn $X^{p^n} \equiv X \mod f(X)$ und für alle Primzahlen $q \mid n$ gilt $ggT(X^{p^{n/q}} - X, f(X)) = 1$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7.4: Sei K ein Zahlkörper. Die Idealnorm $N(I) = \#(\mathcal{O}_K/I)$ ist multiplikativ. Insbesondere ist für $I = \prod \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(I)}$ die Norm gegeben durch

$$N(I) = \prod N(\mathfrak{p})^{v_\mathfrak{p}(I)}.$$

Ist $I = (a) \subseteq \mathcal{O}_K$ ein Hauptideal, dann ist $N(I) = N_{K/\mathbb{Q}}(a)$.

(5 Punkte)