Wiederholungs-Aufgaben zur Vorlesung "Funktionentheorie II" WS 2016/17

Ausgabe: –, Abgabe: –

Die folgenden Fragen sollen helfen sich auf die Prüfung vorzubereiten. Sie sind aber nur ein Leitfaden, mehr nicht. Die Fragen beziehen sich mehrheitlich auf die zweite Hälfte der Vorlesung, während sich das vom Typ her ähnliche Weihnachtsblatt sicherlich immer noch lohnt, um den ersten Teil der Vorlesung zu wiederholen.

1. Was sagt der Satz von Riemann–Roch?

2. Was sagt das Lemma von Dolbeault aus?

3. Wann bezeichnet man eine Differentialform als geschlossen?

4. Formulieren Sie die Aussage der Serre Dualität.

5. Welches Geschlecht hat $\widehat{\mathbb{C}}$?

6. Definieren Sie den Hodge Stern-Operator.

7. Geben Sie ein Beispiel für eine Garbe $\mathcal{F}$ auf einem Raum X mit $H^1(X, \mathcal{F}) \neq 0$.

8. Gegeben eine kompakte Riemannsche Fläche X und ein Hauptdivisor D auf ihr. Geben Sie die Dimension von $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ an.

Beantworten Sie die folgenden Fragen mit "Ja" oder "Nein" und geben Sie eine knappe Begründung oder ein Gegenbeispiel (keine kompletten Beweise).

1. Sei ω eine Differentialform mit $\partial\omega = \overline{\partial}\omega = 0$. Folgt dann, dass auch $d\omega = 0$ gilt?

2. Folgt aus $d^2\omega = 0$ für eine Differentialform ω stets bereits $d\omega = 0$?

3. Das Lemma von Dolbeault haben wir in der Vorlesung auf $B_r(0)$ bewiesen, für $r \leq \infty$. Gilt es auch auf der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$?

4. Sei $(\phi_i)_{i\in I}$ eine Teilung der Eins für eine Überdeckung, die nur aus einer einzigen offenen Menge besteht (d.h. I ist eine ein-elementige Menge). Ist dann ϕ_i notwendigerweise eine konstante Funktion?

5. Gilt $H^1(\mathbb{C}, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$?

6. Sei $F : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ eine Abbildung von Garben von abelschen Gruppen, sodass $\ker(F)$ die Nullgarbe ist (also eine Garbe, die jeder offenen Menge die triviale abelsche Gruppe $\{0\}$ zuordnet).

   (a) Folgt dann, dass
   $$H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{G})$$
   injektiv ist?

   (b) Folgt dann, dass
   $$H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G})$$
   injektiv ist?

7. Gilt für jede Riemannsche Fläche X und jeden effektiven Divisor D, dass $H^0(X, \mathcal{O}_D)$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist?

8. Gilt für jede kompakte Riemannsche Fläche X und jeden Divisor D, dass $H^1(X, \mathcal{O}_D)$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum ist?

9. Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine nicht-konstante holomorphe Abbildung von Riemannschen Flächen. Haben dann X und Y zwangsläufig das gleiche Geschlecht g?

10. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Ist dann jede meromorphe Funktion auf X notwendigerweise konstant?

11. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit als bekannt vorausgesetzter Dimension von $H^1(X, \Omega)$. Genügt dies, um g zu berechnen?

12. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche. Gilt dann stets $l(D) = 1 - g + \deg D$ für jeden Divisor D?

13. Ist die Gesamtverzweigungsordnung einer Überlagerung $f : X \longrightarrow Y$ stets eine nicht-negative (oder gar stets eine positive) Zahl?

14. Können Sie ein Beispiel für eine nicht-triviale unverzweigte Überlagerung von $\widehat{\mathbb{C}}$ angeben?

15. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit $\dim H^0(X, \Omega) = 2$. Folgt dann bereits, dass $\dim H^1(X, \mathbb{C}) = 4$?

16. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit $\dim H^1(X, \mathbb{C}) = 4$. Folgt dann bereits, dass $\dim H^1(X, \mathcal{O}) = 2$?

17. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit $\dim H^0(X, \mathcal{O}) = 1$. Folgt dann bereits, dass $H^1(X, \mathbb{C}) = 2$?

18. Sei X eine kompakte Riemannsche Fläche mit $\dim H^2(X, \mathbb{C}) = 1$. Folgt dann bereits, dass $\dim H^1(X, \Omega) = 1$?

19. Sei x eine beliebige komplexe Zahl. Existiert dann stets eine kompakte Riemannsche Fläche X, so dass für jede nicht-konstante meromorphe 1-Form die Summe über alle ihre Residuen x ergibt?