Übungsaufgaben zur Vorlesung "Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik" WS 2011/12

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter 9. Februar 2012

Dr. Mario Listing Übungsblatt 14

Dies ist ein Bonusblatt, d.h. die Punkte gehen nur für die Studierenden in die Wertung mit ein, die die geforderten 50% der Übungspunkte noch nicht erreicht haben.

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π–periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für $x \in [0, 2\pi)$ durch $f(x) = e^{ax}$ gegeben ist, wobei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie damit den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$

und zeigen Sie insbesondere $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Gegeben sei das AWP des harmonischen Oszillators:

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v_0$$

mit $v_0, \omega > 0$ ($\dot{x}$, $\ddot{x}$ bezeichnet in der Physik einfache/zweifache Ableitung von x nach der Zeit t).

a) Sei $x(t)$ Lösung des AWP's. Zeigen Sie die "Energieerhaltung"

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) + \frac{\omega^2}{2}x^2(t) = \text{const.}$$

Bestimmen Sie die Konstante auf der rechten Seite. *Hinweis: Multiplizieren Sie $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ mit $\dot{x}$.*

b) Schreiben Sie den harmonischen Oszillator als AWP erster Ordnung.

c) Lösen Sie das AWP in Aufgabe b) explizit mit Trennen der Variablen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\beta^2 x, \qquad x(0) = a_0, \quad \dot{x}(0) = a_1$$

mit Hilfe des Potenzreihenansatzes, in dem Sie folgende Teilaufgaben lösen

a) Sei $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ Lösung des obigen AWP's, dann gilt $a_{2k} = a_0 \frac{(-1)^k \beta^{2k}}{(2k)!}$ und $a_{2k+1} = a_1 \frac{(-1)^k \beta^{2k}}{(2k+1)!}$.

b) Schreiben Sie $x(t)$ mit Hilfe der Kosinus–und Sinusfunktion für $\beta \neq 0$.

Alle Ergebnisse/Resultate sind zu begründen bzw. herzuleiten.
Abgabe der Lösungen: bis 12 Uhr am 16.02.2012 in den entsprechenden Briefkasten Ihrer Übungsgruppe (Kellergebäude in der Mathematik, Eckerstraße 1).