Übungen zur Vorlesung "Analysis I"
WS 2014/15 Blatt 2

Ausgabe: 3.11.2014, **Abgabe:** 10.11.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws14/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 2.1: Bitte berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und geben das Ergebnis in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

$$\frac{4-i}{i} \qquad \frac{1+i}{1-i} \qquad \left(i + \frac{1}{i}\right)^2.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2.2: Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ eine beliebige komplexe Zahl mit $x, y \in \mathbb{R}$. In dieser Aufgabe zeigen wir, dass jede quadratische Gleichung in den komplexen Zahlen eine Lösung besitzt (anders als in den reellen Zahlen).

1. Beweisen Sie, dass z eine Quadratwurzel $v = a + bi \in \mathbb{C}$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) in den komplexen Zahlen besitzt, dann und nur dann wenn das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= x \\ 2ab &= y \end{aligned} \tag{1}$$

   eine Lösung $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt.

2. Beweisen Sie, dass das Gleichungssystem (1) für $x, y \in \mathbb{R}$ stets eine Lösung $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt (die Fallunterscheidung $y = 0$ bzw. $y \neq 0$ ist hilfreich).

3. Beweisen Sie (anhand der vorherigen Teilaufgabe), dass jede quadratische Gleichung

$$aw^2 + bw + c = 0$$

   für $a, b, c \in \mathbb{C}$ (mit $a \neq 0$) eine Lösung $w \in \mathbb{C}$ besitzt.

(6 Punkte)

Aufgabe 2.3: Sei $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) eine komplexe Zahl, die die Ungleichung $z + |z| \neq 0$ erfüllt. Berechnen Sie den Ausdruck

$$\left(\sqrt{|z|} \cdot \frac{z + |z|}{|z + |z||} \right)^2$$

und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

(4 Punkte)

Aufgabe 2.4: Bestimmen Sie das Supremum und Infimum der Menge

$$\left\{ \frac{2}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2 \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Geben Sie einen vollständigen Beweis für Ihre Antwort (Tipp: vollständige Induktion und archimedisches Axiom)

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 2.5: Beweisen Sie, dass für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, und jede natürliche Zahl $n \geq 1$ eine Zahl $w \in \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$w^n = x.$$

(8 Punkte)

Erstsemester-Hütte

Bald ist es endlich soweit und es geht auf die Erstihütte. Alles was ihr dazu wissen müsst, erfahrt ihr hier:

Wann geht's los ???

Am Freitag, den **05.12**. und zurück kommen wir am Sonntag, den 07.12.

Wo geht es eigentlich hin ???

Wir fahren ins Dekan-Strohmeier-Haus im Münstertal im Schwarzwald

Was tut man eigentlich auf so einer Hütte???

Sich entspannen, MitstudentenInnen kennenlernen, an lustigen Workshops teilnehmen, Spielchen spielen, lecker essen, …

Und was kostet das???

20 Euro, die bei der Anmeldung mitzubringen sind!

Was für eine Anmeldung???

Am Mittwoch, den 12. November, könnt ihr euch nach der Vorlesung **um 10.00 vor der Mathe-Fachschaft** anmelden. Bitte **bringt die 20 Euro mit**, einen sicheren Platz gibt es nur gegen Bares und die Teilnehmerzahl ist beschränkt.

Bitte teilt uns bei der Anmeldung mit, ob ihr mit dem Auto auf die Hütte fahren könnt. Ihr könnt euch auch bereits überlegen, ob ihr eventuell Lust habt mit dem Rad hinzufahren oder zu wandern.

Und mein Mathe-Zettel???

Die Erfahrung hat gezeigt, dass dafür immer genug Zeit blieb und da noch viele ältere MathestudentenInnen mitfahren, könnt ihr bestimmt auch den einen oder anderen Tipp bekommen…

Wenn ihr noch Fragen habt, dann mailt uns an erstihuette@googlemail.com

Nil-Jana, Julia, Vincent und die Mathefachschaft