Übungsaufgaben zur Vorlesung "Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik" — WS 2011/12
Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter — 15. Dezember 2011
Dr. Mario Listing — Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (3 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}\ , & x > 0 \\ 0\ , & x \leq 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, $n \geq 1$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Ungleichung von Jensen:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)
Überprüfen Sie die Existenz der folgenden Grenzwerte und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}\quad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2}\quad , \qquad \lim_{x\to \pi/2} \frac{\tan(5x)}{4x - 2\pi}\ .$$

Aufgabe 4 (6 Punkte, Benutzung Taschenrechner zulässig)
Wir möchten alle reellen Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$$

numerisch bestimmen. Da $p(x) < 0$ für $x \leq 1$, $p(2) = 1$ und $p(x)$ streng monoton wachsend ist für $x > 1$, besitzt p nach dem Zwischenwertsatz genau eine reelle Nullstelle und diese liegt im Intervall $[1, 2]$.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes und

$$x = f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

die Nullstelle von p bis auf 10^{-1} genau. *Hinweis: f ist streng monoton fallend für $x > 0$ und $f(2) = \frac{7}{4}$, also betrachten Sie die Funktion $f : [\frac{7}{4}, 2] \to [\frac{7}{4}, 2]$.*

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton Verfahrens die Nullstelle von p bis auf 10^{-4} genau. Benutzen Sie als Startwert $x_0 = 2$.

Alle Ergebnisse/Resultate sind zu begründen bzw. herzuleiten.
Abgabe der Lösungen: bis 12 Uhr am 22.12.2011 in den entsprechenden Briefkasten Ihrer Übungsgruppe (Kellergebäude in der Mathematik, Eckerstraße 1).