Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie II"
WS16/17 Blatt 13

Ausgabe: 24.1.2017, **Abgabe:** 31.1.2017

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws16/ftheorie2/ftheorie1617.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 13.1: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Eine *Triangulierung* $\mathcal{T}$ von X ist eine Darstellung

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} \triangle_i,$$

wobei r eine natürliche Zahl ist, $\triangle_i \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, die zu einem Dreieck im $\mathbb{R}^2$ homöomorph ist, und für alle $1 \leq i < j \leq r$ gilt, dass der Schnitt $\triangle_i \cap \triangle_j$ entweder leer ist, ein gemeinsamen Eckpunkt der Dreiecke ist, oder eine gemeinsame Kante der Dreiecke[1].

1. Die *Euler Charakteristik* von $\mathcal{T}$ ist die Zahl

$$\chi(\mathcal{T}) = \#\{\text{Eckpunkte}\} - \#\{\text{Kanten}\} + \#\{\text{Dreiecke}\}.$$

2. Definieren Sie einen Begriff der "Verfeinerung" $\mathcal{T}'$ einer Triangulierung, in der die einzelnen Dreiecke weiter zerlegt werden, und zeigen Sie, dass $\chi(\mathcal{T}') = \chi(\mathcal{T})$.

   Ohne Beweis wollen wir fortan benutzen, dass die Euler Charakteristik unabhänging von der Triangulierung ist. Wir schreiben $\chi(X)$ und sprechen dann von der Euler Charakteristik von X.

3. Berechnen Sie $\chi(\widehat{\mathbb{C}})$.

(4 Punkte)

Aufgabe 13.2: Sei $f : X \to Y$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung von kompakten Riemannschen Flächen. Beweisen Sie die Formel

$$\chi(X) = \deg(f) \cdot \chi(Y) + \sum_{x \in X} (v(x, f) - 1),$$

wobei $v(x, f)$ den Verzweigungsindex bezeichnet (Definition 1.11 im Skript). Die Summe auf der rechten Gleichungsseite ist gerade die Gesamtverzweigungsordnung $b(f)$. Man kann so vorgehen:

[1] Man definiert einen *Eckpunkt* (bzw. *Kante*) dabei als die Teilmenge in $\triangle_i$, die unter dem Homöomorphismus zu einem Dreieck im $\mathbb{R}^2$ zu einem Eckpunkt der Dreiecks (bzw. Kante des Dreiecks) abgebildet wird.

1. Sei $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von Y. Modifizieren Sie $\mathcal{T}$ falls nötig dergestalt, dass alle Punkte $y = f(x)$ mit $v(x, f) \geq 2$ als Eckpunkte auftreten.
2. Nutzen Sie die Abbildung f, um aus der Triangulierung von Y eine Triangulierung $\mathcal{T}_X$ auf X zu definieren.
3. Zählen Sie, wieviele Dreiecke, Kanten und Eckpunkte dann $\mathcal{T}_X$ im Vergleich zu $\mathcal{T}$ besitzt (vielleicht hilft dazu der Satz von der lokalen Gestalt).

Dass eine Riemannsche Fläche überhaupt eine Triangulierung besitzt, dürfen Sie annehmen.

(6 Punkte)

Aufgabe 13.3: Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Beweisen Sie die fundamentale Formel

$$\chi(X) = 2 - 2g(X),$$

wobei $g(X)$ das Geschlecht von X bezeichnet (d.h. geben Sie die vollen Details für die Beweisskizze aus Korollar 7.13 im Skript an).

1. Folgern Sie, dass die Teilmenge $\mathsf{Box} := [0,1] \times [0,1]i \subset \mathbb{C}$ nicht die Struktur einer kompakten Riemannschen Fläche besitzen kann. Berechnen Sie dazu, welche Euler Charakteristik Box ansonsten besitzen würde.
2. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche von Geschlecht $g(X) \geq 1$. Zeigen Sie, dass jede holomorphe Abbildung

   $$f : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow X$$

   notwendigerweise konstant sein muss.

(6 Punkte)

Aufgabe 13.4: Sei $f : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung von Riemannschen Flächen. Für jede offene Menge $U \subseteq Y$ ist der Pullback einer Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ durch

$$\begin{aligned} f^*(h) : f^{-1}(U) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto h(f(x)). \end{aligned}$$

erklärt. Den Pullback einer Differentialform definieren wir analog: Für

$$\omega : Y \longrightarrow \coprod_P m_P/m_P^2$$

auf Y, definieren wir

$$f^*\omega : X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow \coprod_P m_P/m_P^2$$

als vorgeschaltete Komposition mit f.

1. Zeigen Sie, dass f^* differenzierbare Differentialformen auf differenzierbare Differentialformen abbildet (nutzen Sie dazu evtl. die folgenden Aufgabenteile)

2. Für jede offene Menge U ist $\mathcal{E}^{(1)}(U)$ ein $\mathcal{E}(U)$-Modul. Zeigen Sie, dass der Pullback die Modulstruktur respektiert, d.h.

$$f^*(h \cdot \omega) = f^*(h) \cdot f^*(\omega).$$

3. Zeigen Sie für das Differential

$$d : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}^{(1)}$$

die Formel

$$d(f^*h) = f^*(dh).$$

4. Folgern Sie, dass wir den Pullback auch äquivalenterweise über die Formel

$$f^* : \mathcal{E}(U) \longrightarrow \mathcal{E}(f^{-1}(U))$$

$$f^*(\sum h_i \mathrm{d}g_i) := \sum (f^*h_i)\mathrm{d}(f^*g_i),$$

wobei $\omega = \sum f_i \mathrm{d}g_i$ eine lokale Darstellung einer 1-Form in U ist, definieren können.

5. Zeigen Sie, dass der Pullback einer $(1,0)$ resp. $(0,1)$-Form wieder eine $(1,0)$ resp. $(0,1)$-Form ist.

(6 Punkte)

Bonus-Aufgabe 13.5: Wir bezeichnen mit S^2 die 2-Sphäre, d.h.

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und sei S^2 mit einem beliebigen komplexen Atlas versehen. Zeigen Sie, dass dann eine Biholomorphie

$$\phi : S^2 \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{C}}$$

existiert, d.h. tatsächlich besitzt S^2 nur eine einzigen komplexen Atlas bis auf Äquivalenz. (Wir können dies noch nicht beweisen, aber alle anderen kompakten Riemannschen Flächen besitzen weitere nicht-äquivalente komplexe Atlanten.)

(4 Punkte)