Übungen zur Vorlesung "Funktionentheorie II"
WS16/17 Blatt 6

Ausgabe: 29.11.2016, **Abgabe:** 6.12.2016

Informationen zur Vorlesung finden Sie unter:

http://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/ws16/ftheorie2/ftheorie1617.htm

Alle Lösungen sind vollständig zu begründen.
Bonusaufgaben gehen nicht in die Pflichtwertung ein, sondern können benutzt werden, um zusätzliche Punkte zu erhalten.

Aufgabe 6.1: Auf $\widehat{\mathbb{C}}$ haben wir die Standardüberdeckung $\mathfrak{U} = \{U_0, U_\infty\}$ aus der Vorlesung. Berechnen Sie die Čech-Kohomologiegruppen $H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O})$ und $H^1(\mathfrak{U}, \Omega)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 6.2: Sei Γ ein Gitter und $X = \mathbb{C}/\Gamma$ die zugehörige Riemannsche Fläche. Sei $P \in X$ der Punkt, der das Bild des Koordinatenursprungs unter $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Gamma$ ist.

1. Nutzen Sie den Satz von Riemann–Roch, um die Dimension der Linearsysteme

$$l(nP)$$

   für $n = 0, 1, \ldots, 6$ zu berechnen.

   (Tipp: Das Geschlecht und den kanonischen Divisor von X hatten wir bereits in der Vorlesung bestimmt)

2. Auch wenn wir den Satz von Riemann–Roch noch nicht bewiesen haben, können wir die Rechnung aus (1) schon "von Hand" beweisen, indem wir die Theorie der elliptischen Funktionen aus der Funktionentheorie I nutzen (alles was Sie benötigen, finden Sie z.B. im Funktionentheorie I Skript). Geben Sie eine konkrete Basis von $L(nP)$ für $n = 0, 1, \ldots, 6$ an.

3. Folgern Sie, dass es sieben Zahlen $\beta_1, \ldots, \beta_7 \in \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$\beta_1 + \beta_2\wp + \beta_3\wp' + \beta_4\wp^2 + \beta_5\wp'^2 + \beta_6\wp\wp' + \beta_7\wp^3 = 0$$

   als Gleichheit von meromorphen Funktionen gilt. Sie müssen diese Zahlen *nicht* konkret berechnen.

(8 Punkte)

Aufgabe 6.3: Sei X eine Riemannsche Fläche.

1. Zeigen Sie, dass die Divisoren auf einer offenen Menge $U \mapsto \mathrm{Div}(U)$ eine Garbe bilden.

2. Zeigen Sie, dass
$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^\times \longrightarrow \mathcal{M}^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div} \longrightarrow 0$$
eine kurze exakte Sequenz von Garben ist. Hierbei bezeichnet $\mathcal{M}^\times$ die meromorphen Funktionen, die nicht konstant null sind, und "div" die Abbildung, die einer solchen Funktion ihren Hauptdivisor zuordnet.

3. In der Vorlesung haben wir bereits die Sequenz von Garben
$$0 \longrightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^\times \longrightarrow 0$$
gesehen.

   (a) Beweisen Sie, dass dies eine kurze exakte Sequenz von Garben ist.

   (b) Beweisen Sie, dass falls wir die Garben als Prägarben auffassen, diese *keine* exakte Sequenz von Prägarben ist. Erklären Sie auch, warum die Prägarbe
$$\mathcal{Q}(U) := \mathcal{O}^\times(U)/\exp(\mathcal{O}(U))$$
nicht die Axiome eine Garbe erfüllt.

(6 Punkte)

Aufgabe 6.4:
Suchen Sie in der Literatur nach dem *Schlangenlemma* (bzw. *snake lemma*).

1. Prägen Sie sich die Aussage dieses Lemmas ein.

2. Lesen Sie sich den Beweis des Lemmas durch und schreiben Sie uns auf, in welcher Quelle Sie den Beweis nachgelesen haben[1] (Sie müssen den Beweis *nicht* nochmal selbst aufschreiben!).

3. Versuchen Sie das Muster im Beweis zu erkennen, so dass Sie auf Nachfrage theoretisch jede Teilaussage beweisen könnten.

Die Idee dieser Aufgabe ist, dass der Beweis zwar unangenehm und länglich erscheinen mag, doch jeder einzelne Schritt sehr einfach ist.

(4 Punkte)

[1] es gibt auch einen Film, in dem das Lemma bewiesen wird...