Übungen zur Vorlesung "Analysis I"
WS 2014/15 Blatt 3

Ausgabe: 10.11.2014, **Abgabe:** 17.11.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws14/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 3.1: Bestimmen Sie, ob die Folge konvergiert und wenn ja, berechnen Sie den Grenzwert.

$$\frac{n^2+3}{(n+1)(n+7)} \qquad \frac{n^3}{n^2-1} \qquad \frac{n}{2^n}$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3.2: Sei

$$\begin{aligned} a_1 &:= 1 \\ a_2 &:= 1 \\ a_{n+2} &:= a_{n+1} + a_n \qquad (\text{für } n \geq 0). \end{aligned}$$

Die Zahl a_n heißt *n-te Fibonacci Zahl* (wir haben diese Zahlen bereits in der Vorlesung kennengelernt). Wir definieren eine weitere Folge $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1. Beweisen Sie, dass $a_n \geq 1$ für alle n. Insbesondere ist die Folge b_n wohldefiniert.

2. Zeigen Sie, dass $b_{n+1} = 1 + \frac{1}{b_n}$ gilt.

3. Folgern Sie, dass *falls* die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert besitzt, dieser eine Lösung der Gleichung

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

   sein muss (vergessen Sie nicht zu prüfen, ob der Grenzwert null sein könnte).

4. Bestimmen Sie die Lösungen dieser Gleichung.

5. Zeigen Sie, dass nur eine dieser Lösungen als Grenzwert infrage käme.

Diese Lösung ist als *goldener Schnitt* bekannt. Diese Zahl hat eine besondere Geschichte und jeder sei eingeladen, sich ein wenig mehr mit der Bedeutung dieser Zahl auseinanderzusetzen. Man findet z.B. zahlreiche Informationen im Internet.

(6 Punkte)

Aufgabe 3.3: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die die aufgelisteten Eigenschaften besitzt:

- $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert,
- $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und
- $(x_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Beweisen Sie, dass dann auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(4 Punkte)

Aufgabe 3.4: Sei $x > 0$ eine reelle Zahl. Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

(Anregung: Betrachten Sie zunächst den Fall $x > 1$. Zeigen Sie, dass für eine positive Wurzel $\sqrt[n]{x} > 1$ gilt. Nutzen Sie die Identität

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}.$$

Den Fall $x < 1$ reduziert man auf den ersten Fall.)

(4 Punkte)