“Algebra und Zahlentheorie”
WS 2013/14 — Übungsblatt 6

Ausgabe: 29.11.2013, **Abgabe:** 06.12.2013

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws13/algebra.html

Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 6.1: Entscheiden Sie für jeden der folgenden Fälle, ob die gegebene Struktur einen Ring bildet. Ist sie kein Ring, bestimmen Sie, welche der Ringaxiome erfüllt sind, und welche verletzt werden:

1. U sei eine beliebige Menge, und R sei die Menge der Teilmengen von U. Addition und Multiplikation von Elementen von R werden durch die Regeln $A + B = A \cup B$ und $A \cdot B = A \cap B$ definiert.
2. U sei eine beliebige Menge, und R sei die Menge der Teilmengen von U. Addition und Multiplikation von Elementen von R werden durch die Regeln $A + B = (A \cup B) - (A \cap B)$ und $A \cdot B = A \cap B$ definiert.
3. R sei die Menge der stetigen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Addition und Multiplikation von Elementen aus R werden durch die Regeln $[f + g](x) = f(x) + g(x)$ und $[fg](x) = f(g(x))$ definiert.

(9 Punkte)

Aufgabe 6.2: Beweisen Sie, dass das Ideal $(x + y^2, y + x^2 + 2xy^2 + y^4)$ in $\mathbb{C}[x, y]$ maximal ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 6.3: Sei $\mathfrak{p}$ ein Ideal eines kommutativen Ringes R mit 1. Beweisen Sie, dass $R/\mathfrak{p}$ genau dann ein Integritätsbereich[1] ist, wenn $\mathfrak{p} \neq R$ und $\mathfrak{p}$ die folgende Eigenschaft hat: Ist $ab \in \mathfrak{p}$ für $a, b \in R$, so ist $a \in \mathfrak{p}$ oder $b \in \mathfrak{p}$. (Ein solches Ideal heißt *Primideal.*)

(3 Punkte)

(bitte wenden)

[1] R kommutativ mit 1 heißt Integritätsbereich, wenn er nullteilerfrei ist, d.h. aus $ab = 0$ mit $a, b \in R$ folgt: $a = 0$ oder $b = 0$.

Aufgabe 6.4: Sei k ein Körper. Betrachten Sie den Ring der formalen Potenzreihen

$$k[\![X]\!] := \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \;\middle|\; a_i \in k \right\}.$$

Zwei formale Potenzreihen werden koeffizientenweise addiert und die Multiplikation erfolgt durch Ausmultiplizieren. Genauer:

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i X^i \right) := \sum_{i=0}^{\infty} c_i X^i,$$

mit $c_i = \sum_{n+m=i} a_n b_m$. Beweisen Sie:

1. Eine formale Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ ist genau dann invertierbar, wenn $a_0 \neq 0$.

2. Das Hauptideal (X) ist maximal, und es ist das einzige maximale Ideal von $k[\![X]\!]$.

Hinweis zu 2.: Alle Elemente im Komplement von (X) sind invertierbar.

(6 Punkte)