Übungen zur Vorlesung "Analysis I"
WS 2014/15 Blatt 4

Ausgabe: 17.11.2014, **Abgabe:** 24.11.2014

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithmetische-geometrie/lehre/ws14/analysis.html

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 4.1: Wir betrachten die Folgen

$$x_n := (-1)^n \frac{n}{n+1} + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}};$$
$$y_n := \frac{1}{n} + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

1. Fertigen Sie jeweils einen Graphen an, der die Werte der ersten Folgenglieder skizziert.
2. Zeigen Sie, dass die Folgen beschränkt sind.
3. Bestimmen Sie Limes superior und Limes inferior. Geben Sie dazu konkret die Folgen der Suprema und Infima

$$\begin{aligned} a'_n &:= \sup\{x_m \mid m \geq n\} \\ b'_n &:= \inf\{x_m \mid m \geq n\} \end{aligned}$$

an und zeichnen Sie sie ebenso in den Graphen ein, z.B. in verschiedenen Farben. Analog für y_m.

4. Bestimmen Sie die Häufungspunkte der Folgen.

(10 Punkte)

Aufgabe 4.2: Wir führen eine Aufgabe des letzten Übungsblatts weiter. Wir hatten die n-te Fibonacci–Zahl a_n durch

$$a_1 := 1 \qquad a_2 := 1 \qquad a_{n+2} := a_n + a_{n+1} \text{ (für } n \geq 0)$$

definiert und eine neue Folge $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ gebildet.

1. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Folge der Fibonacci-Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst.

2. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die Aussage

$$b_n - b_{n+1} = \frac{(-1)^n}{a_n a_{n+1}}. \tag{1}$$

(Variante: Man kann dies direkt mit vollständiger Induktion zeigen. Eine Variante besteht darin, zunächst $a_n^2 - a_{n+1}a_{n-1} = (-1)^{n-1}$ mit vollständiger Induktion zu zeigen und daraus die Gleichung zu folgern)

3. Zeigen Sie mit Gleichung (1), dass

$$\begin{aligned} b_{2n} - b_{2n+2} &= \frac{1}{a_{2n+1}}\left(\frac{1}{a_{2n}} - \frac{1}{a_{2n+2}}\right) \\ b_{2n-1} - b_{2n+1} &= \frac{1}{a_{2n}}\left(\frac{1}{a_{2n+1}} - \frac{1}{a_{2n-1}}\right) \end{aligned}$$

und folgern Sie, dass die Folge $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt, und die Folge $(b_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst.

4. Folgern Sie aus Gleichung (1), dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$b_{2n} > b_{2m+1},$$

d.h. alle geraden Folgenglieder sind größer als alle ungeraden Folgenglieder.

5. Folgern Sie, dass die Folgen $(b_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Schließen Sie daraus, dass die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Den einzig möglichen Grenzwert kennen wir bereits vom letzten Übungsblatt.

(8 Punkte)

Aufgabe 4.3: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkte Folgen. Beweisen Sie, dass $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenso eine nach oben beschränkte Folge ist und

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty}(a_n) + \limsup_{n\to\infty}(b_n)$$

gilt.

(4 Punkte)

Bonus-Aufgabe 4.4: Sei $N \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir setzen

$$\begin{aligned} y_1 &:= N \\ y_{n+1} &:= \begin{cases} \frac{y_n}{2} & \text{falls } y_n \text{ eine gerade Zahl ist} \\ y_n + 1 & \text{falls } y_n \text{ eine ungerade Zahl ist.} \end{cases} \end{aligned}$$

Beweisen Sie die Ungleichung

$$y_{n+2} \le \frac{1}{2}y_n + 1.$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion in der Variablen k die Ungleichung

$$y_{n+2k} \le \frac{1}{2^k}y_n + 3.$$

Bestimmen Sie den Limes inferior und superior der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für beliebig vorgegebenes N.

(6 Punkte)