# Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie II"
# WS16/17 Blatt 14

**Ausgabe:** 31.1.2017, **Abgabe:** 6.2.2017

---

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws16/ftheorie2/ftheorie1617.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

---

**Aufgabe 14.1:** Sei $f : X \to Y$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung Riemannscher Flächen und $\omega$ eine meromorphe 1-Form auf $Y$, die außerhalb eines Punkts $y \in Y$ holomorph ist. Sei $k$ die Vielfachheit von $f$ bei $x \in f^{-1}(y)$. Beweisen Sie, dass

$$\operatorname{res}_x(f^*\omega) = k \cdot \operatorname{res}_y(\omega)$$

gilt.

(4 Punkte)

**Aufgabe 14.2:** Eine *affine ebene Kurve* in $\mathbb{C}^2$ bezeichnet die Nullstellenmenge

$$V = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z,w) = 0\},$$

wobei $P$ ein Polynom in zwei Variablen ist. Wir nennen die Kurve *nicht-singulär* (oder *glatt*) falls für alle $(z,w) \in V$ entweder $\frac{\partial P}{\partial z} \neq 0$ oder $\frac{\partial P}{\partial w} \neq 0$ gilt. Wir wollen annehmen, dass $V$ nicht-singulär und zusammenhängend ist.

Konstruieren Sie auf $V$ einen komplexen Atlas, d.h. geben Sie $V$ die Struktur einer Riemannschen Fläche. (*Hinweis:* Satz über implizite Funktionen)

(6 Punkte)

**Aufgabe 14.3:** Wir definieren $\mathbb{P}^2$ (die *projektive Ebene*) als

$$\mathbb{P}^2 := \frac{\{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{C}^3 - \{(0,0,0)\}}{\sim},$$

wobei die Äquivalenzrelation wie folgt gegeben ist:

$$(z_0 : z_1 : z_2) \sim (z_0' : z_1' : z_2') \Leftrightarrow \begin{array}{c} \text{es existiert ein } \lambda \in \mathbb{C}^\times \text{ mit} \\ \lambda z_i = z_i' \text{ für } i = 0,1,2. \end{array}$$

Wir versehen $\mathbb{P}^2$ mit der Quotiententopologie. Die drei offenen Mengen

$$U_i := \{(z_0 : z_1 : z_2) \mid z_i \neq 0\} \qquad (\text{für } i = 0,1,2)$$

definieren eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}^2$. Wir konstruieren eine Bijektion

$$\psi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^2 \tag{1}$$

$$(z_0 : z_1 : z_2) \longmapsto \text{``}(\frac{z_0}{z_i}, \frac{z_1}{z_i}, \frac{z_2}{z_i})\text{''}, \tag{2}$$

wobei die Anführungszeichen bedeuten, dass wir diejenige Koordinate, die konstant 1 ist, weglassen. Auf diese Weise bekommen wir wirklich einen Punkt in $\mathbb{C}^2$.
Ein homogenes Polynom $F(z_0, z_1, z_2)$ heißt *nicht-singulär* falls es keinen Punkt in $\mathbb{P}^2$ gibt, an dem alle Gleichungen

$$F = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z_0} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z_1} = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z_2} = 0$$

erfüllt sind. Als *projektive ebene Kurve* bezeichnen wir die Nullstellenmenge

$$V = \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 \mid P(z_0, z_1, z_2) = 0\}.$$

1. Zeigen Sie, dass $V$ wohl-definiert ist. (Nutzen Sie, dass $F$ homogen ist).
2. Definieren Sie $V_i := V \cap U_i$. Dann ist $V_i \subset \mathbb{C}^2$ bezüglich der Abbildung $\psi_i$. Zeigen Sie, dass $V_i$ eine affine ebene Kurve ist.
3. Zeigen Sie, dass falls das homogene Polynom $F$ nicht-singulär ist, die affinen Kurven $V_0, V_1, V_2$ nicht-singulär sind. (*Tipp:* Zeigen Sie zunächst die Formel

$$F = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^{2} z_i \frac{\partial F}{\partial z_i},$$

wobei $d$ der homogene Grad von $F$ ist).

4. Konstruieren Sie, dass falls $V$ nicht-singulär und zusammenhängend ist, auf $V$ die Struktur einer kompakten Riemannschen Fläche. [1]

[1] Die Kompaktheit von $\mathbb{P}^2$ wollen wir einfach als wahr annehmen. Siehe Bonus-Aufgabe.

5. Definiert eine Koordinatenprojektion, z.B. $(z_0 : z_1 : z_2) \mapsto (z_0 : z_1)$, eine holomorphe (verzweigte) Überlagerung $f : V \mapsto \mathbb{P}^1$ , so kann man mit dem Satz von Riemann–Hurwitz das Geschlecht von $V$ berechnen, sofern man die Verzweigung von $f$ versteht. Geben Sie die resultierende Formel an und berechnen Sie das Geschlecht der durch

$$F(z_0, z_1, z_2) = z_0^d + z_1^d + z_2^d$$

gegebenen Kurve. (Als Ergebnis sollten Sie $(d-1)(d-2)/2$ erhalten.)

(6 Punkte)

**Bonus-Aufgabe 14.4:** Wir führen Aufgabe 12.4 fort. In dieser Aufgabe hatten wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} h : X \setminus \{P\} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ Q &\longmapsto (\tilde{x}(Q), \tilde{y}(Q)) \end{aligned}$$

konstruiert, deren Bild in der Nullstellenmenge des Polynoms

$$P(\tilde{x}, \tilde{y}) := \tilde{y}^2 + b_1\tilde{x}\tilde{y} + b_3\tilde{y} = \tilde{x}^3 + b_2\tilde{x}^2 + b_4\tilde{x} + b_6$$

liegt. Dies definiert offenbar eine affine ebene Kurve.

1. Konstruieren Sie eine Abbildung

$$\widehat{h} : X \longrightarrow \mathbb{P}^2,$$

deren Einschränkung auf $X \setminus \{P\}$ gerade $h : X \setminus \{P\} \to U_0 \subset \mathbb{P}^2$ entspricht und deren Bild in einer geeignet gewählten projektiven ebenen Kurve $V$ liegt.

2. Zeigen Sie, dass $\widehat{h}$ eine holomorphe Abbildung

$$\widehat{h} : X \longrightarrow V$$

von kompakten Riemannschen Flächen ist.

3. Zeigen Sie, dass $\widehat{h}$ ein Isomorphismus Riemannscher Flächen ist (Tipp: Bestimmen Sie den Grad von $\widehat{h}$).

(7 Punkte)

**Bonus-Aufgabe 14.5:** Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^2$ kompakt ist. (Dies hat nichts mit Riemannschen Flächen zu tun)

(5 Punkte)