Probeklausur zur Vorlesung "Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik" WS 2011/12

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter 9. Februar 2012

Dr. Mario Listing

Bitte bearbeiten Sie diese Probeklausur innerhalb von 2,5 Stunden unter Klausurbedingungen (zugelassen sind ein handbeschriebendes A4 Blatt, aber keine elektronischen Hilfsmittel). Ingesamt sind 39 Punkte erreichbar. **Alle Ergebnisse sind zu begründen bzw. herzuleiten.**

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweisen Sie mit vollständiger Induktion (4 Punkte):

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 .$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z in der Form $z = a + bi$ mit

a) $z^3 = 1$.

b) $z^4 = -2$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Funktion

$$f(x) = \tanh(x^2) = \frac{\sinh x^2}{\cosh x^2}$$

um $a = 0$ bis zum kubischen Term, d.h. bestimmen Sie $T_3(x, 0)$.

Aufgabe 4 (8 Punkte = 4 Punkte + 4 Punkte)

a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz (k ist fest vorgegeben):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}.,$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(n)}{n} x^n.$$

Wie verhält sich die Reihe auf dem Rand des Konvergenzintervalls?

Aufgabe 5 (6 Punkte = 4 Punkte + 2 Punkte)
Existieren die folgenden Grenzwerte? Wenn ja, berechnen Sie diese bitte.

$$(a) \quad \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)} \qquad\qquad (b) \quad \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + \cos n}{2n(n+7)}$$

Aufgabe 6 (8 Punkte = 4 Punkte + 4 Punkte)

(a) Überprüfen Sie die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{x \cdot (1 + \ln x)^2} dx$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)
Gegeben seien $b > 0$ und die Kurve $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} b \cdot \cos^3 t \\ b \cdot \sin^3 t \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve.