Anwesenheitsaufgaben: Kalenderwoche 43, 2017

Aufgabe 0.1: Sei k ein Körper. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned}(k,+,0) &\to (\mathrm{GL}_2(k),\cdot)\\ x &\mapsto \begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 0.2: Beweisen Sie:

1. Die Verknüpfung von zwei Gruppenhomomorphismen ist ein Gruppenhomomorphismus.

2. Das Inverse eines Gruppenisomorphismus ist ein Gruppenhomomorphismus (und damit auch ein Gruppenisomorphismus).

Aufgabe 0.3: Bestimmen Sie jeweils für die folgenden Relationen $\sim$ auf $\mathbb{N}$, ob sie symmetrisch, reflexiv bzw. transitiv sind:

		reflexiv	symmetrisch	transitiv
$a \sim b \Leftrightarrow$	$a-b=1$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow$	$(a-b)\in 0,1$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow$	$\lvert a-b\rvert=1$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow$	$a-b<0$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow$	$\lvert a-b\rvert<0$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow$	$a-b\leq 0$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow$	$\lvert a-b\rvert\leq 1$	○	○	○
$a \sim b \Leftrightarrow$	$2\mid(a-b)$	○	○	○

Aufgabe 0.4: Sei S_3 die symmetrische Gruppe der Menge $\{1,2,3\}$, d.h. alle Bijektionen auf der Menge. Betrachten Sie die Permutation

$$\sigma : 1 \mapsto 2, 2 \mapsto 3, 3 \mapsto 1$$

1. Welche Ordnung hat σ?

2. Beweisen Sie: Die von σ erzeugte Untergruppe $U \subset S_3$ ist ein Normalteiler

3. Bestimmen Sie explizit die Restklassen S_3/U

4. Verifizieren Sie durch explizite Rechnung, dass $S_3/U \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.