Übungen zur Vorlesung "Analysis I"
WS 2014/15 Blatt 12

Ausgabe: 19.01.2015, **Abgabe:** 26.01.2015

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws14/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 12.1: Wählen Sie eine beliebige reelle Zahl x. Berechnen Sie nun auf einem Taschenrechner für einige große Zahlen n

$$\cos^{\circ n}(x) = \underbrace{\cos(\cos(\cdots\cos(\cos}_{n\text{-mal}}(x)))).$$

Auf vielen Taschenrechnern erreicht man dies schon, indem man erst die Zahl x eingibt und dann immer wieder die Kosinus-Taste drückt. Rein experimentell werden Sie feststellen, dass die Folge

$$\begin{aligned} a_1 &:= x \\ a_{n+1} &:= \cos(a_n) \qquad \text{für } n \geq 1 \end{aligned} \tag{1}$$

für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$ anscheinend konvergiert, und überraschenderweise der Grenzwert gar nicht von der Wahl von x abhängt.

Wir wollen diese Beobachtungen in präzise Mathematik umsetzen:

1. Beweisen Sie, dass es eine reelle Zahl $q < 1$ gibt, sodass

$$|\sin(x)| \leq q \qquad \text{für alle } x \in [-1, 1].$$

2. Beweisen Sie, dass für alle $a, b \in [-1, 1]$, $a \neq b$, die folgende Ungleichung gilt:

$$\left| \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b - a} \right| \leq q.$$

3. Folgern Sie, dass für alle $a, b \in [-1, 1]$ sogar

$$|\cos^{\circ n}(b) - \cos^{\circ n}(a)| \leq q^n \, |b - a| \tag{2}$$

4. Folgern Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Gleichung (1) konvergiert und der Grenzwert nicht von der Wahl von x abhängt.

(Tipp: Hier gibt es zwei Methoden. Sie können zunächst zeigen, dass die Gleichung $\cos a = a$ für $a \in \mathbb{R}$ *mindestens* eine Lösung besitzt und diese Lösung in Ungleichung (2) benutzen. Oder Sie folgern direkt aus Ungleichung (2), dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und zeigen lediglich, dass $\cos a = a$ *höchstens* eine Lösung besitzt.)

(6 Punkte)

Aufgabe 12.2:

1. Bestimmen Sie den Grenzwert
$$\lim_{z\to 0} \frac{z - \sin(z)}{z^3}.$$

2. Sei $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ eine Polynomfunktion mit $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ und $b > 1$ eine reelle Zahl. Beweisen Sie, dass
$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{b^z} = 0$$
gilt, z.B. über vollständige Induktion in der Variable n.

(6 Punkte)

Aufgabe 12.3: Wir wollen den Arkustangens betrachten, der auf dem vorhergehenden Übungsblatt definiert wurde. Beweisen Sie, dass für alle reellen Zahlen mit $xy < 1$ die Gleichung
$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$
gilt. Bestimmen Sie zu diesem Zweck

1. zunächst die Ableitung des Arkustangens $\arctan'(x)$,
2. und betrachten Sie dann die Ableitungen der beiden Gleichungsseiten in der Variablen x (fassen Sie die Variable y als eine konstante reelle Zahl auf). Nutzen Sie, dass $\tan(0) = 0$.

(6 Punkte)

Aufgabe 12.4: Wir definieren eine Funktion
$$D(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \text{für alle } |x| < 1.$$

1. Zeigen Sie, dass diese Reihe Konvergenzradius 1 besitzt.
2. Zeigen Sie, dass die Gleichung
$$D'(x) = -\frac{\log(1-x)}{x}$$
gilt.

3. Beweisen Sie die Gleichung

$$D(x) + D(-x) = \frac{1}{2} D(x^2).$$

(5 Punkte)

Bonus-Aufgabe 12.5: Leiten Sie die Potenzreihendarstellung

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{für } |x| < 1$$

her.

(4 Punkte)