Wiederholungsaufgaben zur Vorlesung "Mathematik I für Studierende des Ingenieurwesens und der Informatik" WS 2011/12
Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter 21. Dezember 2011
Dr. Mario Listing

Die Aufgaben sind zur Wiederholung des Vorlesungsstoffes und der Übungen gedacht. Ähnliche Fragestellungen können in der Klausur vorkommen. Die Bearbeitung der Aufgaben sollte über die Weihnachtszeit erfolgen. Die Lösungen dieser Aufgaben werden von den Tutoren **nicht** korrigiert, d.h. Sie geben Ihre Lösungen zu diesem Blatt nicht ab. Eine Besprechung einzelner Lösungen ist nur dann in den Übungen vorgesehen, wenn ein entsprechend großer Bedarf dazu besteht. Lösen Sie die Aufgaben nach Möglichkeit allein und vergleichen Sie danach Ihre Lösungen mit anderen Kommilitonen.

Aufgabe 1

a) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

b) Was besagt der Zwischenwertsatz?

c) Wie ist der Grenzwert einer Folge definiert und wie ist der Grenzwert einer Funktion f für x geht gegen a definiert?

d) Was besagt das Leibnitz Kriterium?

Aufgabe 2

a) Welche der folgenden Aussagen gelten für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

- ☐ Ist f differenzierbar, dann ist die Ableitung von f stetig.
- ☐ Ist f in x_0 stetig, dann ist f auch differenzierbar in x_0.
- ☐ Ist f differenzierbar in x_0, dann ist f auch stetig in x_0.
- ☐ Ist f 2-mal differenzierbar, dann ist f stetig differenzierbar.
- ☐ f besitzt immer einen Fixpunkt.
- ☐ Ist f strikt monoton wachsend (bzw. strikt monoton fallend), dann ist f injektiv.
- ☐ Ist f stetig differenzierbar und strikt monoton wachsend, dann ist f surjektiv.

b) Welche der Aussagen sind für Folgen zutreffend?

- ☐ Eine beschränkte Folge ist konvergent.

- ☐ Eine konvergente Folge ist beschränkt.
- ☐ Eine konvergente Folge ist monoton wachsend oder monoton fallend.
- ☐ Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(a_n^2)_{n\geq 0}$ konvergent ist.
- ☐ Sei $a_n \geq 0$ für alle n, dann ist $(a_n)_{n\geq 0}$ genau dann konvergent, wenn die Folge $(\sqrt{a_n})_{n\geq 0}$ konvergent ist.

c) Welche der Aussagen gelten für Reihen/Potenzreihen?

- ☐ Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.
- ☐ Eine alternierende Reihe ist konvergent.
- ☐ Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe, dann ist $(a_n)_{n\geq 0}$ eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
- ☐ Ist R der Konvergenzradius von $\sum a_k x^k$, dann konvergiert die Potenzreihe für alle x mit $|x| \leq R$.
- ☐ Die Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert für alle $x \geq 0$.

d) Welche der folgenden Aussagen treffen auf komplexe Zahlen zu?

- ☐ Für komplexe Zahlen ist die Multiplikation kommutativ.
- ☐ Es gibt komplexe Zahlen z, w mit $z + w \neq w + z$.
- ☐ $z \cdot \overline{z}$ liefert eine reelle Zahl für alle $z \in \mathbb{C}$.
- ☐ Es gibt mindestens zwei verschiedene komplexe Zahlen z mit $z^2 + 3 = 0$.
- ☐ Die Gleichung $z^2 = i$ besitzt keine Lösung.

Aufgabe 3

a) Überprüfen Sie die Konvergenz der Folge

$$a_n = \frac{5n^2 + n}{\sqrt{n^4 + n^2 - 1} + 2n^2 + 3n}$$

und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n + 2}$$

konvergent?

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n^2+2n-1}} \cdot x^n.$$

d) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(2x)}{(4x-\pi)^2}.$$

e) Überprüfen Sie die Stetigkeit der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & ,\quad x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \ \text{ mit } \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \ \text{ teilerfremd} \\ 0 & ,\quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

im Punkt $x = 0$.

f) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion: $n^5 - n$ ist durch 5 teilbar für alle $n \in \mathbb{N}$.

g) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen z mit $z^2 = i + 1$.

h) Berechnen Sie mit Hilfe des Horner-Schema den Wert des Polynoms

$$p(x) = x^5 - 65x^4 - 208x^3 + 274x^2 - 141x + 341$$

an der Stelle $x_0 = 68$.

i) Finden Sie ein Polynom $p(x)$ mit folgenden Vorgaben: $p(-1) = -4$, $p(1) = -\frac{2}{3}$, $p(3) = \frac{8}{3}$ und $p(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$. Unter welcher zusätzlicher Voraussetzung ist $p(x)$ eindeutig bestimmt?